23 EJERCICIOS de DERIVADAS

Derivada de una función en un punto [f'(a)]:

Fórmulas: $\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ (1) $\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ (2)

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a) $f(x)=x^2$ en $x=2$ mediante (1)

b) $f(x)=2x^2-1$ en $x=-3$ mediante (1)

c) $f(x)=2x-5$ en $x=1$ mediante (2)

d) $f(x)=x^3$ en $x=2$ mediante (1)

e) $f(x)=\sqrt{x}$ en $x=4$ mediante (2)

f) $f(x)=1/x$ en $x=-1$ mediante (1)

g) $f(x)=x^2+x+1$ en $x=0$ mediante (2)

(Soluc: a) 4; b) -12; c) 2; d) 12; e) 1/4; f) -1; g) 1)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

3. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-x$ en $x=1$. Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con OX^+ e interpretar el resultado.

Función derivada f'(x):

Fórmula: $\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ (3)

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener f'(2), f'(-1) y f'(0):

a) $f(x)=3x-2$ **b)** $f(x)=x^2-5x+6$ **c)** $f(x)=x^3+1$ **d)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **e)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$

6. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-3x$ en $x=1$ mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite). *(Sol: –1)*

Reglas de derivación. Tabla de derivadas:

7. Utilizando la derivada de la función potencial, $\boxed{y=x^n \Rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}\ (\forall n\in\mathbb{R})}$, hallar la derivada, **simplificada**, de las siguientes funciones:

a) $y=x^2$ **b)** $y=x^3$ **c)** $y=3x^4$ **d)** $y=-2x^5$ **e)** $y=\frac{3}{2}x^4$

f) $y=\frac{x^2}{4}$ **g)** $y=\sqrt{x}$ **h)** $y=\sqrt{x^3}$ **i)** $y=\sqrt[3]{x^2}$ **j)** $y=2\sqrt[4]{x^3}$

k) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ **l)** $y=x^2\sqrt{x}$ **m)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$ **n)** $y=-2x^6$ **o)** $y=\frac{x^8}{4}$

p) $y=2\sqrt{x}$ **q)** $y=3\sqrt[5]{x^3}$ **r)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$

(*Soluc:* ***a)*** *y'=2x;* ***b)*** $y'=3x^2$; ***c)*** $y'=12x^3$; ***d)*** $y'=-10x^4$; ***e)*** $y'=6x^3$; ***f)*** $y'=x/2$; ***g)*** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; ***h)*** $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; ***i)*** $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; ***j)*** $y'=\frac{3}{2\sqrt[4]{x}}$; ***k)*** $y'=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$; ***l)*** $y'=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; ***m)*** $y'=\frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}$; ***n)*** $y'=-12x^5$; ***o)*** $y'=2x^7$; ***p)*** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$; ***q)*** $y'=\frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}$; ***r)*** $y'=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$)

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+x+1$ **b)** $y=2x^3-3x^2+5x-3$ **c)** $y=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}+1$ **d)** $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}$

(*Soluc:* ***a)*** $y'=2x+1$; ***b)*** $y'=6x^2-6x+5$; ***c)*** $y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}$; ***d)*** $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$)

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\frac{1}{x^2}$ **b)** $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$ **c)** $y=\sqrt{x^2+1}$ **d)** $y=(x^2-3)^2$ **e)** $y=\frac{2}{x^3}$

f) $y=(x^2+x+1)^3$ **g)** $y=\sqrt[3]{2x^3-3}$ **h)** $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ **i)** $y=3(x^2+1)^{10}$ **j)** $y=2(3x^2-1)^4$

k) $y=\frac{2}{(x^2+1)^3}$

(*Sol:* ***a)*** $y'=\frac{-2}{x^3}$; ***b)*** $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$; ***c)*** $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; ***d)*** $y'=4x^3-12x$; ***e)*** $y'=\frac{-6}{x^4}$; ***f)*** $y'=3(2x+1)(x^2+x+1)^2$; ***g)*** $y'=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$; ***h)*** $y'=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; ***i)*** $y'=60x(x^2+1)^9$; ***j)*** $y'=48x(3x^2-1)^3$; ***k)*** $y'=\frac{-12x}{(x^2+1)^4}$)

10. Ídem:

a) $y=x\sqrt{x^3}$ **b)** $y=(2x-3)(x^2-5)$ **c)** $y=x^2\sqrt[3]{x}$ **d)** $y=(2x-3)\sqrt[4]{x^3}$ **e)** $y=(2x+1)(x^2-3)^2$

f) $y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

(*Soluc:* ***a)*** $y'=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; ***b)*** $y'=6x^2-6x-10$; ***c)*** $y'=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$; ***d)*** $y'=\frac{14x-9}{4\sqrt[4]{x}}$; ***e)*** $y'=10x^4+4x^3-36x^2-12x+18$; ***f)*** $y'=\frac{-3x+1}{2(x+1)^3\sqrt{x}}$)

11. Utilizando la fórmula para el cociente de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x^2-5}{x+2}$ **b)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$ **c)** $y=\frac{x+2}{x^2-5}$ **d)** $y=\frac{3x}{(2x^2+1)^2}$ **e)** $y=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

(Sol: **a)** $y'=\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$; **b)** $y'=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$; **c)** $y'=-\frac{x^2+4x+5}{(x^2-5)^2}$; **d)** $y'=\frac{3-18x^2}{(2x^2+1)^3}$; **e)** $y'=\frac{3x^2+4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$*)*

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a) $y=\frac{x^2+1}{x^2}$ **b)** $y=\frac{2x^2-3x+1}{x}$ **c)** $y=\frac{x+1}{1-x}$ **d)** $y=\frac{x^2}{\sqrt{x}}$ **e)** $y=\frac{3x^4-2x^2+5}{2}$

f) $y=\left(3x^2+5\right)^5$ **g)** $y=\frac{2x}{x^2+x+1}$

(Sol: **a)** $y'=\frac{-2}{x^3}$; **b)** $y'=\frac{2x^2-1}{x^2}$; **c)** $y'=\frac{2}{(1-x)^2}$; **d)** $y'=\frac{3\sqrt{x}}{2}$; **e)** $y'=6x^3-2x$; **f)** $y'=30x\left(3x^2+5\right)^4$

g) $y'=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$*)*

13. Hallar la fórmula para la derivada de $y=\frac{u}{v\cdot w}$ e $y=\frac{u\cdot v}{w}$, siendo u, v y w funciones.

Ecuación de la recta tangente:

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en x=1 *(Sol: 6x−y+5=0)*

b) $y=2x^5+4$ en x=−1 *(Sol: 10x−y+12=0)*

c) $f(x)=x^4-1$ en x=0 *(Sol: y=−1)*

d) $f(x)=\frac{x^3-2}{x^2-3}$ en x=2 *(Sol: y=−12x+30)*

15. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar la situación.
(Soluc: y=−1; vértice (3,−1))

16. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. *(Soluc: (7/2,−3/4))*

17. **(S)** Determinar los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta y=12x+5 *(Soluc: (1,16) y (−7,176))*

Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

e) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$

f) $f(x) = x^3$

g) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10$

h) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

i) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$

j) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 3$

k) $y=2x^3-9x^2$

l) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

m) $y=x^3-12x$

*(Soluc: **a)** $\nearrow (0,\infty)$ $\searrow (-\infty,0)$; **b)** $\nearrow (-1,0)U(1,\infty)$ $\searrow (-\infty,-1)U(0,1)$; **c)** $\nearrow (-\infty,0)U(2,\infty)$ $\searrow (0,2)$; **d)** $\nearrow (-\infty,1)U(3,\infty)$ $\searrow (1,3)$; **e)** $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$; **f)** $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$; **g)** $\searrow (-\infty,0)$ $\nearrow (0,\infty)$; **h)** $\nearrow (-\infty,-1)U(3,\infty)$ $\searrow (-1,3)$; **i)** $\searrow (-\infty,3)$ $\nearrow (3,\infty)$)*

19. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Dom (f) **ii)** Posible Simetría. **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento a partir de $f'(x)$, y posibles M y m que se deducen. **v)** Ecuación de las asíntotas, en caso de existir. **vi)** Con la información anterior, representarla gráficamente.

20. Ídem para:

a) $f(x)=x^3-3x$ **b)** $y = \frac{x+2}{x-1}$ **c)** $y=x^4-2x^2$ **d)** $y = \frac{2x}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=x^3-3x^2$

f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ **g)** $y=-x^3+12x$ **h)** $f(x) = \frac{9}{x^2-9}$ **i)** $f(x) = \frac{16-8x}{x^2}$ **j)** $y = \frac{x}{x^2+x+1}$

k) $y = \frac{x}{x^2-x+1}$ **l)** $y = \frac{4x}{(x-1)^2}$ **m)** $y = \sqrt{-x^2+4x+5}$

21. Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones , y a partir de ellos los intervalos de monotonía y su representación gráfica:

a) $y=\frac{x^2}{x+2}$ **b)** $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ **c)** $f(x)=\frac{1}{x^4+3}$ **d)** $y=\frac{1}{x^3+x}$ **e)** $f(x)=|x|$

*(Soluc: **a)** M(−4,−8) m(0,0); **b)** M(0,1); **c)** M(0,1/3); **d)** no tiene; **e)** m(0,0))*

22. Hallar los M y m y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

(Soluc: $m(-1, \sqrt[3]{2})$; $\searrow (-\infty,-1)$ $\nearrow (-1,\infty)$)

23. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{4x+5}{2x-3}$$

(Solución: decreciente $\forall x \in$ Dom(f))