45 EJERCICIOS de FUNCIONES

Concepto de función:

1. Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Razonar que se trata de una función.

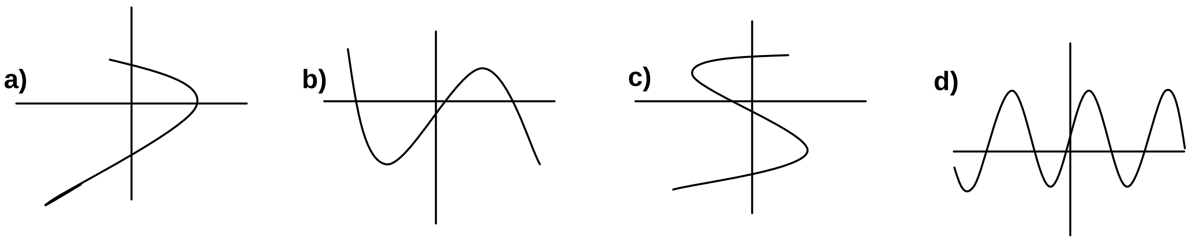
b) Calcular f(4), f(1), f(0), f(–9), f(1/4), f(2) y f(√2)

c) Hallar la antiimagen de 3, de 25 y de –4

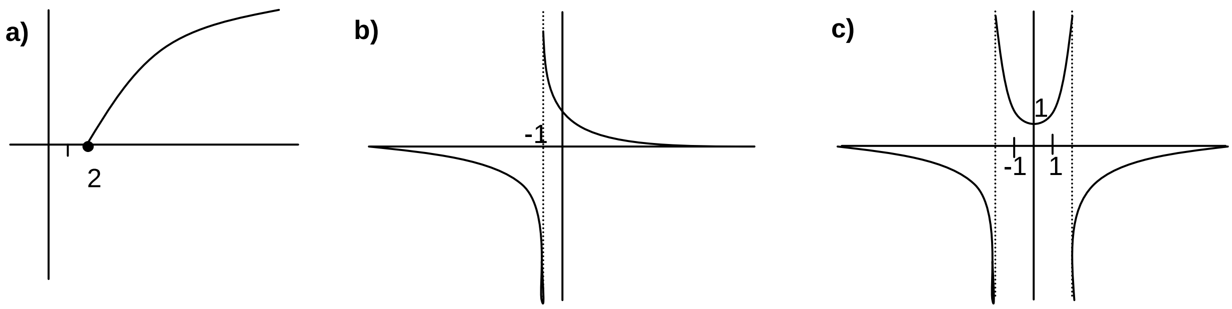
d) Razonar cuál es su Dom(f) e Im(f)

2. Ídem para f(x)=2x+1

3. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



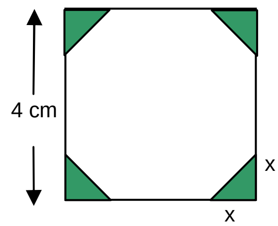
4. ¿Cuál es el Dom(f) e Im(f) de cada una de estas funciones? (responder en este cuaderno):



5. De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.

a) Escribir el área del octógono que resulta, en función de x *(Sol: A(x)=16-2x²)*

b) ¿Cuál es el dominio y recorrido de esa función? *(Sol: Dom(f)=[0,2]; Im(f)=[8,16])*



Gráfica de una función:

6. Para cada una de las funciones que figuran a continuación se pide:

i) Tabla de valores apropiada y representación gráfica.

ii) Dom(f) e Im(f) a la vista de la gráfica.

iii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$

a) f(x)=3x+5

b) $f(x)=x^2-4x+3$ ¿vértice?

c) $f(x)=x^3$

d) $f(x)=x^4$

e) f(x)=2

f) $f(x)=\sqrt{x-9}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)$?

h) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$? | **i)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ¿asíntotas?

Cálculo del Dom(f):

7. Obtener **analíticamente**, de forma razonada, el Dom(f) de las funciones del ejercicio anterior, comprobando que se obtiene el mismo resultado que gráficamente.

8. Sin necesidad de representarlas, hallar **analíticamente** el Dom(f) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3+x^2-3x+1$

b) $f(x)=\dfrac{8x}{x+5}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$

d) $f(x)=\dfrac{2}{4x-x^2}$

e) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-16}$

f) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+16}$

g) $f(x)=\sqrt{x+5}$

h) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

i) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

j) $f(x)=\sqrt{4-x}$

k) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

l) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$

m) $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}$

n) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-16}}$

o) $f(x)=\dfrac{x+1}{(2x-3)^2}$

p) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-x-6}}$

q) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-12}}$

r) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4}$

s) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

t) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+2x+1}$

u) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+4}$

v) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

w) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x^2-4}}$

*(Soluc: **a)** IR; **b)** IR-[-5}; **c)** IR-{-2,4}; **d)** IR-{0,4}; **e)** IR-[±4}; **f)** IR; **g)** [-5,∞); **h)** (-5,∞); **i)** [5/2,∞); **j)** (-∞,4]; **k)** (-∞ ,-3]U[3,∞); **l)** (-∞,-4]U[2,∞); **m)** IR; **n)** (-4,0]U(4,∞); **o)** IR-{3/2}; **p)** [-3,-2)U(3,∞); **q)** (4,∞); **r)** IR; **s)** (-∞,2)U(3,∞); **t)** IR-{-1}; **u)** IR; **v)** IR; **w)** IR-{±2})*

Propiedades que se deducen de la gráfica de una función:

9. A la vista de sus gráficas, indicar la **continuidad** de las funciones del ejercicio 6.

10. A la vista de sus gráficas, indicar los **intervalos de crecimiento** y los posibles **M y m** relativos de las funciones del ejercicio 6.

11. Hallar analíticamente los posibles puntos de **corte con los ejes** de las funciones del ejercicio 6, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

12. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones (en el caso de las cuatro primeras, dibujar además, únicamente con esa información, la gráfica):

a) $y=2x-6$

b) $f(x)=x^2+2x-3$

c) $f(x)=x^2+x+1$

d) $f(x)=x^3-x^2$

e) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

f) $f(x)=\sqrt{2x+4}$

g) $f(x)=\sqrt{2x}+4$

h) $y=\dfrac{x+4}{2x+2}$

i) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$

j) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

k) $y=\sqrt{x^2+9}$

l) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

m) $y=\dfrac{x^2+4}{x+2}$

n) $f(x)=\dfrac{4}{x-4}$

o) $f(x)=x^4-1$

p) $y=\dfrac{x^3+8}{x^3-8}$

q) $f(x)=x^4+x^3+2x-4$

r) $f(x)=6x^3-7x^2-7x+6$

(*Soluc:* ***a)*** *(3,0),(0,-6);* ***b)*** *(-3,0),(1,0),(0,-3);* ***c)*** *(0,1);* ***d)*** *(0,0),(1,0);* ***e)*** *(-2,0),(2,0),(0,-2);* ***f)*** *(-2,0),(0,2);* ***g)*** *(0,4);* ***h)*** *(-4,0),(0,2);* ***i)*** *(√3,0),(-√3,0),(0,3);* ***j)*** *(-2,0),(1,0);* ***k)*** *(0,3);* ***l)*** *(1,0),(2,0),(3,0),(0,-6);* ***m)*** *(0,2);* ***n)*** *(0,-1);* ***o)*** *(-1,0),(1,0),(0,-1)*)

13. Hallar analíticamente la posible simetría de las funciones del ejercicio 6, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

14. Hallar la posible simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4$

b) $f(x)=x^3$

c) $f(x)=x^4-x^2$

d) $f(x)=x^2-x^3$

e) $f(x)=2x-3$

f) $f(x)=x^5-x^3$

g) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$

h) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

i) $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$

j) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+6}$

k) $y=\dfrac{3x}{2x^2-1}$

l) $f(x)=\dfrac{x}{x-5}$

m) $y=\dfrac{5x^2}{x-1}$

n) $f(x)=x+\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$

o) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2+3}$

(*Soluc:* ***a)*** *par;* ***b)*** *impar;* ***c)*** *par;* ***d)*** *no simétrica;* ***e)*** *no simétrica;* ***f)*** *impar;* ***g)*** *par;* ***h)*** *impar;* ***i)*** *impar;* ***j)*** *par;* ***k)*** *impar;* ***l)*** *no simétrica;* ***m)*** *no simétrica;* ***n)*** *no simétrica;* ***o)*** *no simétrica*)

15. a) ¿Una función puede ser simétrica par e impar al mismo tiempo? Razonar la respuesta.

b) Demostrar que toda función impar definida en el origen necesariamente pasa por éste

16. Estudiar los puntos de corte con los ejes y la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$ **b)** $y=\dfrac{x+3}{x^2+1}$ **c)** $y=\dfrac{14}{x^3}$ **d)** $y=\dfrac{x^2-9}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=\dfrac{4x+12}{3x+6}$

Estudio completo de una función (I):

17. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Dom(f) **ii)** Posible simetría. **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **v)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **vi)** ¿Es continua? **vii)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **viii)** Ecuación de las posibles asíntotas. **ix)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ **x)** Hallar la antiimagen de y=–1

18. Ídem para:

a) $f(x)=x^3-3x$ Antiimagen de y=2

b) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ Antiimagen de y=1

c) $y=x^4-2x^2$ Antiimagen de y=–1/2

d) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ Antiimagen de y=4/5

e) $f(x)=x^3-3x^2$ Antiimagen de y=–2

f) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ Antiimagen de y=2

g) $y=-x^3+12x$ Antiimagen de y=–11

h) $y=x+\dfrac{9}{x}$

i) $f(x)=\dfrac{9}{x^2-9}$ Antiimagen de y=–1/3

j) $f(x)=\dfrac{16-8x}{x^2}$ Antiimagen de y=–2

k) $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ Antiimagen de y=–1/2

l) $y=\dfrac{x}{x^2-x+1}$ Antiimagen de y=–1/2

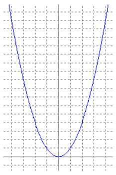
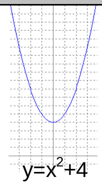
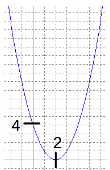
m) $y=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$

n) $y=\sqrt{-x^2+4x+5}$

o) $y=\dfrac{x^2+5}{x-2}$ Antiimagen de y=–6

Transformaciones de funciones:

19. Completar la siguiente tabla (véase el primer ejemplo):

FUNCIÓN ORIGINAL	TIPO DE TRANSFORMACIÓN		FUNCIÓN TRANSFORMADA	RESULTADO
 $y=x^2$	TRASLACIONES	$f(x)\pm k$	 $y=x^2+4$	**TRASLACIÓN hacia ARRIBA**
			$y=x^2-2$	**TRASLACIÓN hacia ABAJO**
		$f(x\pm k)$	$y=(x-2)^2$	**TRASLACIÓN hacia la DERECHA**
			$y=(x+3)^2$	**TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA**
	CONTRACCIONES o EXPANSIONES		$y=2x^2$	**CONTRACCIÓN**
			$y=\frac{1}{3}x^2$	**EXPANSIÓN**
			$y=-3x^2$	**(Reflexión +) CONTRACCIÓN**
 $y=x^2-4x+4$	REFLEXIONES		$y=-(x^2-4x+4)=-x^2+4x-4$	**REFLEXIÓN respecto al EJE X**
			$y=(-x)^2-4(-x)+4=x^2+4x+4$	**REFLEXIÓN respecto al EJE Y**

20. a) A partir de la gráfica de $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, representar las gráficas de $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+3$, $f(x)=\sqrt[3]{(x+3)^2}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-2$ y $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ (cada una en distintos ejes), indicando el nombre de la transformación obtenida.

b) Ídem con $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ y las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$, $f(x)=\dfrac{1}{3(x^2+1)}$ y $f(x)=\dfrac{-1}{x^2+1}$

c) Ídem con $f(x)=\sqrt[3]{x}$ y las funciones $f(x)=\sqrt[3]{-x}$ y $f(x)=-\sqrt[3]{x}$

21. A partir de la gráfica de la hipérbola $f(x)=\dfrac{1}{x}$, representar sucesivamente (cada una en distintos ejes) las hipérbolas $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ y $f(x)=\dfrac{x+3}{x+2}=1+\dfrac{1}{x+2}$

22. a) Representar gráficamente la hipérbola $f(x)=-\dfrac{1}{x-2}+3$ partiendo de la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$

b) Ídem con $f(x)=\sqrt[3]{-x+2}$, partiendo de $f(x)=\sqrt[3]{x}$

23. Representar la función f(x)=Ent(x)

Estudio completo de una función (II):

24. Dadas las siguientes **funciones definidas a trozos** se pide: **i)** Gráfica. **ii)** Dom(f) e Im(f) **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **v)** Continuidad. **vi)** Ecuación de las posibles asíntotas. **vii)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ **viii)** Responder, además, a las preguntas particulares de cada apartado:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x & \text{si } x\in[2,\infty) \end{cases}$

¿f(1), f(2) y f(3)?
¿Antiimagen de y=3?

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x-2 & \text{si } x\in[2,4] \\ 5 & \text{si } x\in(4,\infty) \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=16
Hallar la antiimagen de y=1

c) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-1 \\ 1-2x & \text{si } -1\le x<1 \\ 3x-1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

¿f(1) y f(−1)?
¿Antiimagen de y=2?
¿Antiimagen de y=−3?

d) $f(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si } x\le 1 \\ -2 & \text{si } x=2 \\ x/2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

¿f(1), f(3/2), f(2) y f(−3)?
¿Antiimagen de y=1?
¿Antiimagen de y=2?
¿Antiimagen de y=18?

e) $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } -5\le x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ ¿f(-6), f(0)?

f) $f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\in(1,\infty) \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x<0 \\ -2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } x\in(-\infty,2] \\ x^2-4x & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-5} & \text{si } x\le 0\\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0<x\le 3\\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si } x>3\end{cases}$

¿f(0) y f(3)?
¿Qué x tiene por imagen y=0?
¿Qué x tiene por imagen y=3/2?
¿Qué x tiene por imagen y=1/2?

j) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 3x-x^2 & \text{si } 0\le x<3\\ x-4 & \text{si } 3\le x<6\\ 0 & \text{si } x>6\end{cases}$

¿Vértice de la parábola?

k) $f(x)=\begin{cases}x^2+8x+7 & \text{si } x\le -2\\ \sqrt{x+2} & \text{si } -2<x\le 2\\ \dfrac{5x-18}{2x-8} & \text{si } x>2\end{cases}$

Hallar la antiimagen de 1 y −8

l) $f(x)=\begin{cases}x+4 & \text{si } x<-1\\ x^2-2x & \text{si } -1\le x<2\\ 0 & \text{si } x>2\end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=1

m) $f(x)=\begin{cases}x+15 & \text{si } x\le -2\\ x^2-4x+1 & \text{si } -2<x\le 4\\ -x+7 & \text{si } x>4\end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=6

n) $f(x)=\begin{cases}x+10 & \text{si } x\le -4\\ x^2+2x & \text{si } -4<x\le 1\\ 3/x & \text{si } x>1\end{cases}$

Hallar qué x tiene por imagen 0

o) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1 & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } 0<x<4\\ x-3 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=4

p) $f(x)=\begin{cases}-x+4 & \text{si } x\le -2\\ x^2-x-6 & \text{si } -2<x\le 6\\ 24 & \text{si } x>6\end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=14

q) $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,2)\\ x-2 & \text{si } x\in[2,5]\\ -x+6 & \text{si } x\in(5,\infty)\end{cases}$

¿Cuáles son las antiimágenes de 1 y 16?

r) $f(x)=\begin{cases}x^2+8x+7 & \text{si } x<-3\\ x-5 & \text{si } -3\le x<2\\ \sqrt{x-2} & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

Hallar la antiimagen de -5

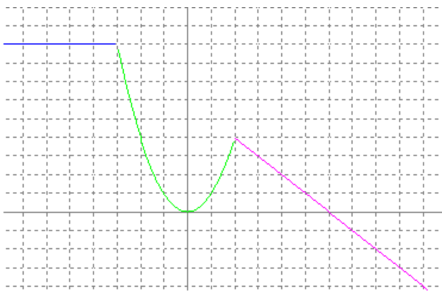
s) $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3 & \text{si } x<1\\ x-1 & \text{si } 1<x\le 4\\ x^2-4x+3 & \text{si } x>4\end{cases}$

t) $f(x)=\begin{cases}x+5 & \text{si } x<-3\\ x^2+2x-3 & \text{si } -3\le x<2\\ \dfrac{5}{x-1} & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

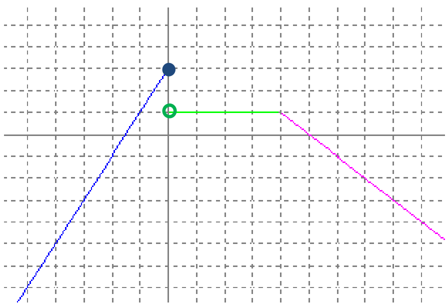
Hallar la antiimagen de 1

25. Hallar la expresión analítica –es decir, como función definida por ramas– de las siguientes funciones (puede indicarse en este cuaderno):

a)



b)



26. Dadas las siguientes **funciones valor absoluto** se pide: **i)** Definición analítica por ramas. **ii)** Gráfica. **iii)** Dom(f) e Im(f) **iv)** Posibles cortes con los ejes. **v)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **vi)** Continuidad. **vii)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

a) $f(x)=|x-1|$ **b)** $f(x)=|-3x+3|$ **c)** $f(x)=|3x+6|$ **d)** $f(x)=|x^2-5x+6|$

e) $f(x)=|x^2-4x+3|$ **f)** $f(x)=|-x^2-4x-5|$ **g)** $f(x)=\left|\frac{1}{2}x^2-x-4\right|$ **h)** $f(x)=|x^2-4x+5|$

i) $f(x)=|-x^2+x-1|$ **j)** $f(x)=|x^2-4x|$ **k)** $f(x)=\frac{|x|}{x}$ **l)** $f(x)=|9-x^2|$

m) $f(x)=|x|+x$ **n)** $f(x)=|x+1|+|x-1|$ **o)** $f(x)=|3x+6|-|2x-2|$ **p)** $f(x)=\sqrt{\frac{|x|}{x}}$

q) $f(x)=2-|x|$ **r)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+1 & \text{si } x<2\\ |2x-6| & \text{si } x\geq 2\end{cases}$ **s)** $f(x)=\begin{cases}|x^2+4x+3| & \text{si } x<-1\\ (x-1)^2-2 & \text{si } x\geq -1\end{cases}$

t) $f(x)=|x|+|x-2|$ **u)** $f(x)=\frac{|x|}{x}-x$ **v)** $f(x)=|x|+x+1$ **w)** $f(x)=2|x^3-8|$

27. A partir de la gráfica de $f(x)=|x|$, representar sucesivamente (cada una en distintos ejes) $f(x)=|x|+3$, $f(x)=|x-2|$, $f(x)=-|x|$, $f(x)=|2x|$ y $f(x)=\left|\frac{x}{3}\right|$

Composición de funciones. Función inversa:

28. Hallar $f\circ g$ (léase *g compuesta con f*) y $g\circ f$ (*f compuesta con g*) en los siguientes casos:

a) $f(x)=3x-5$ $g(x)=1/x$
b) $f(x)=x^2$ $g(x)=3x-5$
c) $f(x)=1/x$ $g(x)=\sqrt{x}$
d) $f(x)=x^2$ $g(x)=\sqrt{x}$
e) $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=\frac{1}{x^2-4}$

29. ¿Se puede componer una función consigo misma? ¿Qué obtenemos si hacemos $(f\circ f)(x)$ para $f(x)=2x+1$? Hacerlo también para $f(x)=\frac{1}{x}$ y $f(x)=\frac{1-x}{x+1}$

30. Comprobar que las siguientes funciones son inversas y representarlas gráficamente sobre los mismos ejes:

a) $f(x)=2x$ $g(x)=\frac{x}{2}$ **b)** $f(x)=x^3$ $g(x)=\sqrt[3]{x}$ **c)** $f(x)=x+1$ $g(x)=x-1$

¿Qué conclusión se obtiene a la vista de sus gráficas?

31. Hallar la función inversa de (y comprobar):

a) $y=\sqrt{x+4}$
b) $y=3+2(x-1)$
c) $y=2\sqrt{x+1}$
d) $y=3/x$ *(Soluc: f coincide con f^{-1})*
e) $y=x^2-1$
f) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$
g) $y=2+\sqrt{x}$
h) $y=\frac{x+1}{3x-1}$ *(Soluc: f coincide con f^{-1})*

Problemas de aplicación:

32. Una fotocopiadora cobra 5 cent por cada fotocopia, pero ofrece también un servicio de multicopia por el que cobra 50 cent por el cliché y 0,15 cent por cada copia de un mismo ejemplar. **a)** Obtener, para cada caso, la función que nos muestra lo que hay que pagar según el número de copias realizadas. **b)** Representar ambas funciones ¿A partir de cuántas copias es más económico utilizar la multicopista? **c)** Resolverlo analíticamente, mediante una inecuación. *(Sol: **b)** A partir de 15 copias inclusive)*

33. Para fabricar un determinado producto hace falta un gasto inicial fijo de 1000 € más 50 € por cada unidad producida. Se pide: **a)** Razonar que el coste por unidad de fabricación disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función

$$y=\frac{50x+1000}{x}$$

b) Hacer la gráfica correspondiente ¿Cuál es su Dom(f)? **c)** ¿Cuál será el coste cuando el número de unidades se haga muy grande? *(Sol: **c)** El coste tenderá a ser de 50 €)*

34. En una academia de mecanografía han llegado a la conclusión de que el número de pulsaciones por minuto de un alumno promedio viene dado por la función

$$y=\frac{400(x+1)}{x+25}$$

donde **x** representa el número de clases recibidas. Se pide: **a)** Representarla gráficamente ¿Cuál es su Dom(f)? **b)** ¿Cuántas clases necesita un alumno para conseguir 300 pulsaciones? **c)** Según este modelo, ¿un alumno podría llegar a tener más de 400 pulsaciones? ¿Por qué? *(Sol: **b)** A partir de 71 clases. **c)** NO)*

35. En una fábrica de montajes se ha estimado que el número de montajes realizados por un aprendiz dependen de los días de prácticas, según la función:

$$y=\frac{60x}{x+5}$$

donde **x** es el tiempo, en días. **a)** ¿Cuántos montajes realizará el primer día? ¿Y el día vigesimoquinto? **b)** ¿Cuántos días tiene que practicar para superar los 60 montajes al día? **c)** Dibujar la gráfica de f(x) *(Sol: **a)** 10 y 50 respectivamente **b)** Nunca)*

36. Un técnico de una compañía ha calculado que los costes de producción (en €) de un determinado producto vienen dados por la siguiente expresión:

$$C(x)=x^2+20x+40000$$

donde x representa el número de unidades producidas. Por otra parte, cada unidad se vende al público a un precio de 520 €.

a) Expresar, en función del número de artículos producidos x, el beneficio y representarlo gráficamente.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

*(Sol: **b)** 250 unidades; 22500 €)*

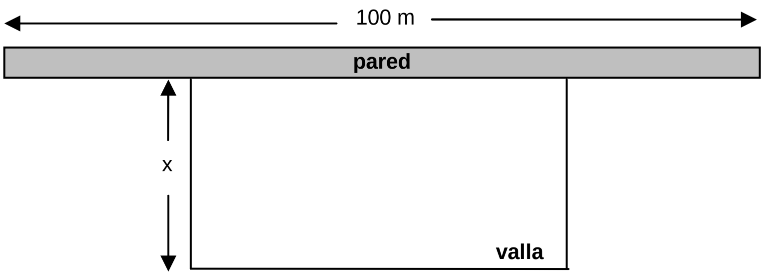
37. La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representar la función que describe este enunciado y determinar su expresión analítica, como función definida por ramas.

b) Indicar cuál es su dominio y recorrido. *(Sol: **b)** Dom(f)=[0,25]; Im(f)=[0,20])*

Resolución gráfica de **problemas de optimización**:

38. Con un listón de madera de 4 m de largo queremos fabricar un marco para un cuadro. **a)** Razonar que el valor de la superficie para una base cualquiera **x** viene dado por $S(x)=2x-x^2$ **b)** Representar gráficamente la función anterior ¿Cuál es el valor de la base para el que se obtiene la superficie máxima? **c)** ¿Cuánto vale dicha superficie? *(Sol: **b)** 1 m **c)** 1 m^2)*



39. Con 100 m de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared de 100 m de largo, como indica la figura.

a) Llamar **x** a uno de los lados y construir la función que nos da el área. Representarla gráficamente ¿Cuál es su Dom(f)?

b) ¿Cuáles serán las dimensiones del recinto de área máxima?

c) ¿Cuánto vale esa área? *(Sol: **a)** $S(x)=100x-2x^2$ **b)** 25 m x 50 m **c)** 1250 m^2)*

40. Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderán a 40 cent/kg. Se estima que cada día que pase se estropeará 1 kg, pero el precio aumentará 1 cent/kg.

a) Razonar que el beneficio que obtendremos al vender pasados x días viene dado por $B(x)=-x^2+160x+8000$

b) Representarla gráficamente y hallar su dominio de definición.

c) ¿Cuándo hemos de venderlas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio? *(Sol: **c)** Interesará venderlas pasados 80 días)*

41. Una cooperativa ha cosechado 200 000 kg de tomates que puede vender a 25 cent/kg. Se sabe que, por cada semana que transcurre, se pierden 4 000 kg de tomates pero el precio de cada kg aumenta en 5 cent. Expresar el valor total de los tomates en función del tiempo. Representar la gráfica de dicha función e indicar al cabo de cuántas semanas nos interesará vender. *(Sol: $B(x)=-20\,000x^2+900\,000x+5\,000\,000$; 22,5 semanas $\Rightarrow$ 151 250 €)*

Cónicas:

42. Dadas las siguientes expresiones, razonar en cada caso si corresponden a una **circunferencia** y, en caso afirmativo, dibujar su gráfica e indicar el centro y el radio:

a) $x^2+y^2+25=0$ *(Soluc: C(0,0); R=5)*

b) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ *(Soluc: C(2,−1); R=3)*

c) $x^2+y^2-2xy+8=0$

d) $x^2+y^2-10x+6y-15=0$ *(Soluc: C(5,−3); R=7)*

e) $x^2+2y^2-3x-6y+5=0$

f) $x^2+y^2-4x+2y=0$

43. Dadas las siguientes expresiones, razonar en cada caso si corresponden a una **elipse** y, en caso afirmativo, obtener su gráfica:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y}{4}=1$

c) $x^2+4y^2=4$

d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$

e) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

f) $25x^2+9y^2=225$

44. Hallar la ecuación reducida o canónica de una elipse de semieje mayor 4 y menor 3. Comprobarlo gráficamente.

45. Representar las siguientes **hipérbolas**:

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$

c) $\frac{x^2}{9}-y^2=1$

d) $4y^2-x^2=4$

e) $4x^2-9y^2=36$

f) $2x^2-y^2+2=0$