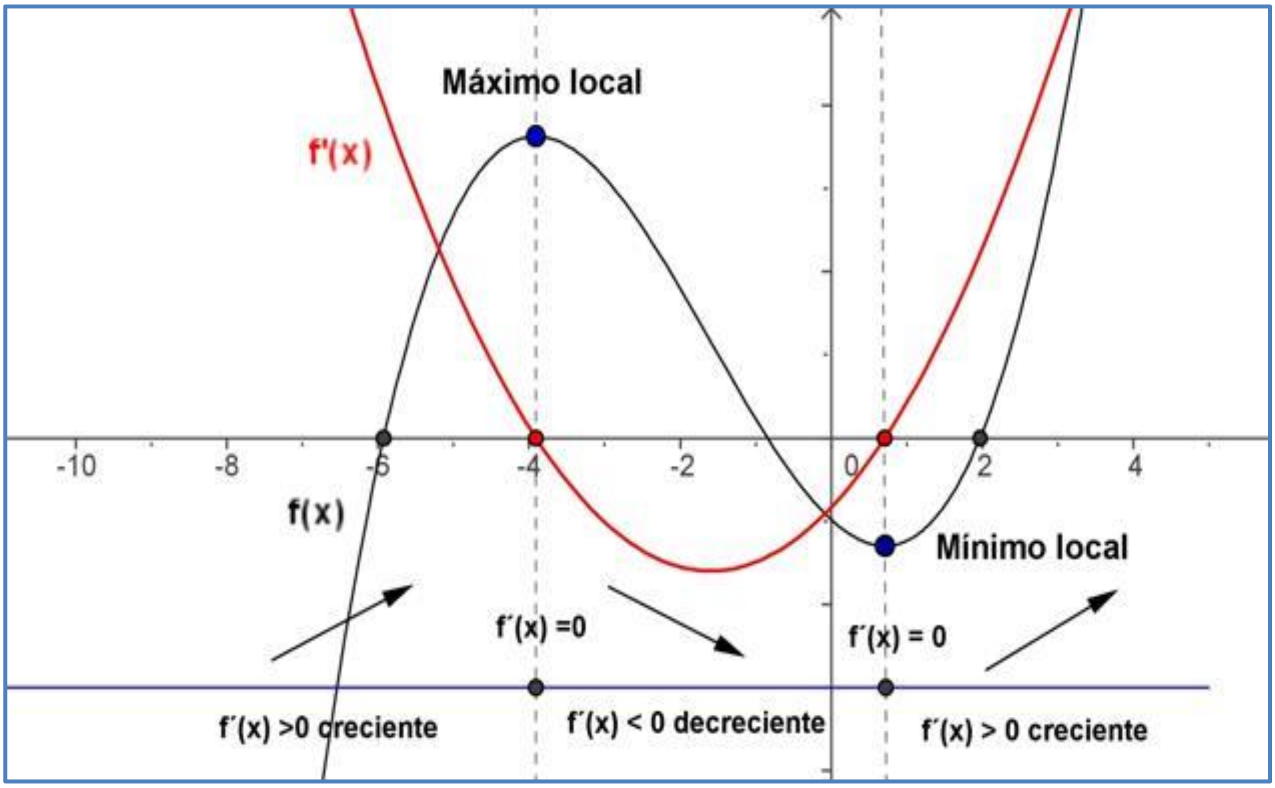
Tema 8: Aplicaciones de la derivada, Representación de Funciones



0.- Introducción
1.- Crecimiento y Decrecimiento de una función. Monotonía.
2.- Máximos y mínimos de una función
  2.1.- Extremos relativos.
  2.2.- Extremos absolutos.
  2.3.- Condición necesaria de extremo.
3.- Curvatura: Concavidad, convexidad.
4.- Cálculo de Límites mediante la regla de L'Hopital.
5.- Optimización de Funciones.
6.- Representación de funciones.
  1) Dominio y Recorrido 2) Simetrías 3) Periodicidad
  4) Continuidad 5) Puntos de Corte 6) Asíntotas
  7) Monotonía 8) Curvatura 9) Boceto de la grafica
7.- Ejercicio Resuelto.
8.- Ejercicios de selectividad

8.0.- Introducción

Esta unidad sobre derivación y representaciones gráficas resume de alguna manera, todo un trabajo que hasta el momento de abordarla se ha desarrollado en este curso y en cursos precedentes. La relación entre derivación, continuidad y límite tiene aquí su punto culminante, cuando en 4º de la ESO se trataba de dejar patente, en sentido puramente geométrico, el concepto de límite y de continuidad.

Se trata así de repasar, consolidar y aportar nuevos planteamientos y desarrollos prácticos a lo aprendido en cursos precedentes y en este mismo de primero, todos los cuales serán de vital importancia tanto en el próximo curso como en los previsibles años universitarios.

Los contenidos de esta unidad didáctica están estrechamente relacionados con todos los de este mismo bloque de análisis, con el de trigonometría y geometría e incluso con el de aritmética y álgebra.

El cálculo de funciones derivadas se conforma en uno de los procedimientos más útiles para resolver cantidad de situaciones relacionadas con las diferentes ciencias: numerosas magnitudes físicas, como la velocidad y la aceleración de un móvil en cierto instante o rapidez con la que varía la cantidad de movimiento de una partícula se expresan mediante la derivada de una función.

Relacionados con las ciencias económicas aparecen conceptos, tales como inflación, presión fiscal o producto interior bruto que pueden ser presentado mediante gráficas de funciones, por tanto de puede realizar mediante la ayuda de conceptos matemáticos, como crecimiento y curvatura, lo mismo que ocurre a la hora de ajustar mediante funciones numerosos conceptos de la física: movimientos de partículas, el trabajo desarrollado al aplicar una fuerza para desplazar un objeto, la ecuación del estudio de un gas ideal o la propagación de la onda sonora plana son solo algunos de los numerosos ejemplos que se podrían enunciar.

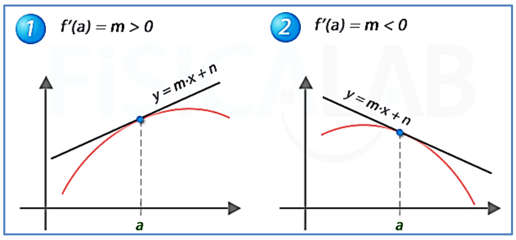
Aprovecharemos los conocimientos adquiridos sobre derivadas, junto con los de límite y continuidad, para afrontar el fin principal para el que se aprenden: la representación y el estudio local y global de funciones que constituyen la segunda y última parte de la unidad.

En ella, las etapas a seguir serán tres: estudiar "*f*" determinando sus características generales y realizando la determinación de sus posibles asíntotas, estudiar *f'* y obtener intervalos de monotonía y extremos y estudiar *f''* obteniendo los intervalos de curvatura y puntos de inflexión. Para ello, se recuerdan los Teoremas pertinentes sobre la relación entre las derivadas sucesivas de una función y sus características locales. Los rasgos de la curva se irán perfilando "haciéndole preguntas" a la función. Empezaremos con la monotonía de una función.

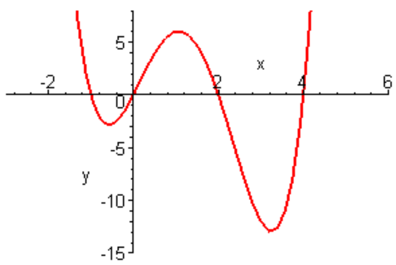
8.1.- Crecimiento y decrecimiento de una función

Sea f una función definida en un intervalo I. Si la función f es derivable en el intervalo I, se verifica:

- f es creciente en I ➔ $f'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in I$
- f es decreciente en I ➔ $f'(x) \leq 0 \ \ \forall x \in I$
- f es constante en I ➔ $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in I$
- f es estrictamente creciente en I ➔ $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in I$
- f es estrictamente decreciente en I ➔ $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in I$



Lo que ocurre, es que, una función no es siempre creciente ni siempre decreciente, sino que tiene intervalos en los que es creciente, e intervalos en los que es decreciente.



Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función f definida en [a,b], hemos de considerar:

- Los extremos a y b del intervalo
- Los puntos donde $f'(x)=0$.
- Los puntos donde no existe $f'(x)$

Tendremos así los posibles extremos de los intervalos en los que cambia de signo $f'(x)$.

Ejemplo 1: *Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la derivada de la función *f(x)*

$f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}$ y la igualamos a cero para obtener sus raíces:

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \;\rightarrow\; x^2(x^2-12)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{12} \\ x=-\sqrt{12} \end{cases}$$

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, y los puntos donde no está definida la derivada, -2 y 2.

f'(x)>0		f'(x)<0		f'(x)<0		f'(x)<0		f'(x)<0		f'(x)>0
↗	$-\sqrt{12}$	↘	-2	↘	0	↘	+2	↘	$+\sqrt{12}$	↗

$f(x)$ es creciente en el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{12}\right)\cup\left(\sqrt{12},+\infty\right)$

$f(x)$ es decreciente en el intervalo $\left(-\sqrt{12},-2\right)\cup\left(-2,2\right)\cup\left(+\sqrt{12},+\infty\right)$

Simbolizamos con ↗ que la función es creciente, y con ↘ que es decreciente.

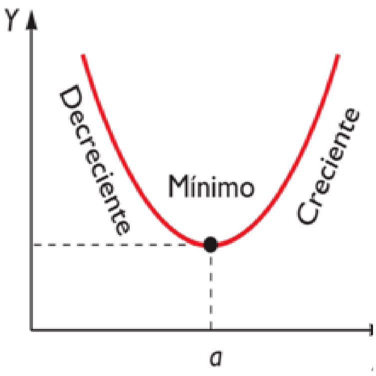
8.2.- Máximos y mínimos de una función

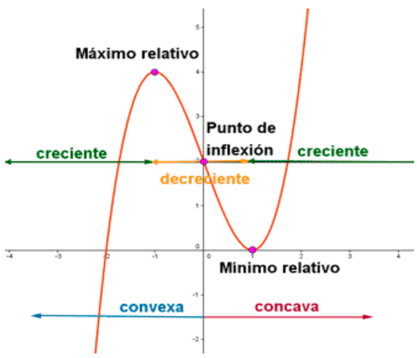
- Se dice que una función *f* tiene en el punto *a* un ***máximo relativo***, o que *a* es un máximo relativo de *f*, cuando para todo *h*, número real, suficientemente pequeño, y tal que *a+h* pertenezca al dominio de *f*, se cumple: $f(a+h) \leq f(a)$.

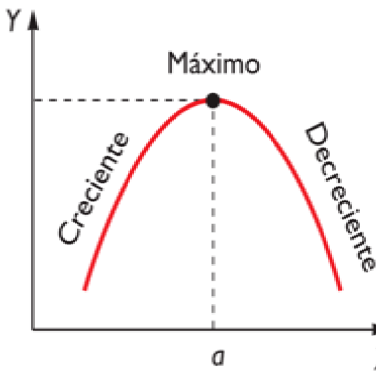
- Se dice que una función *f* tiene en el punto *a* un ***mínimo relativo***, o que *a* es un mínimo relativo de *f*, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que *a+h* pertenezca al dominio de *f*, se cumple: $f(a+h) \geq f(a)$.

También podemos decir que:

- La función *f* posee un máximo relativo en el punto *a*, si en este punto la función cambia de ser creciente a ser decreciente.





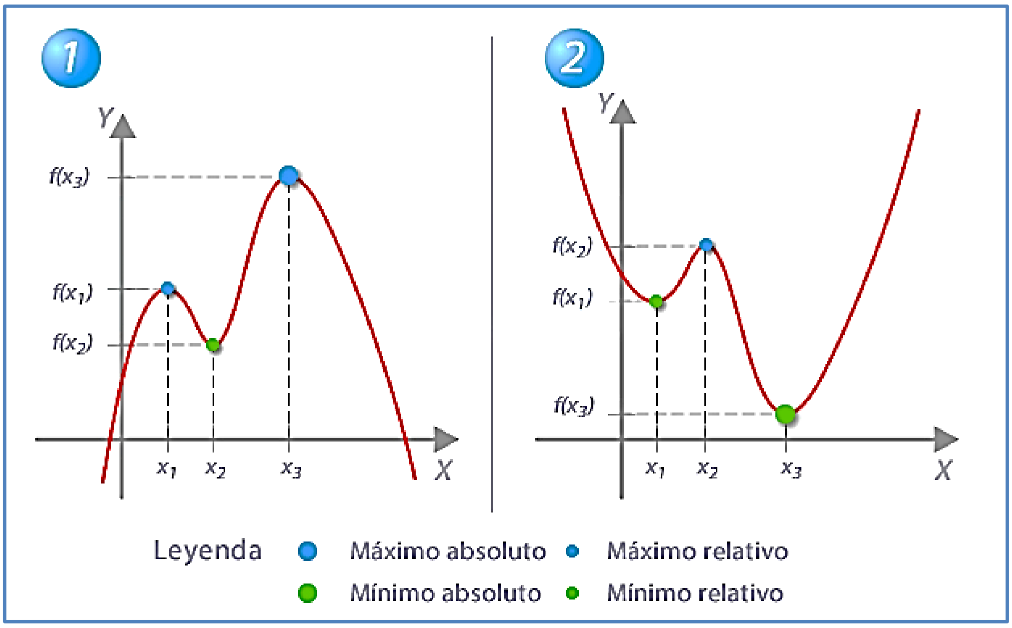


- La función *f* posee un mínimo relativo en el punto *a*, si en este punto la función cambia de ser decreciente a ser creciente.

8.2.1.- Máximos y mínimos absolutos

Decimos que un punto $x=a$ de una gráfica es el máximo absoluto, si además de ser máximo relativo, el punto a es el punto más alto de la gráfica, es decir: f tiene en el punto a un ***máximo absoluto***, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que $a+h$ pertenezca al dominio de f, se cumple: $f(a+h) < f(a)$.

Y de la misma forma, que un punto $x=a$ de una gráfica es el mínimo absoluto, si además de ser mínimo relativo, el punto a es el punto más bajo de la gráfica, es decir: f tiene en el punto a un ***mínimo absoluto***, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que $a+h$ pertenezca al dominio de f, se cumple: $f(a+h) > f(a)$.



8.2.2.- Condición necesaria de extremo

Sea a un punto interior del dominio de la función f. Si f tiene un extremo relativo en a y además f es derivable en a, entonces $f'(a)=0$.

Continuando con el ***ejemplo*** anterior:

$f(x)$ tiene un máximo en $x=-\sqrt{12}$ $\quad f(-\sqrt{12})=-3\sqrt{3}$ en el punto $\left(-\sqrt{12},-3\sqrt{3}\right)$

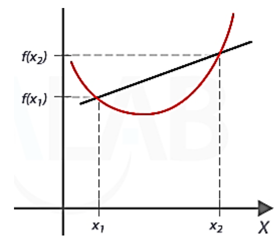
$f(x)$ tiene un mínimo en $x=\sqrt{12}$ $\quad f(\sqrt{12})=3\sqrt{3}$ en el punto $\left(\sqrt{12},3\sqrt{3}\right)$

8.3.- Concavidad y Convexidad

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I, decimos que:

La función es convexa si:

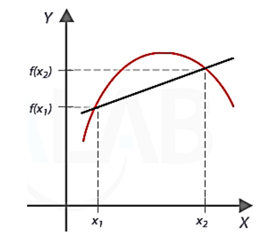
$$f''(x) \geq 0$$



La ***gráfica de la función es cóncava*** en un intervalo (a,b) si la gráfica de la función está por encima de cualquier tangente a la gráfica en dicho intervalo.

La función f es cóncava si:

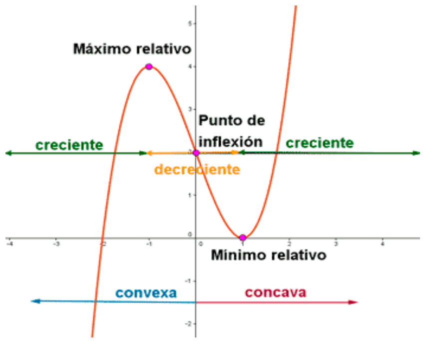
$$f''(x) \leq 0$$



La ***gráfica de la función es convexa*** en un intervalo (a,b) si la gráfica de la función está por debajo de cualquier tangente a la gráfica en dicho intervalo.

A los puntos donde una función cambia de cóncava a convexa o viceversa se les llama ***puntos de inflexión***, y en ellos ocurre que *f''(x)=0*.

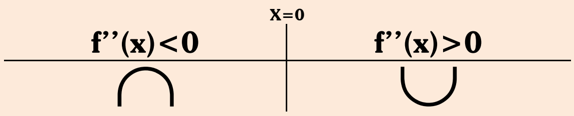
En el ejemplo de la derecha, la función *f(x)* tiene en *x=0* un punto de inflexión.



Ejemplo 1: Continuando con nuestro ejercicio, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ vamos a calcular ahora sus puntos de inflexión.

Para ello empezamos primero calculando la segunda derivada de f(x): $f''(x)=\dfrac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$

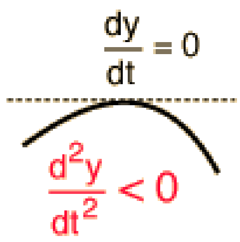
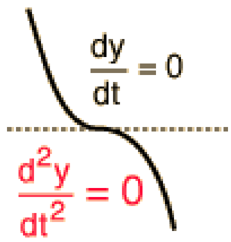
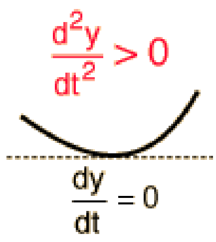
Si la igualamos a cero: $f''(x)=\dfrac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0 \quad \leftrightarrow \quad 8x\left(x^2+12\right)=0 \quad \leftrightarrow \quad x=0$



Llegamos a que la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ tiene un punto de inflexión en *x=0*.

8.3.1.- Criterio de la segunda derivada

Sea *f* una función tal que *f'(a)=0* y la segunda derivada de *f* existe en un intervalo abierto que contiene a *a*, *(a-k,a+k)* $\forall k \in \mathbb{R}$ entonces:

En un ***máximo***, la segunda derivada es negativa. $f''(a)<0 \quad \leftrightarrow \quad f'(a)=0$	En un ***punto de inflexión*** la segunda derivada es cero al igual que la primera. $f''(a)=0 \quad \leftrightarrow \quad f'(a)=0$	En un ***mínimo***, la segunda derivada es positiva. $f''(a)>0 \quad \leftrightarrow \quad f'(a)=0$
		
Máximo	**Punto de Inflexión**	**Mínimo**

8.4.- Cálculo de Límites: Regla de L'Hopital

Sean *f* y *g* dos funciones reales que cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ las funciones *f* y *g* son derivables en un entorno E del punto a.
- ✓ *f(a)=g(a)=0*
- ✓ Existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple que: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Si *f'(a)=g'(a)=0*, siendo las funciones *f'(x)* y *g'(x)* derivables en a, se puede aplicar otra vez la regla de L'Hôpital, y así sucesivamente.

Ejemplo 2: Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{senx-x}{tgx-x}$

Este límite es una indeterminación del tipo $0/0$, como ambas funciones son derivables en R, y además son nulas en 0, podemos aplicar *L'Hopital*, de forma que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx-x}{tgx-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim_{x\to 0}\cos^2 x\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}(-\cos^2 x)\cdot\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{1+\cos x}=\frac{-1}{2}$$

- Para aplicar la regla de *L'Hôpital* hay que tener un límite de la forma $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, donde *a* puede ser un número o infinito, y aparecer las indeterminaciones: $\frac{0}{0}$ *ó* $\frac{\infty}{\infty}$
- En las otras indeterminaciones podemos utilizar *L'Hopital* siempre y cuando seamos capaces de transformar una indeterminación $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$ en otra del tipo $0/0$ ó ∞/∞ .

8.4.1.- Indeterminación $0\cdot\infty$

Si $\lim_{x\to a}f(x)=0$ y $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ entonces: $\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{0}{0}$, que se puede resolver con la regla de L'Hôpital.

8.4.2.- Indeterminación ∞-∞

Si $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$; entonces $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty$

Si multiplicamos y dividimos por f(x).g(x) y operamos un poco, podemos llegar a una expresión que se puede resolver con la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to a}\left([f(x)-g(x)]\cdot\frac{f(x)\cdot g(x)}{f(x)\cdot g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left([f(x)-g(x)]\cdot\frac{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{f(x)-g(x)}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{f(x)}{f(x)\cdot g(x)}-\frac{f(x)}{f(x)\cdot g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

Ejemplo 3: Calcular $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}\right)$

Este límite es una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, operando un poco llegamos a una expresión en la que si podemos aplicar la Regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)-(e^x-e)}{(x-1)(e^x-e)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'Hopital}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-e^x}{e^x(x-1)+(e^x-e)}\right)=\frac{1-e}{0}=\infty$$

8.4.3.- Indeterminaciones 0^0, ∞^0 y 1^∞

Para estas, aplicaremos logaritmos: $A^B=e^{B\ln A}$, de modo que las tres indeterminaciones se reducen a formas $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$, que resolveremos mediante la regla de *L'Hôpital.*

8.5.- Optimización de Funciones

Los problemas de optimización son una de las aplicaciones más inmediatas e interesantes del cálculo de derivadas. El problema es determinar los extremos relativos (máximos ó mínimos) de una función.

Procedimiento a la hora de plantear un problema:

a) Expresión de la magnitud que se desea optimizar. (Por ejemplo el área)

b) Si la expresión a optimizar tiene más de una variable, relacionarlas mediante las condiciones del enunciado.

c) Sustituir en la primera expresión, de forma que esta solo dependa de una variable, y esta será la función a optimizar f(a).

d) Imponer la condición de extremo relativo, esto es, primera derivada igual a cero y despejar la variable a. {f'(a)=0 y calcular valores de a}.

e) Mediante la segunda derivada comprobar si el extremo es máximo o mínimo:

$$Si\ f''(a)\begin{cases} >0 \rightarrow \ \text{a es mínimo} \\ >0 \rightarrow \text{a es máximo} \end{cases}$$

f) Calcular el resto de variables y el valor de la función optimizada.

Ejemplo 8: ***Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.***

La superficie del triángulo se calcula: $S = x \cdot y$.

Al tener dos triángulos semejantes se cumple que: $\frac{x}{10} = \frac{15-y}{15}$, de donde: $x = \frac{2(15-y)}{3}$

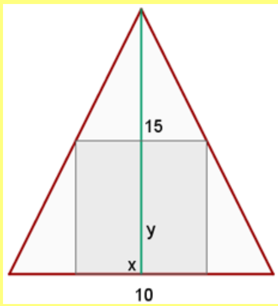
Sustituimos en la expresión de S, y tenemos: $S = \frac{2(15-y)}{3} \cdot y = \frac{2}{3}\left(15y - y^2\right)$

Derivamos: $S' = \frac{2}{3}(15-2y)$ e igualamos a cero: $S' = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}(15-2y) = 0$

De donde obtenemos: $y = \frac{15}{2}$ y de $x = \frac{2(15-y)}{3}$, obtenemos el valor de x: $x = 5$

Para ver si es máximo o mínimo, calculamos la segunda derivada: $y'' = \frac{2}{3}(-2) = \frac{-4}{3} < 0$.

Por tanto para que el área sea máxima, ha de ocurrir que $x = 5 \quad e \quad y = \frac{15}{2}$



8.6.- Representación de funciones

A la hora de estudiar funciones, seguiremos el siguiente esquema:

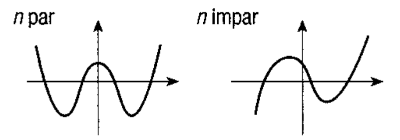
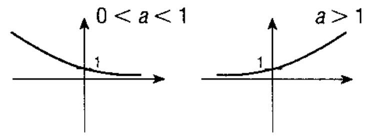
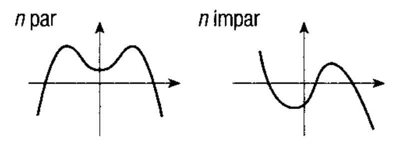
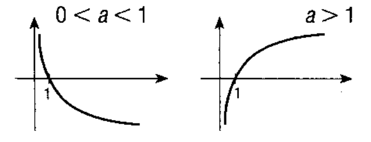
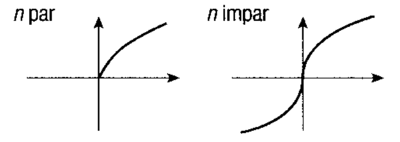
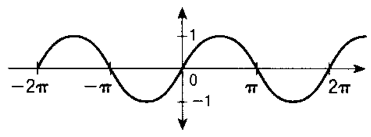
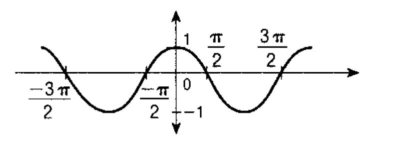
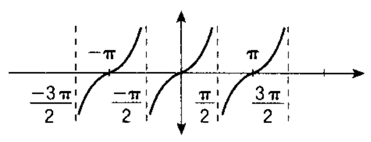
1) Dominio y Recorrido	**2)** Simetrías	**3)** Periodicidad
4) Continuidad	**5)** Puntos de Corte	**6)** Asíntotas
7) Monotonía	**8)** Curvatura	**9)** Boceto de la grafica

Veamos paso a paso cada uno de los ítems anteriores:

8.6.1.- Dominio y recorrido

Dominio: Valores de x para los que está definida (existe) $f(x)$

Recorrido: Valores que toma $f(x)$

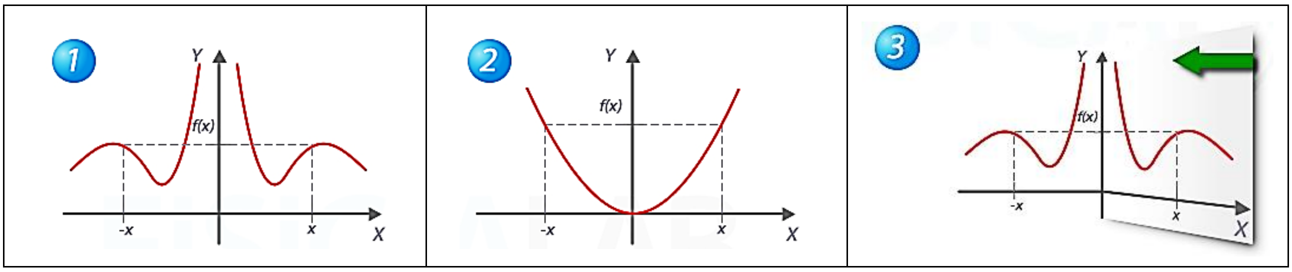
MODELO	GRÁFICA	MODELO	GRÁFICA
Polinómica $a_n > 0$		**Exponencial**	
$a_n < 0$		**Logarítmica**	
Irracional		**sen *x***	
cos *x*		**tg *x***	

- *Funciones Polinómicas*, son de la forma $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ y su dominio es $\mathbb{R}$.
- *Funciones Racionales*, son de la forma $f(x) = \dfrac{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_o x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n}$ y su dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores que anulan el denominador.
- *Funciones Irracionales*, son del tipo $f(x) = \sqrt[n]{f'(x)}$, siendo su dominio:
    - El mismo que $f(x)$ si n es impar
    - El conjunto de valores reales que hagan $f(x) \geq 0$ si n es par
- *Funciones exponenciales*, son de la forma $f(x) = a^{f'(x)}$, con a>0 y a≠1, su dominio es $\mathbb{R}$.
- *Funciones logarítmicas*, son de la forma $f(x) = \log_a f'(x)$, con a>0 y $f'(x) > 0$
- *Funciones circulares*: $f(x) = senx, f(x) = \cos x$, su dominio es $\mathbb{R}$.

8.6.2.- Simetrías

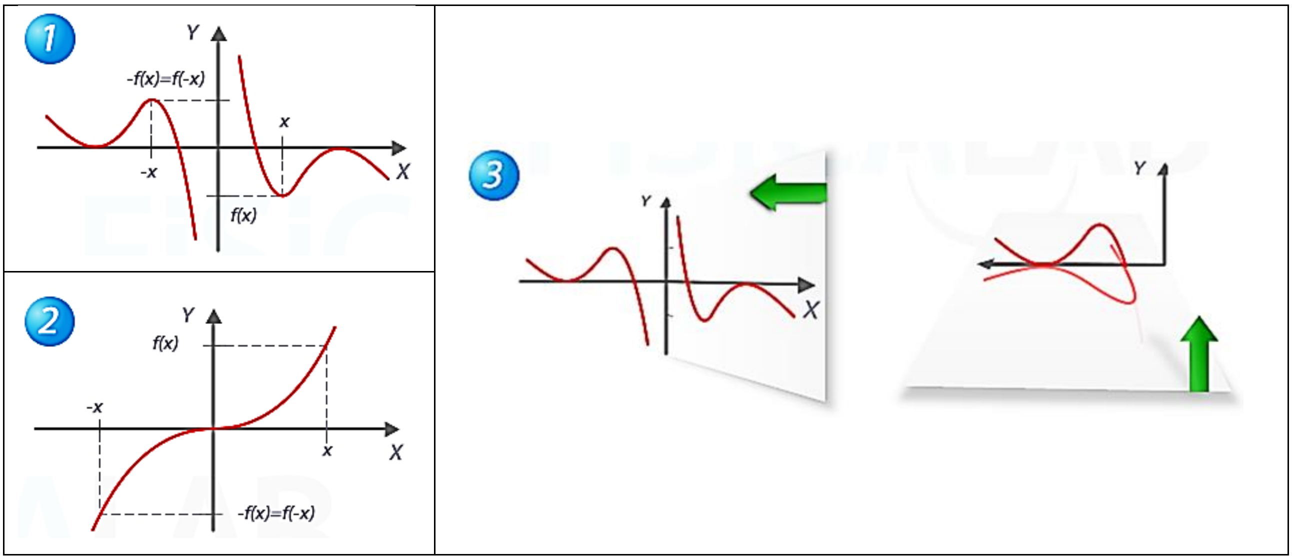
- La función $f: A \mapsto \mathbb{R}$ es ***par*** si $\forall x \in A, \quad f(-x) = f(x)$

La curva de cualquier función par es ***simétrica respecto del eje OY***



- La función $f: A \mapsto \mathbb{R}$ es ***impar*** si $\forall x \in A, \quad f(-x) = -f(x)$

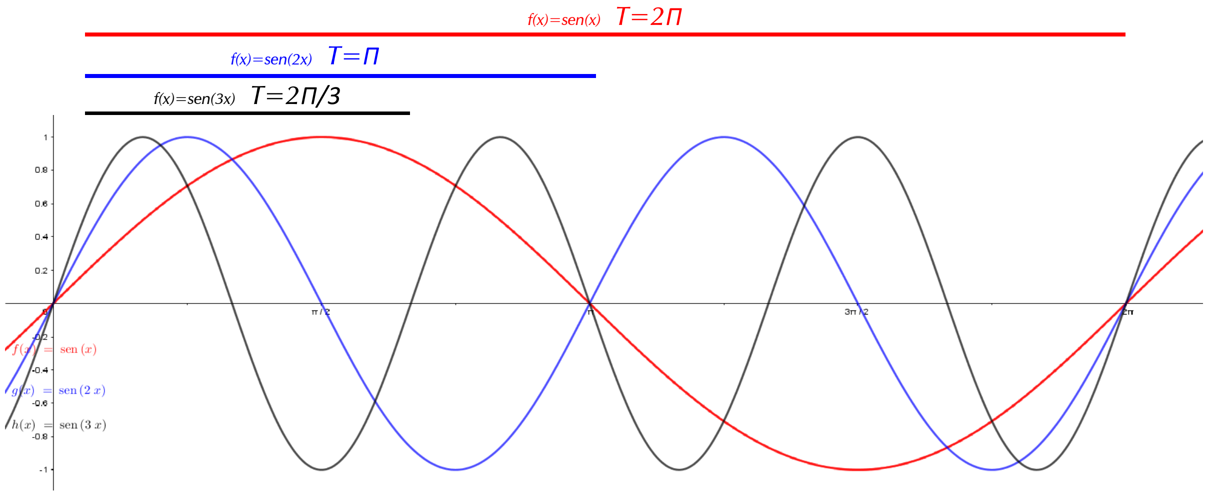
La curva de cualquier función impar es ***simétrica respecto del origen de Coordenadas O***



Recuerda que para comprobar que una función es par, basta con doblar con respecto al eje y. Y para que sea impar, doblamos con respecto al eje y y después con respecto al x. (ver figuras)

8.6.3.- Periodicidad

La función $f: A \mapsto \mathbb{R}$ es ***periódica***, si existe un número real T distinto de cero, llamado ***periodo***, tal que: $f(x+T) = f(x)$ *f(x)=sen(x) T=2Π*



Periodos de algunas funciones sinusoidales.

8.6.4.- Continuidad.

Las discontinuidades de una función, son los puntos donde la función no es continua.

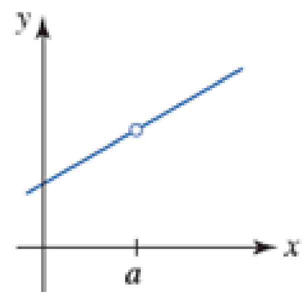
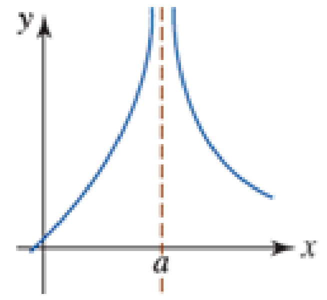
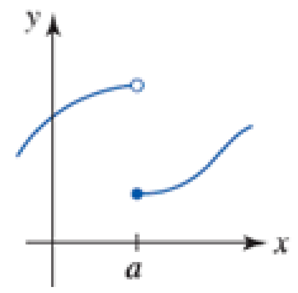
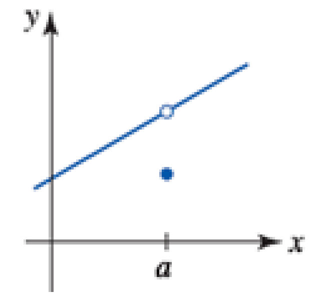
Según la definición de continuidad en un punto, una función es continua en un punto ***a*** cuando se cumple:

$$\begin{cases} a) \ \exists f(a) \\ b) \ \exists \lim_{x \to a} f(x) \\ c) \ \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Si en algún punto no se verifican los tres puntos anteriores, decimos que en dicho punto la función no es continua.

8.6.4.1.- Discontinuidades de una función

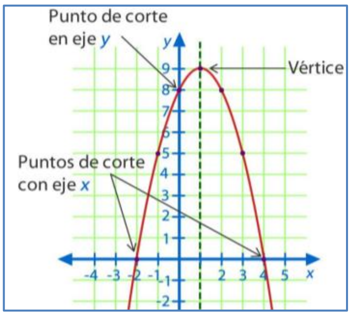
En la tabla siguiente se resumen los 4 tipos de discontinuidades:

Tipos de Discontinuidades			
No existe f(a)	*No existe* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$		No coinciden el límite y el valor de la función en $x=a$
~~a) $\exists f(a)$~~ b) $\exists \lim\limits_{x->a} f(x)$ c) $\lim\limits_{x->a^+} f(x) = \lim\limits_{x->a^-} f(x) = f(a)$	a) $\exists f(a)$ ~~b) $\exists \lim\limits_{x->a} f(x)$~~ c) $\lim\limits_{x->a^+} f(x) = \lim\limits_{x->a^-} f(x) = f(a)$		a) $\exists f(a)$ b) $\exists \lim\limits_{x->a} f(x)$ ~~c) $\lim\limits_{x->a^+} f(x) = \lim\limits_{x->a^-} f(x) = f(a)$~~
			
Evitable	Asintótica (De salto infinito)	De Salto finito	Evitable

8.6.5.- Puntos de Corte con los ejes

- ✓ **Con el eje X:** Para calcular los puntos de corte de la función con el eje x, igualamos la función acero $f(x)=0$ y calculamos las soluciones de dicha ecuación. Los valores obtenidos son los puntos de corte con el eje x.

- ✓ **Con el eje Y:** Para calcular los puntos de corte con el eje Y, calculamos $f(0)$, y el punto de corte es el punto $(0, f(0))$.



8.6.6.- Asíntotas y ramas infinitas

Muchas veces a la hora de representar una función conviene saber qué pasa con la función cuando toma valores infinitamente grandes o cuando se acerca a puntos que no pertenecen al dominio.

8.6.6.1.- Asíntota Vertical

La recta x=a es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si existe alguno de estos límites:

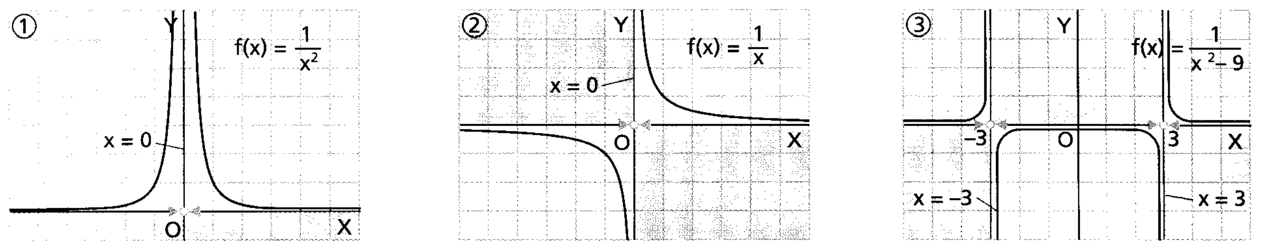
$$1.-\lim_{x->a} f(x) = \pm\infty \qquad 2.-\lim_{x->a^+} f(x) = \pm\infty \qquad 3.-\lim_{x->a^-} f(x) = \pm\infty$$

¿Cómo saber dónde buscar la asíntota vertical?

- Si es una función **polinómica**, **no tiene** asíntotas de ningún tipo.

Si es una función **RACIONAL**, tendremos que buscar en las raíces del denominador, o lo que es lo mismo, **donde se anula el denominador**. Esos son los candidatos; después hay que comprobar que efectivamente lo son.

Tipos de asíntotas verticales



- Otra función que tiene asíntota vertical es la **función LOGARÍTMICA**, más concretamente, en los **puntos extremos** de los intervalos donde empieza el **dominio**.

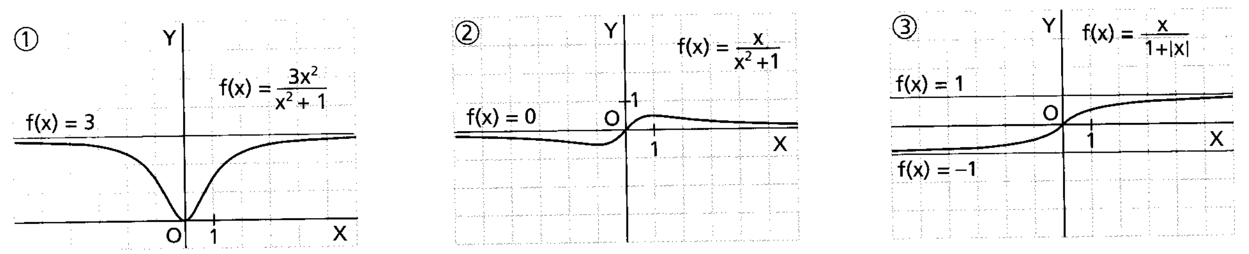
8.5.6.1.- Asíntota Horizontal

La recta y=k es una ***asíntota horizontal*** de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$1.-\lim_{x->+\infty} f(x)=k \qquad\qquad 2.-\lim_{x->-\infty} f(x)=k'$$

Una función tiene como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a cada uno de los límites en el infinito.

Tipos de asíntotas horizontales

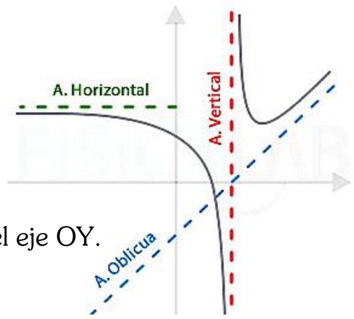


Una **función** puede tener como **máximo dos asíntotas horizontales**, correspondientes a cada uno de los límites en $+\infty$ y en $-\infty$: tendríamos una asíntota hacia la izquierda y otra hacia la derecha, aunque **frecuentemente la misma recta** es asíntota por la izquierda y por la derecha.

- En **funciones racionales**, si hay asíntota para $x \to +\infty$, **la misma** recta es asíntota para $x \to -\infty$
- Sin embargo, en **funciones** con **radicales** suelen ser **distintas**.

La gráfica de una función puede cortar a la asíntota horizontal en uno o varios puntos, aunque en la mayoría de las funciones elementales la gráfica está por encima o por debajo de la asíntota.

8.6.6.3.- Asíntota Oblicuas y ramas parabólicas



Se estudian solo si: $\lim_{x->\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, es decir si no hay asíntota horizontal.

Lo primero es estudiar el límite: $\lim_{x->\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

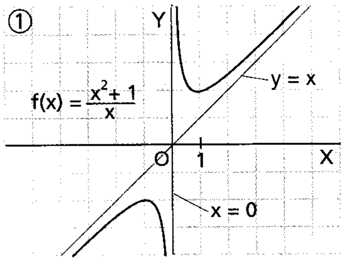
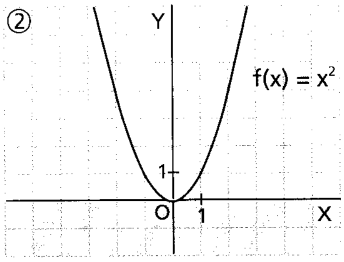
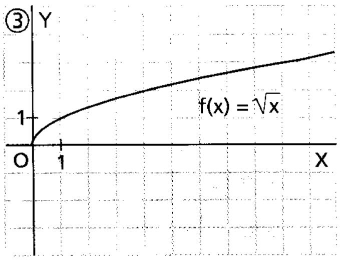
- Si $\lim_{x->\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ la curva tiene una ***rama parabólica*** en la dirección del eje OY.

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ la curva tiene una ***rama hiperbólica*** en la dirección OX. (de la forma $y = \sqrt{x}$)

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, estudiamos el límite: $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$

  ✓ Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = b$, la curva tiene la asíntota en la dirección $y=mx+b$ llamada ***asíntota oblicua.***

  ✓ Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \infty$, la curva tiene una ***rama parabólica*** en la dirección de la recta y=mx

Asíntota vertical x=0 **Asíntota Oblicua y=x**	**Rama Parabólica**	**Rama Hiperbólica**
		

<u>Debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:</u>

- Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas correspondientes a cada uno de los límites.
- Las asíntotas horizontales y las oblicuas son mutuamente excluyentes.
- La gráfica de una función puede cortar a la asíntota oblicua en uno o varios puntos.
- La situación de la gráfica respecto de la asíntota oblicua se hace estudiando el signo de $f(x) - (mx + n)$ para valores grandes de x.

8.6.7.- Monotonía

En este punto, estudiaremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos y absolutos. Para ello nos ayudaremos de la derivada, que igualaremos a cero para obtener los posibles extremos.

En una tabla, en la que representaremos la recta real, indicaremos con una línea sencilla los puntos de derivada nula, y con dos rayas los puntos de no dominio.

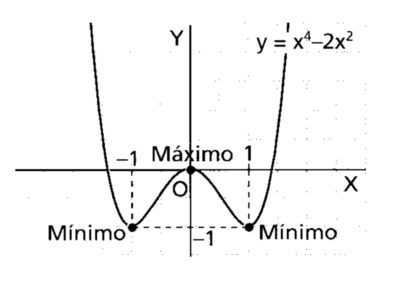
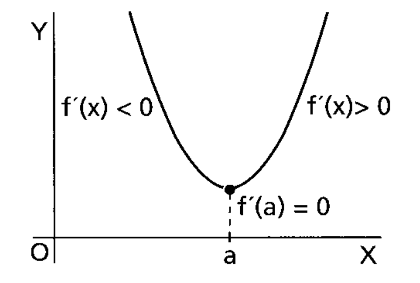
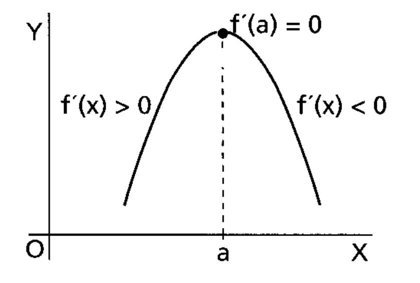
Por tanto, si utilizamos la tabla, tenemos:

x	(-∞,0)	(0,1)	(1,+∞)
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	↘	↗	↗

Mín (0,1)

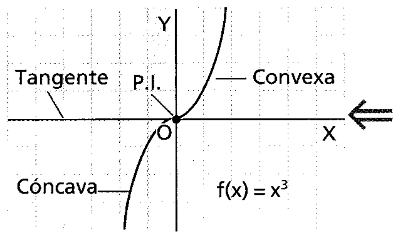
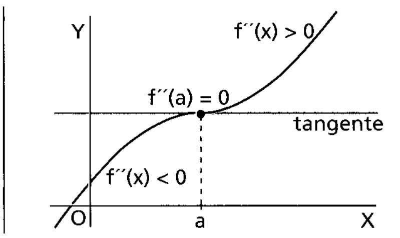
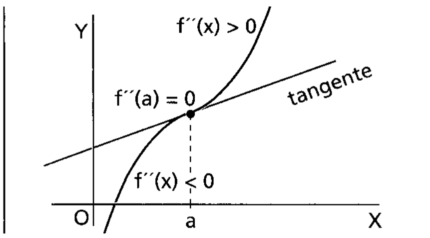
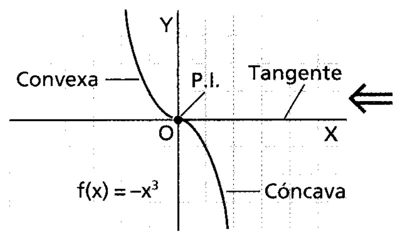
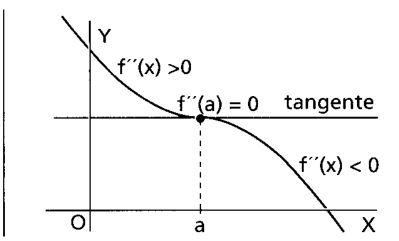
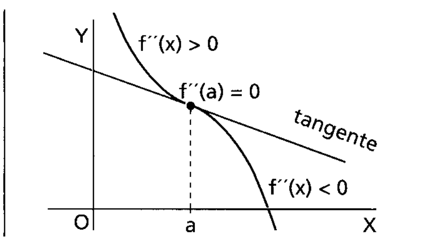
- Utilizando el signo de la derivada en cada uno de los intervalos formados, veremos si la función es creciente o decreciente y lo señalaremos con una flechita (↘ , ↗). Además, indicaremos dónde están los extremos relativos, que calcularemos.

Véase el ejemplo del final.

Extremos relativos de una función: *f’’(a)=0*		
Ejemplos:	Mínimo: *f’’(a)>0*	Máximo: *f’(a)<0*
		

8.6.8.- Curvatura

Para la curvatura, nos ayudaremos de la segunda derivada. Calculamos *f”(x)* y la igualamos a cero, de forma que estos puntos serán los posibles puntos de inflexión.

Punto de inflexión: *f’’(a)=0*		
Ejemplos:	Tangente horizontal: *f’(a)=0*	Tangente oblicua: *f’(a)≠0*
Punto Cóncavo – Convexo: *f ”(a)>0*		
		
Punto Convexo - cóncavo: *f ”(a)<0*		
		

8.6.9.- Dibujo de la gráfica

Atendiendo a todos los datos obtenidos una vez seguidos los 8 pasos anteriores, ya estamos en paraje de poder representar la función.

Veamos todo esto con un ejemplo.

8.7.- Ejemplo

Representar la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

1.- Dominio

La función es un cociente de polinomios, por tanto, su dominio es el conjunto de los números reales, menos los valores que anulen el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

2.- Simetrías

Calculamos *f(-x)* y vemos que ocurre:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$$

Por tanto, la función es impar, es simétrica respecto del origen de coordenadas.

3.- Periodicidad

La función $f(x)$ no es periódica ya que no aparecen funciones circulares.

4.- Continuidad

Como $f(x)$ es un cociente de polinomios, es una función continua excepto en los puntos donde se anule el denominador.

Calculamos los límites en los puntos de no dominio para ver el comportamiento de la gráfica:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x->-2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{-8}{0^-} + \infty \\ \lim\limits_{x->-2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{-8}{0^+} - \infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x->2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{8}{0^+} + \infty \\ \lim\limits_{x->2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{8}{0^-} - \infty \end{cases}$$

La función $f(x)$ presenta en *x=2* y en *x=-2* dos discontinuidades asintóticas o de salto infinito.

5.- Puntos de cortes con los ejes

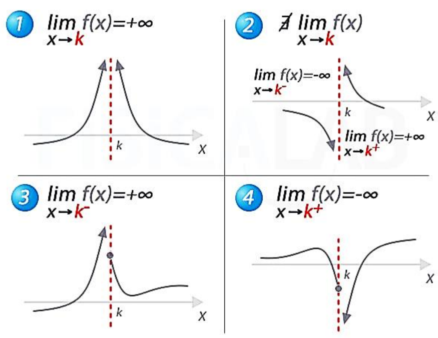
- ✓ Con el eje x: Igualamos a cero: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^3}{x^2-4} = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$
- ✓ Con el eje y: calculamos $f(0) = 0$

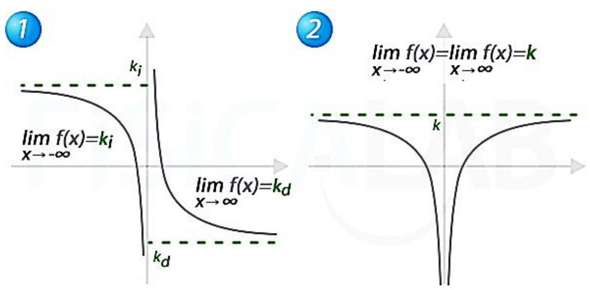
Por tanto, el punto de corte con el eje X y con el eje Y es el (0,0)

6.- Asíntotas

Como hemos visto ya en el punto 4, ***f(x) presenta en x=2 y en x=-2 dos asíntotas verticales.***

Como $\lim\limits_{x->+\infty} f(x) = \infty$ *y* $\lim\limits_{x->-\infty} f(x) = -\infty$, no presenta asíntotas horizontales, pero si puede presentar alguna asíntota oblicua o rama parabólica.





- Calculamos $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=1$

- Y ahora calculamos $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2-4}-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}\right]=0$

Por tanto $f(x)$ presenta una ***asíntota oblicua en y=x.***

7.- Monotonía y curvatura

Para ello, lo primero es calcular la derivada de *f(x)*.

$f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}$ y la igualamos a cero para calcular los extremos relativos:

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \Rightarrow x^2(x^2-12)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{12} \\ x=-\sqrt{12} \end{cases}$$

Estudiamos ahora el signo de $f'(x)$ para ver los intervalos de monotonía.

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, los puntos que hacen la función cero, y los puntos donde no es continua.

x	(-∞,- $\sqrt{12}$)	(- $\sqrt{12}$,-2)	(-2,0)	(0,2)	(2, $\sqrt{12}$)	($\sqrt{12}$,+∞)
f'(x)	+	-	-	-	-	+
f(x)	↗	↘	↘	↘	↘	↗

Mín (-2,1) **Punto de Inflexión** **Máx (-2,1)**

- ✓ $f(x)$ es creciente en el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{12}\right)\cup\left(\sqrt{12},+\infty\right)$
- ✓ $f(x)$ es decreciente en el intervalo $\left(-\sqrt{12},-2\right)\cup\left(-2,2\right)\cup\left(+\sqrt{12},+\infty\right)$
- ✓ $f(x)$ tiene un ***máximo*** en $x=-\sqrt{12}$ $f(-\sqrt{12})=-3\sqrt{3}$ en el punto $\left(-\sqrt{12},-3\sqrt{3}\right)$
- ✓ $f(x)$ tiene un ***mínimo*** en $x=\sqrt{12}$ $f(\sqrt{12})=3\sqrt{3}$ en el punto $\left(\sqrt{12},3\sqrt{3}\right)$

Vamos a calcular ahora los **puntos de inflexión**, donde la curva cambia de cóncava a convexa. Para ello trabajamos con la segunda derivada. $f''(x)$

$$f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{\left(x^2-4\right)^3} \text{ y la igualamos a cero } f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{\left(x^2-4\right)^3}=0 \Rightarrow 8x(x^2+12)=0 \Rightarrow \{x=0$$

	X=0	
f''(x)<0		**f''(x)>0**
∩		∪

Obtenemos 1 punto, vamos a ver dónde la función cambia de convexa a cóncava. Tenemos ***un punto de inflexión en el punto (0,0)***

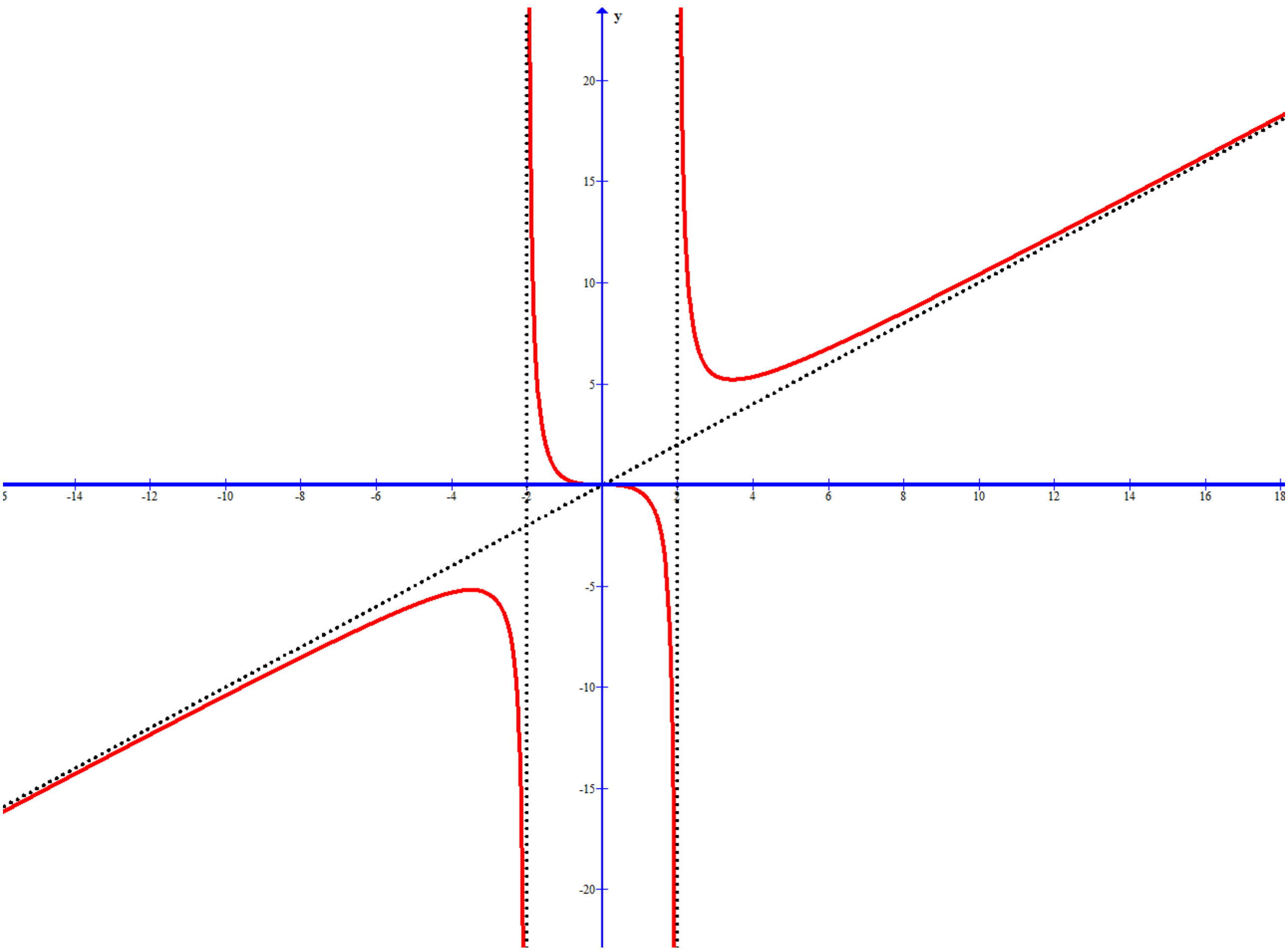
8.- Gráfica de la función

Con todos los datos que ya tenemos de *f(x),* lo único que nos falta es representarla.

1. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$
2. *f* es simétrica respecto del origen O.
3. *f no es periódica*
4. f es continua en $\mathbb{R} - \{2, -2\}$ y en *x=2* y en *x=-2* presenta dos discontinuidades de salto infinito.
5. El punto de corte con el eje X y con el eje Y es el (0,0)
6. Asíntotas verticales en *x=-2* y *x=2*; y asíntota oblicua en *y=x*
7. Monotonía y curvatura:

x	$(-\infty,-\sqrt{12})$	$(-\sqrt{12},-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\sqrt{12})$	$(\sqrt{12},+\infty)$
f'(x)	+	-	-	-	-	+
f(x)	↗	↘	↘	↘	↘	↗

Mín (-2,1) **Punto de Inflexión** **Máx (-2,1)**



4.3.- Ejercicios resueltos

1.- *Estudiar las asíntotas de la función* $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$

Asíntotas Verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$$ La función presenta una ***Asíntota Vertical*** en el punto x=2

Asíntota Horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-3}{x-2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-3}{x-2}=-\infty\end{array}\right\}$$ La función no presenta Asíntota Horizontal

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3}{x-2}=+\infty$, calculamos el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3}{x^2-2x}=1$ ➔ m=1 ➔ Ya sabemos que la función tiene una asíntota oblicua en la dirección de la recta y=mx+b. Vamos a calcular b haciendo el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)=2$$

Por tanto la función presenta una ***Asíntota Oblicua*** en la dirección de la recta $y=x+2$

2.- *De la función* $f(x)=x+\dfrac{4}{(x-1)^2}$ *se pide:*

a) Dominio de Definición y asíntotas.
b) Máximos y mínimos relativos en intervalos de crecimiento y decrecimiento
c) Representación Gráfica.

Dominio: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntotas Verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}x+\dfrac{4}{(x-1)^2}=1+\dfrac{4}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}x+\dfrac{4}{(x-1)^2}=1+\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$$ La función presenta una ***Asíntota Vertical*** en el punto x=1

Asíntota Horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}x+\dfrac{4}{x-2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}x+\dfrac{4}{x-2}=-\infty\end{array}\right\}$$ La función no presenta Asíntota Horizontal

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\lim_{x\to\pm\infty} x+\frac{4}{x-2}=+\infty$, calculamos el límite $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}1+\frac{4}{x(x-1)^2}=1$ ➔ m=1 ➔ Ya sabemos que la función tiene una asíntota oblicua en la dirección de la recta y=mx+b.

Vamos a calcular b haciendo el límite $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{4}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-4}{(x-1)^2}\right)=0$$

Por tanto la función presenta una ***Asíntota Oblicua*** en la dirección de la recta $y=x$

Máximos y mínimos:

Para calcular los máximos y mínimos necesitamos la derivada.

Calculamos la derivada:

$$f'(x)=1-\frac{8(x-1)}{(x-1)^4}=1-\frac{8}{(x-1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los posibles extremos relativos:

$$f'(x)=1-\frac{8}{(x-1)^3}=0\Leftrightarrow 1=\frac{8}{(x-1)^3}\Leftrightarrow (x-1)^3=2^3\Leftrightarrow x-1=2\Leftrightarrow x=3$$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)		+		-	0	+	
f(x)		↗	Asíntota Vertical	↘	Mínimo Relativo	↗	
		$+\infty$		$+\infty$	(3,4)		

Intervalos de Crecimiento:

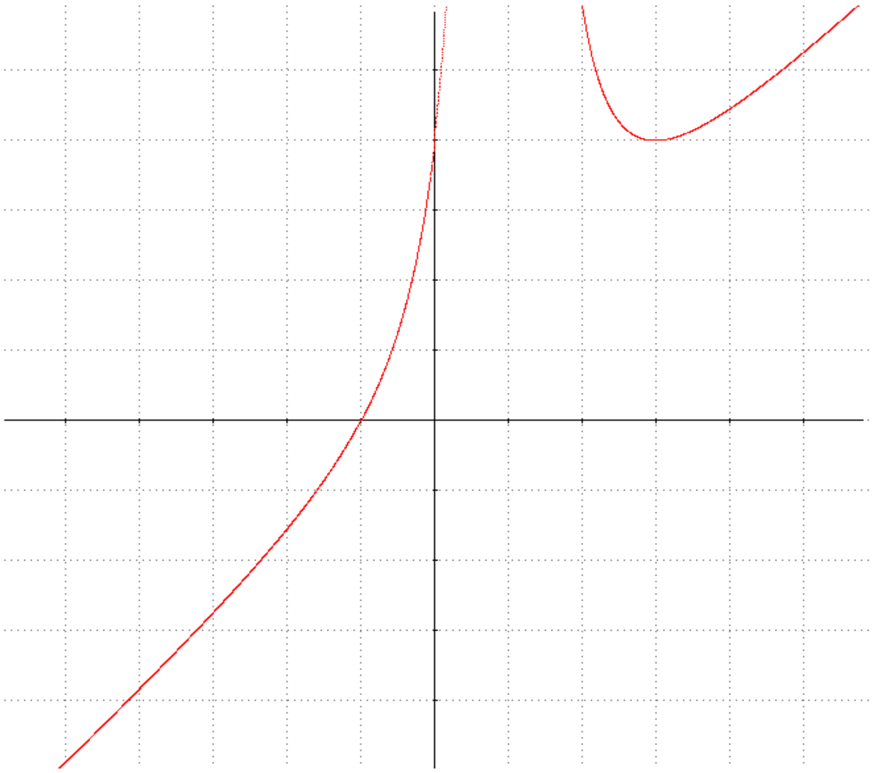
$]-\infty,1[\cup[3,+\infty[$

Intervalos de Decrecimiento:

$]1,3]$

Máximos y mínimos:

Mínimo relativo en (3,4)



3.- *Estudia y representa gráficamente la siguiente función:* $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

1.- Dominio: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

2.- Simetrías:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$$

Por tanto, la función es impar ➔ simétrica respecto al origen de coordenadas.

3.- Periodicidad: La función no es periódica por no tener funciones circulares.

4.- Continuidad: La función es continua en todos los puntos de su dominio, mientras que en los puntos x=-1 y x=1 presenta discontinuidades de segunda especie **(Asintóticas).**

5.- Puntos de corte con los ejes:

Eje x: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Eje y: $f(0)=0$ Corta a los ejes en el (0,0)

6.- Asíntotas:

Asíntotas Verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty\end{array}\right\}$$ La función presenta una ***Asíntota Vertical*** en el punto x=-1

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}$$ La función presenta una ***Asíntota Vertical*** en el punto x=1

Asíntota Horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}$$ La función no presenta Asíntota Horizontal

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\left.\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty\right\}$, calculamos el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1$ ➔ m=1 ➔ Ya sabemos que la función tiene una asíntota oblicua en la dirección de la recta *y=mx+b.*

Vamos a calcular b haciendo el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-x^3-x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x}{x^2-1}\right)=0$$

Por tanto, la función presenta una ***Asíntota Oblicua*** en la dirección de la recta $y=x$

7.- Máximos y mínimos:

Para calcular los máximos y mínimos necesitamos la derivada.
Calculamos la derivada:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-2x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los posibles extremos relativos:

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0\Leftrightarrow x^2(x^2-3)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	No Definida	-	0	-	No Definida	-	0	+	
f(x)		↗	Máximo Relativo	↘	Asíntota Vertical	↘		↘	Asíntota Vertical	↘	Mínimo Relativo	↗	
			$\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$	$-\infty$		$+\infty$	(0,0)	$-\infty$			$\left(\sqrt{3},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$		

Intervalos de Crecimiento: $]-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty[$

Intervalos de Decrecimiento: $[-\sqrt{3},-1[\cup]-1,1[\cup]1,\sqrt{3}]$

Máximo relativo en $-\left(\sqrt{3},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ y mínimo relativo en $\left(\sqrt{3},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

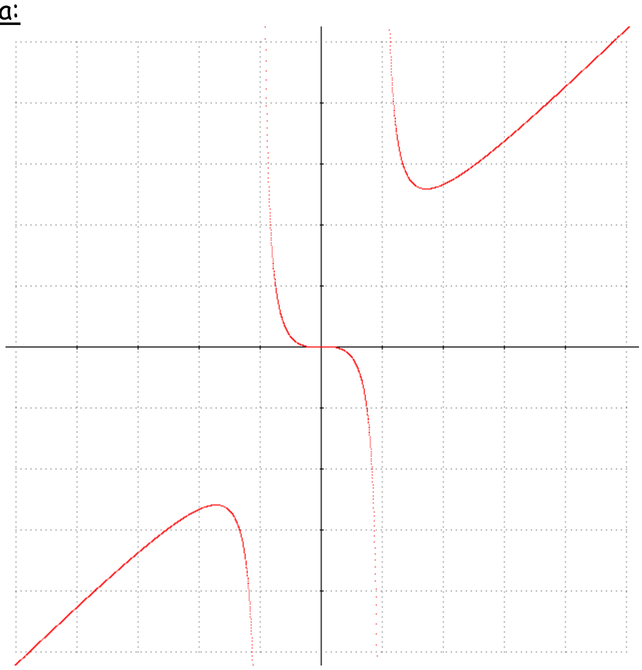
8.- Concavidad y convexidad. Puntos de Inflexión:

Para ello necesitamos la segunda derivada: $f'(x)=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$; $f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0\Leftrightarrow x=0$

Por tanto, en (0,0) tenemos un punto de inflexión:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f''(x)		-	No Definida	+	0	-	No Definida	+	
f(x)		$\cap$	Asíntota Vertical	$\cup$	Punto de Inflexión	$\cap$	Asíntota Vertical	$\cup$	
					(0,0)				

9.- Representación Gráfica:



4.- *Sea la función definida por* $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

a) Estudiar las asíntotas, las zonas de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las zonas de concavidad y convexidad.

b) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, realiza un esbozo de la gráfica de f.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$, por tanto, no tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0\end{array}\right\}$$ La función presenta una asíntota horizontal en y=0.

No presenta asíntotas oblicuas ya que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\neq\pm\infty$

Estudiemos su derivada:

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ ;\ f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm1$$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘	Min Absoluto	↗	Max Absoluto	↘	
	0		-1/2		1/2		0

Intervalos de Crecimiento: $[-1,1]$

Intervalos de Decrecimiento: $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

Máximo Absoluto en $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ y mínimo absoluto en $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

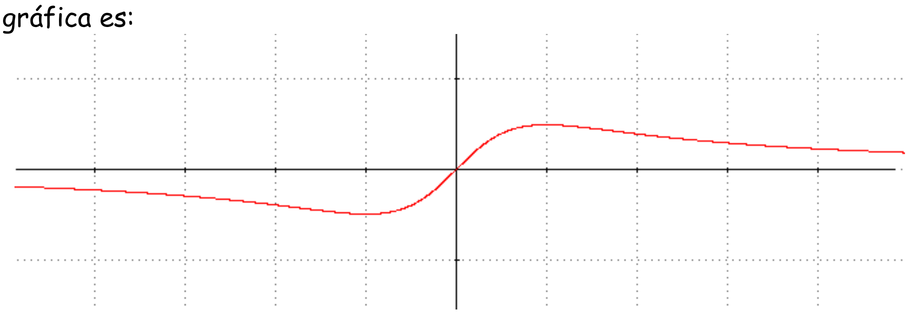
Para los intervalos de concavidad y convexidad utilizaremos la segunda derivada: $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)\cdot 2x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x=0 \quad y \quad x=\pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
f''(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)		$\cap$	Punto de Inflexión	$\cup$	Punto de Inflexión	$\cap$	Punto de Inflexión	$\cup$	
			$\left(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{4}\right)$		(0,0)		$\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$		

El dibujo de la gráfica es:



***5.-** Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, se pide*
a) Dominio y asíntotas. Puntos de corte de la gráfica con las asíntotas, si las hay.
b) Crecimiento y decrecimiento.
c) Dibujar la gráfica a partir de los resultados anteriores.

Dominio de f: $\mathbb{R}^*$.

Asíntotas Verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{+\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1}=1\end{array}\right\}\text{ La función no tiene asíntota vertical}$$

Asíntota Horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$ La función presenta ***Asíntota Horizontal*** en y = 1/2

La función no presenta asíntotas oblicuas.

Calculamos la derivada para estudiar los distintos intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}>0$$

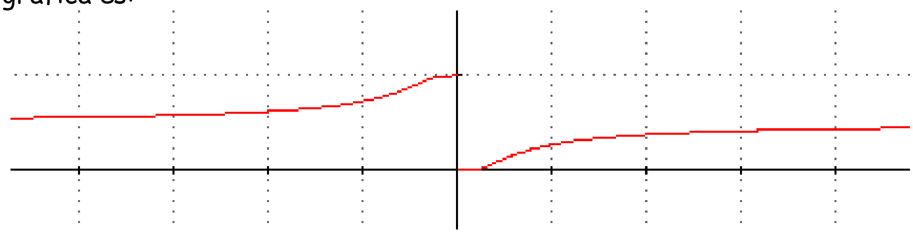
Por tanto la función es siempre creciente, Creciente en $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	No definida	+	
f(x)		↗	No definida	↗	
	1/2				1/2

La función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

El dibujo de la gráfica es:



***6.-** Dada la función $f(x)=x\ln x-1$, x>0, se pide:*
a) Explicar de forma razonada por qué la ecuación $x\ln x-1=0$ tiene exactamente una raíz.
b) Representar gráficamente la curva de la función f.

Vamos a estudiar la función. Dominio $]0,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0^+} x\ln x-1=\lim_{x\to0^+} x\ln x-\lim_{x\to0^+}1=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to0^+}1\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0^+}-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}-\lim_{x\to0^+}1=\lim_{x\to0^+}-\frac{x^2}{x}-\lim_{x\to0^+}1=-1\\ \lim_{x\to+\infty} x\ln x-1=+\infty\end{array}\right\}$$

Calculamos su derivada: $f'(x)=\ln x+1$; igualamos a cero: $f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

Creamos una tabla:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'(x)	No Definida	-	0	+	
f(x)	No Definida	↘	Min Absoluto	↗	
	-1		$-\left(\frac{e+1}{e}\right)$		$+\infty$

<u>Intervalos de Crecimiento:</u> $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$

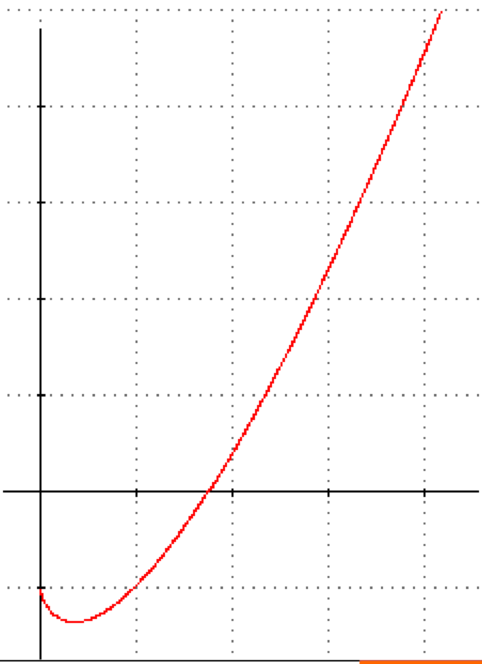
<u>Intervalos de Decrecimiento:</u> $\left]0,\frac{1}{e}\right]$

Mínimo absoluto en $\left(\frac{1}{e},-\frac{e+1}{e}\right)$

A la pregunta de explicar de forma razonada por qué la ecuación xlnx-1=0 tiene exactamente una raíz diremos que:

La función f es una función definida en X>0, vemos que la función empieza en -1, y es decreciente hasta $\frac{1}{e}$, en el que hay un mínimo absoluto, y a partir de este punto pasa a ser creciente hasta $+\infty$. Por tanto, tenemos una función que al principio es negativa, cambia de signo a positiva, que es continua, y que diverge a $+\infty$, entonces corta al eje x una vez sola vez, y la ecuación solo tiene una solución.

Si dibujamos la gráfica:



7.- *Sea la función f definida por* $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$

a) *Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f.*
b) *Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.*

a) El dominio de la función es $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$, por tanto, vamos a empezar estudiando las asíntotas verticales:

La función f, presenta una asíntota vertical en un punto x_o, si ocurre: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty$

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=\pm\infty\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{e^{-1}}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{e^{-1}}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

Por tanto, f tiene una **Asíntota Vertical en x=1.**

Estudiamos ahora la asíntota horizontal: Una función presenta una asíntota horizontal en y=k, si ocurre: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=k \quad \forall k\in\mathbb{R}$

Por tanto: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{0}{-\infty}=0 \quad\rightarrow$ **Asíntota Horizontal y=0 cuando** $x\to+\infty$

y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{-1}=+\infty$

Estudiamos en este caso: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

y obtenemos: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x(1-x)}=\dfrac{+\infty}{+\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{1-2x}=\dfrac{\infty}{\infty}\overset{L'Hopital}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{-2}=+\infty$

Por tanto, la función presenta **una rama parabólica cuando** $x\to-\infty$

b) Para la monotonía, utilizamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$f'(x)=\frac{x\cdot e^{-x}}{(1-x)^2}\quad\rightarrow\quad f'(x)=0\quad\leftrightarrow\quad x\cdot e^{-x}=0\quad\leftrightarrow\quad x=0$$

Por tanto, si utilizamos la tabla, tenemos:

x	(-∞,0)	(0,1)	(1,+∞)
f'(x)	-	+	+
f(x)	↘	↗	↗

Mín (0,1)

Así que:

- f es creciente en: $(0,1)\cup(1,+\infty)$
- f es decreciente en $(-\infty,0)$
- la función presenta un mínimo en el punto (0,1)