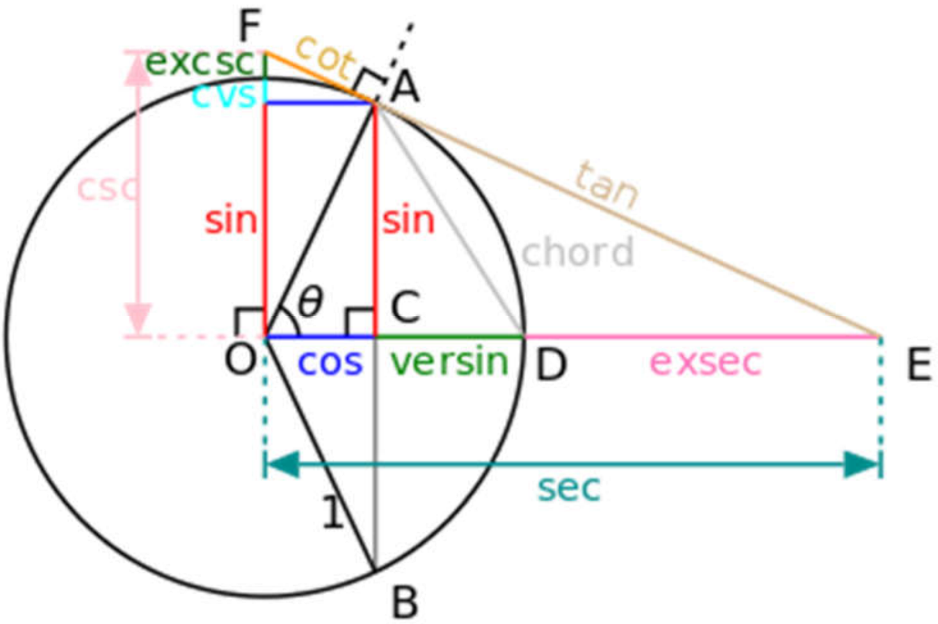
# Tema 3: Identidades Trigonométricas. Resolución de un triángulo cualquiera.



## 3.0.- Introducción

La Trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Los babilonios y los egipcios (hace más de 3000 años) fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para efectuar medidas en agricultura y para la construcción de pirámides. También se desarrolló a partir de los primeros esfuerzos hechos para avanzar en el estudio de la astronomía mediante la predicción de las rutas y posiciones de los cuerpos celestes y para mejorar la exactitud en la navegación y en el cálculo del tiempo y los calendarios.

El estudio de la trigonometría pasó después a Grecia, en donde se destaca el matemático y astrónomo Griego Hiparco, por haber sido uno de los principales desarrolladores de la Trigonometría. Las tablas de "cuerdas" que construyo fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas de la actualidad.

Desde Grecia, la trigonometría pasó a la India y Arabia donde era utilizada en la Astronomía. Y desde Arabia se difundió por Europa, donde finalmente se separa de la Astronomía para convertirse en una rama independiente que hace parte de la matemática.

Es así, como en este trabajo, se expondrá la historia y desarrollo de la trigonometría y de acuerdo a esto, fechas, épocas y principales precursores o personajes que lideraron el proceso o dieron los pasos fundamentales para el posterior desarrollo de esta importante rama de las matemáticas. Junto con esto, una biografía de cada uno de los exponentes y una línea del tiempo con personajes y descubrimientos para una mayor comprensión.

En el libro *"Sintaxis matemática"* escrito por **Ptolomeo de Alejandría**, (100-170) aproximadamente en el año 150, y que en occidente fue conjocido como **Almagesto** (el más grande), se incluía el **Teorema de Ptolomeo**.

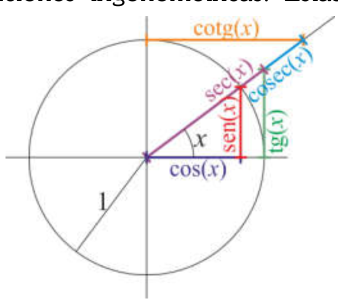
En el siglo XV, el matemático **Johann Müller Regiomontano** (1436-1476) escribió su obra *"De triangulis omnimodis libri quinque"*, en la que se presenta la trigonometría plana y esférica como una disciplina matemática independiente de la astronomía, y en la que su autor, hace una trigonometría basada en senos y cosenos no en cuerdas como se había hecho hasta el momento.

En esta obra, se encuentran fórmulas como las que se van a estudiar en este capítulo que transforman porductos de senos y cosenos en sumas de senos y cosenos. Es éste, el mismo principio que con posterioridad se aplicó en el cálculo logarítmico.

**Georg Joachim Rheticus**, (1514-1574) profesor de matemáticas en Wittemberg, alumno y amigo de Nicolás Copérnico, hizo en 1551 una tabla de las funciones trigonométricas con 7 cifras y ángulos de 10" en 10". En esta obra se utilizan por primera vez los lados de un triángulo rectángulo para definir las razones trigonométricas.

## 3.1.- Identidades trigonométricas

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que involucran funciones trigonométricas. Estas identidades son siempre útiles para cuando necesitamos simplificar expresiones que tienen incluidas funciones trigonométricas, cualesquiera que sean los valores que se asignen a los ángulos para los cuales están definidas estas razones. Las identidades trigonométricas nos permiten plantear una misma expresión de diferentes formas. Para simplificar expresiones algebraicas, usamos la factorización, denominadores comunes, etc. Pero para simplificar expresiones trigonométricas utilizaremos estas técnicas en conjunto con las identidades trigonométricas.




En el capítulo anterior, hemos visto las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, además de las razones inversas, secante, cosecante y cotangente y las relaciones pitagóricas entre ellas que dan lugar a la ecuación fundamental de la trigonometría:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Y las dos identidades que de ella se derivan, ya sea dividiendo por el seno cuadrado o por el coseno cuadrado:

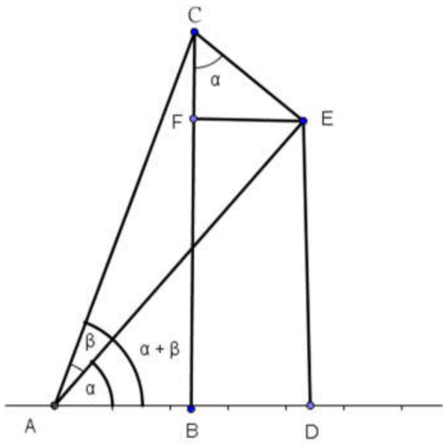
$$1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha \qquad\qquad 1+\cot^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$$

En la tabla siguiente recogemos la relación entre las distintas razones trigonométricas:

| | $\sin(\theta)$ | $\cos(\theta)$ | $\tan(\theta)$ | $\csc(\theta)$ | $\sec(\theta)$ | $\cot(\theta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(\theta)=$ | $\sin(\theta)$ | $\pm\sqrt{1-\cos^2(\theta)}$ | $\dfrac{\pm\tan(\theta)}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$ | $\dfrac{1}{\csc(\theta)}$ | $\pm\dfrac{\sqrt{\sec^2(\theta)-1}}{\sec(\theta)}$ | $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+\cot^2(\theta)}}$ |
| $\cos(\theta)=$ | $\pm\sqrt{1-\sin^2(\theta)}$ | $\cos(\theta)$ | $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$ | $\pm\dfrac{\sqrt{\csc^2(\theta)-1}}{\csc(\theta)}$ | $\dfrac{1}{\sec(\theta)}$ | $\dfrac{\pm\cot(\theta)}{\sqrt{1+\cot^2(\theta)}}$ |
| $\tan(\theta)=$ | $\dfrac{\pm\sin(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}$ | $\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}{\cos(\theta)}$ | $\tan(\theta)$ | $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{\csc^2(\theta)-1}}$ | $\pm\sqrt{\sec^2(\theta)-1}$ | $\dfrac{1}{\cot(\theta)}$ |
| $\csc(\theta)=$ | $\dfrac{1}{\sin(\theta)}$ | $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}$ | $\pm\dfrac{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}{\tan(\theta)}$ | $\csc(\theta)$ | $\dfrac{\pm\sec(\theta)}{\sqrt{\sec^2(\theta)-1}}$ | $\pm\sqrt{1+\cot^2(\theta)}$ |
| $\sec(\theta)=$ | $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}$ | $\dfrac{1}{\cos(\theta)}$ | $\pm\sqrt{1+\tan^2(\theta)}$ | $\dfrac{\pm\csc(\theta)}{\sqrt{\csc^2(\theta)-1}}$ | $\sec(\theta)$ | $\pm\dfrac{\sqrt{1+\cot^2(\theta)}}{\cot(\theta)}$ |
| $\cot(\theta)=$ | $\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}{\sin(\theta)}$ | $\dfrac{\pm\cos(\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}$ | $\dfrac{1}{\tan(\theta)}$ | $\pm\sqrt{\csc^2(\theta)-1}$ | $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{\sec^2(\theta)-1}}$ | $\cot(\theta)$ |

### *3.1.1.- Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.*

Para deducir las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos, nos ayudaremos de la siguiente construcción en la que los ángulos ADE, ABC y EFC son rectángulos, y además los triángulos ADE y EFC son semejantes (tienen los mismos ángulos) por tener sus lados perpendiculares.




#### *3.1.1.1.- Seno de la suma de ángulos*

En la figura, el seno de α + β lo calcularemos de la siguiente forma:

$$sen(\alpha+\beta)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BF}+\overline{FC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}+\overline{FC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{FC}}{\overline{AC}} \qquad \text{(Ec. 1)}$$

Teniendo en cuenta que en el triángulo ADE,

$$sen\alpha=\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \quad\Rightarrow\quad \overline{DE}=\overline{AE}\cdot sen\alpha$$

Y que en el triángulo CFE,

$$\cos\alpha=\frac{\overline{FC}}{\overline{CE}} \quad\Rightarrow\quad \overline{FC}=\overline{CE}\cdot\cos\alpha$$

Si sustituimos en la expresión (Ec.1), tenemos:

$$sen(\alpha+\beta)=\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{FC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AE}\cdot sen\alpha}{\overline{AC}}+\frac{\overline{CE}\cdot\cos\alpha}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\cdot sen\alpha+\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\cdot\cos\alpha \qquad \text{(Ec. 2)}$$

Si nos fijamos en el ángulo β, tenemos:

$$sen\beta = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \qquad y \qquad \cos\beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Y si sustituimos esto en la ecuación (Ec. 2), nos queda:

$$sen(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \cdot sen\alpha + \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \cdot \cos\alpha = \cos\beta \cdot sen\alpha + sen\beta \cdot \cos\alpha$$

Por tanto, el seno de la suma de dos ángulos lo calcularemos:

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = \cos\beta \cdot sen\alpha + sen\beta \cdot \cos\alpha}$$

EJEMPLO

Calcula: $sen(45^\circ+30^\circ)$

$sen(45^\circ+30^\circ) = sen\,45 \cdot \cos 30 + \cos 45 \cdot sen\,30 =$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$

## 3.1.1.2.- Coseno de la suma de ángulos

De modo similar, y fijándonos otra vez en la construcción anterior, calcularemos el coseno de α + β:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}-\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}-\overline{FE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} \qquad \text{(Ec. 3)}$$

Teniendo en cuenta que en el triángulo ADE,

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = \overline{AE} \cdot \cos\alpha$$

Y que en el triángulo CFE,

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{FE}}{\overline{CE}} \quad \Rightarrow \quad \overline{FE} = \overline{CE} \cdot sen\,\alpha$$

Si sustituimos en la expresión (Ec. 3), tenemos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE} \cdot Cos\alpha}{\overline{AC}} - \frac{\overline{CE} \cdot sen\alpha}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \cdot \cos\alpha - \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \cdot sen\alpha \qquad \text{(Ec.4)}$$

Si nos fijamos en el ángulo β, tenemos:

$$sen\beta = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \qquad y \qquad \cos\beta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Y si sustituimos esto en la ecuación (Ec. 4), nos queda:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \cdot \cos\alpha - \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \cdot sen\alpha = \cos\beta \cdot \cos\alpha - sen\beta \cdot sen\alpha$$

Por tanto, el coseno de la suma de dos ángulos lo calcularemos mediante:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta \cdot \cos\alpha - sen\beta \cdot sen\alpha}$$

EJEMPLO

Calcula: $\cos(45^\circ+30^\circ)$

$\cos(45^\circ+30^\circ) = \cos 45 \cdot \cos 30 - sen45 \cdot sen30 =$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

## 3.1.1.3.- Tangente de la suma de ángulos

Sabiendo que la tangente de un ángulo es el cociente entre el seno y el coseno de dicho ángulo, tenemos:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\beta \cdot sen\alpha + sen\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\beta \cdot \cos\alpha - sen\beta \cdot sen\alpha}$$

Para simplificarla un poco, dividiremos numerador y denominador por $\cos\beta\cdot\cos\alpha$:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\cos\beta\cdot sen\alpha+sen\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha-sen\beta\cdot sen\alpha}=\frac{\frac{\cos\beta\cdot sen\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}+\frac{sen\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}}{\frac{\cos\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}-\frac{sen\beta\cdot sen\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}}=\frac{\frac{\cancel{\cos\beta}\cdot sen\alpha}{\cancel{\cos\beta}\cdot\cos\alpha}+\frac{sen\beta\cdot\cancel{\cos\alpha}}{\cos\beta\cdot\cancel{\cos\alpha}}}{\frac{\cos\beta\cdot\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\beta}\cdot\cos\alpha}-\frac{sen\beta\cdot sen\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}}=\frac{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\frac{sen\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{sen\beta\cdot sen\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Por tanto, la tangente de la suma de ángulos se calcula mediante:

$$\boxed{tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

## *3.1.2.- Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos.*

Las razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos se obtienen a partir de las de la suma, que ya hemos visto en el apartado anterior, pero cambiando en éstas el ángulo β, por –β. Esto implicará un cambio de signo en el seno y en la tangente, mientras que el signo del coseno permanecerá invariable.

### *3.1.2.1.- Seno de la diferencia de dos ángulos*

Si el seno de la suma es: $sen(\alpha+\beta)=\cos\beta\cdot sen\alpha+sen\beta\cdot\cos\alpha$, y cambiamos β por –β, obtenemos:

$$sen(\alpha+(-\beta))=\cos(-\beta)\cdot sen\alpha+sen(-\beta)\cdot\cos\alpha=\cos\beta\cdot sen\alpha-sen\beta\cdot\cos\alpha$$

Por tanto:

$$\boxed{sen(\alpha-\beta)=\cos\beta\cdot sen\alpha-sen\beta\cdot\cos\alpha}$$

### *3.1.2.2.- Coseno de la diferencia de dos ángulos*

Si el coseno de la suma es: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cdot\cos\alpha-sen\beta\cdot sen\alpha$, y cambiamos β por –β, obtenemos:

$$\cos(\alpha+(-\beta))=\cos(\alpha-\beta)=\cos(-\beta)\cdot\cos\alpha-sen(-\beta)\cdot sen\alpha=\cos\beta\cdot\cos\alpha+sen\beta\cdot sen\alpha$$

Por tanto:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\beta\cdot\cos\alpha+sen\beta\cdot sen\alpha}$$

### *3.1.2.3.- Tangente de la diferencia de dos ángulos*

Como la tangente se define como el cociente entre el seno y el coseno, tendremos:

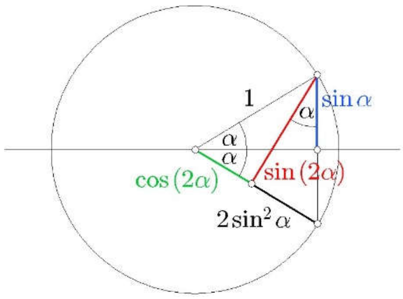
$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\beta\cdot sen\alpha-sen\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha+sen\beta\cdot sen\alpha}$$

Si hacemos como en el caso de la tangente de la suma de dos ángulos, que dividíamos numerador y denominador por $\cos\beta\cdot\cos\alpha$, tenemos:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{\cos\beta\cdot sen\alpha-sen\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha+sen\beta\cdot sen\alpha}=\frac{\frac{\cos\beta\cdot sen\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}-\frac{sen\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}}{\frac{\cos\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}+\frac{sen\beta\cdot sen\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}}=\frac{\frac{\cancel{\cos\beta}\cdot sen\alpha}{\cancel{\cos\beta}\cdot\cos\alpha}-\frac{sen\beta\cdot\cancel{\cos\alpha}}{\cos\beta\cdot\cancel{\cos\alpha}}}{\frac{\cos\beta\cdot\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\beta}\cdot\cos\alpha}+\frac{sen\beta\cdot sen\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}}=\frac{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}-\frac{sen\beta}{\cos\beta}}{1+\frac{sen\beta\cdot sen\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\alpha}}=\frac{tg\alpha\text{-}tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Por tanto, la tangente de la diferencia de ángulos se calcula mediante: $\boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}}$

### 3.1.3.- Razones trigonométricas del ángulo doble




En este caso, vamos a obtener las razones trigonométricas del ángulo doble, 2α, en función de las del ángulo α, para ello, como 2α=α+α, y de acuerdo con las fórmulas que hemos aprendido para el ángulo suma, tenemos:

#### 3.1.3.1.- Seno del ángulo doble:

$$sen(2\cdot\alpha) = sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot sen\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$$

#### 3.1.3.2.- Coseno del ángulo doble:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - sen\alpha\cdot sen\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

#### 3.1.3.3.- Tangente del ángulo doble:

$$tg(2\alpha) = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha\cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

### 3.1.4.- Razones trigonométricas del ángulo mitad

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo mitad, tendremos en cuenta que: $\alpha = 2\frac{\alpha}{2}$ , con ello, y utilizando el coseno del ángulo doble, tenemos que:

$$\cos\alpha = \cos\left(2\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Por otro lado, utilizando la ecuación fundamental de la trigonometría, tenemos:

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$$

#### 3.1.4.1.- Seno del ángulo mitad:

Si ordenamos y restamos la segunda de la primera, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 = sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right\} 1 - \cos\alpha = sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cdot sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Por tanto:

$$1 - \cos\alpha = 2\cdot sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Y de dónde despejando el sen (α/2), tenemos:

$$\boxed{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

### 3.1.4.1.- Coseno del ángulo mitad:

Mediante un proceso similar, pero en vez de restar las ecuaciones las sumamos, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 = sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\end{array}\right\} \; 1+\cos\alpha = sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Por tanto:

$$1+\cos\alpha = 2\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Y de dónde, despejando el cos(α/2), se obtiene:

$$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

### 3.1.4.3.- Tangente del ángulo mitad:

Para calcular la tangente del ángulo mitad, dividimos seno entre coseno:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Por tanto:

$$\boxed{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

Si la trabajamos un poco; llegamos a:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{sen^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$$

### 3.1.5.- Transformaciones de sumas en productos

A veces conviene expresar una suma o una diferencia en forma de producto, para esto, son útiles las siguientes fórmulas:

(1) $sen\,A + sen\,B = 2\cdot sen\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$

(2) $sen\,A - sen\,B = 2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\text{sen}\frac{A-B}{2}$

(3) $\cos A + \cos B = 2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$

(4) $\cos A - \cos B = -2\cdot\text{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\text{sen}\frac{A-B}{2}$

Vamos a deducir las dos primeras, y para ello nos basamos en otras que ya conocemos.

Si partimos de las razones trigonométricas del seno de la suma y de la diferencia:

$$sen(\alpha+\beta) = \cos\beta\cdot sen\alpha + sen\beta\cdot\cos\alpha$$
$$sen(\alpha-\beta) = \cos\beta\cdot sen\alpha - sen\beta\cdot\cos\alpha$$

Y sumamos y restamos ambas ecuaciones, obtenemos:

a) Sumando: $sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2sen\alpha\cdot\cos\beta$

b) Restando: $sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot sen\,\beta$

Si llamamos $A=\alpha+\beta$ y $B=\alpha-\beta$, y resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l} A=\alpha+\beta \\ B=\alpha-\beta \end{array}\right\}$, obtenemos:

$$\alpha=\frac{A+B}{2} \qquad y \qquad \beta=\frac{A-B}{2}$$

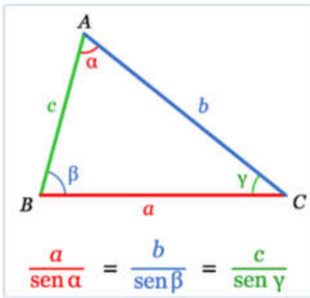
Con lo que sustituyendo en (a) y (b) nos da el resultado:

$$sen\,A+sen\,B=2\cdot sen\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2} \qquad\qquad sen\,A-sen\,B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2}$$

Como Actividad encuentra las identidades (3) y (4)

## 3.2.- Teorema del seno

*En un triángulo cualquiera, de lados a, b, c y de ángulos A, B, C, se cumple que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

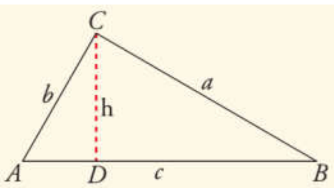



Matemáticamente:

$$\boxed{\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C}}$$

*Demostración:*

Para demostrar la primera de las igualdades, y fijándonos en el triángulo de la figura, se traza la altura h sobre el lado *c*, con lo que se obtienen dos triángulos rectángulos *ADC* y *CDB*.

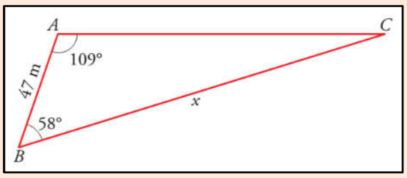



$$\left.\begin{array}{l} En\ ADC: sen\,A=\dfrac{h}{b}\rightarrow h=b\cdot sen\,A \\ En\ CBD: sen\,B=\dfrac{h}{a}\rightarrow h=a\cdot sen\,B \end{array}\right\} b\cdot sen\,A=a\cdot sen\,B\rightarrow\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}$$

Si trazamos la altura desde el vértice B, y reiteramos el mismo razonamiento obtendríamos $\frac{a}{sen\,A}=\frac{c}{sen\,C}$ y completaríamos así la cadena de igualdades que pretendíamos demostrar.

El teorema de los senos es una herramienta que nos permite resolver triángulos en los que los datos y la incógnita sean dos lados y sus ángulos opuestos.

**Ejemplo:** ***Sea la distancia de A a B de 47 metros y los ángulos A=109° y B=58°. ¿Cuál es la distancia de B a C?***




Empezamos calculando el ángulo C que es el ángulo opuesto al lado conocido:

$$C=180-(109°+58°)=13°$$

Aplicando el teorema de los senos, calculamos el lado a, que es la distancia de B a C.

$$\frac{a}{senA}=\frac{c}{senC} \quad\Rightarrow\quad a=\frac{c\cdot senA}{senC}=\frac{47\cdot sen109}{sen13}=197{,}55m$$

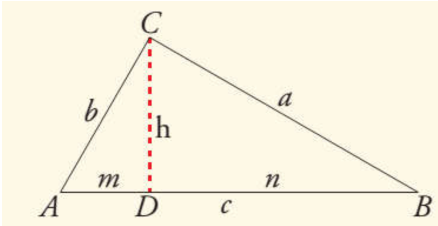
Por tanto, la distancia de B a C es de 197,55 metros.

## 3.3.- Teorema del coseno

*El cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de éstos por el coseno del ángulo que comprenden.*

Matemáticamente:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot \cos C \end{array}}$$




El teorema del coseno es conocido también como la generalización del teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos.

*Demostración:*

Para demostrar la primera de las igualdades, aplicamos el teorema de Pitágoras en cada uno de los dos triángulos rectángulos que se forman al trazar la altura h, ADC y CDB.

En el triángulo CBD: $a^2 = h^2 + n^2 = h^2 + (c-m)^2 = h^2 + c^2 + m^2 - 2cm$

En el triángulo ADC: $b^2 = h^2 + m^2$

Si restamos ambas expresiones:

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cm$$

De donde

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

Si tenemos en cuenta que en el triángulo ADC: $\cos A = \frac{m}{b} \rightarrow m = b\cdot \cos A$, sustituyendo obtenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cdot \cos A$$

De forma similar obtenemos las otras dos igualdades.

**Ejemplo:** ***Resolver el triángulo del que conocemos sus tres lados; a=132m, b=213m y c=156m.***

Mediante el teorema del coseno, calculamos el ángulo B:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cdot \cos B \quad \Rightarrow \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = -0{,}0876$$

Por tanto:

$$B = Arc\cos(-0{,}0876) = 95{,}027^\circ = 91^\circ 1'38''$$

Y ahora, mediante el teorema del seno, calculamos el ángulo A:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \quad \Rightarrow \quad senA = \frac{a\cdot senB}{b} = \frac{132\cdot sen95{,}027^\circ}{213} = 0{,}617$$

Y de aquí:

$$A = arcsen(0{,}617) = 38{,}122^\circ = 38^\circ 7'18''$$

Y ahora conocidos dos ángulos, calculamos el tercero:

$$C = 180 - 38^\circ 7'18'' - 91^\circ 1'38'' = 50^\circ 51'4''$$

## 3.4.- Resolución de triángulos cualesquiera

Hasta ahora, para resolver un triángulo cualquiera utilizábamos la estrategia de la altura, con la que partíamos el triángulo original en dos triángulos rectángulos y resolvíamos de forma separada cada uno de ellos.

Pues bien, a partir de ahora podemos resolverlos utilizando los teoremas del seno y del coseno que hemos visto anteriormente.

## Estrategia a seguir para resolver un triángulo:

Siempre que se pueda se aplica el teorema de los senos porque se hacen menos operaciones que con el teorema del coseno.

**a)** Se puede aplicar el teorema de los senos siempre que se conozca un lado y el ángulo opuesto, o bien dos ángulos, porque conociendo dos ángulos se puede calcular el tercero.

**b)** En los demás casos se aplica el teorema del coseno.

## Discusión del número de soluciones:

Al resolver un triángulo se pueden presentar distintos casos: que no tenga solución, que tenga una solución, (caso más habitual), que tenga dos soluciones y que tenga infinitas soluciones (caso en que nos de los 3 ángulos).

Para resolver un problema de triángulos, lo primero que se debe hacer es un ***dibujo del triángulo***, lo más fielmente posible con los datos conocidos, poner cada dato en su lugar y poner también en su lugar las incógnitas entre interrogantes. Para calcular las incógnitas se aplica:

**a)** Que la suma de los ángulos A+B+C=180°

**b)** El teorema de los senos primero y el teorema del coseno después.

Según esto se nos pueden presentar cuatro casos diferentes:

| CASO | DATOS CONOCIDOS | INCÓGNITAS |
|---|---|---|
| I | Dos ángulos y un lado A, B y c | Dos lados y un ángulo: C, a, b |
| II | Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: a, b, A | Un lado y dos ángulos: c, C, B |
| III | Dos lados y el ángulo formado: a, b, C | Un lado y dos ángulos: c, A, B |
| IV | Los tres lados: a, b, c | Los tres ángulos: A, B, C |

### 3.4.1.- Caso I: Se conocen dos ángulos y un lado

Se puede aplicar el teorema de los senos porque se conoce un lado y el ángulo opuesto a éste, o porque conociendo dos ángulos se puede calcular el tercero. Este caso siempre tiene una única solución.

**Ejemplo:** ***Resuelve el triángulo del que se conoce a=6,4 cm, B=55° y C=82°.***

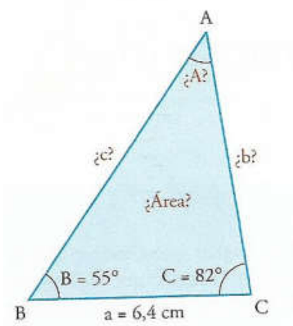
Calculamos el ángulo A, mediante: $A = 180 - (55° + 82°) = 43°$

Después calculamos b, mediante el teorema de los senos:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a \cdot senB}{senA} = \frac{6,4 \cdot sen55}{sen43} = 7,69cm$$

Del mismo modo, calculamos c: $\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a \cdot senC}{senA} = \frac{6,4 \cdot sen82}{sen43} = 9,29cm$

Y con esto ya tenemos los 6 datos del triángulo.




### 3.4.2.- Caso II: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

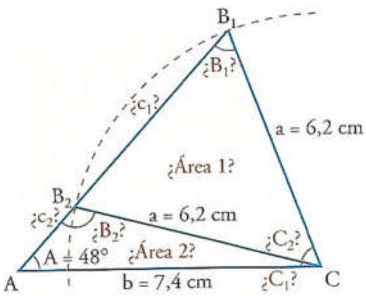
Se puede aplicar el teorema de los senos porque se conoce un lado y el ángulo opuesto. Puede tener una solución, dos soluciones o no tener solución.

Para construirlo, se dibuja el lado b, el ángulo A y una circunferencia de dentro C y radio a. Como observamos se pueden presentar tres casos, en función de la posición relativa del lado C y la circunferencia:

**a)** Que el lado c sea exterior: No tiene solución. (b=5,2; c=4,3; C=73°)

**b)** Que el lado c sea tangente: tiene una solución. (b=4,6; c=3,7; B=58°)

**c)** Que el lado c sea secante: tiene dos soluciones. (a=11,5; b=13,2; A=58°)




**Ejemplo:** ***Resuelve el triángulo en el que se conoce a=6,2cm, b=7,4 cm y A=48°***

Calculamos B mediante el teorema del seno:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \quad \Rightarrow \quad senB = \frac{b \cdot senA}{a} = \frac{7,4 \cdot sen48°}{6,2} = 62°29'46''$$

Pero como el ángulo suplementario de B tiene el mismo seno, podría existir un $B_2$

$$\text{Por tanto } B_2 = 180^\circ - 62^\circ 29' 46'' = 117^\circ 30' 14''$$

Con esto, existirían también dos ángulos $C_1$ y $C_2$:

$$C_1 = 180^\circ - (48^\circ + 62^\circ 29' 46'') = 69^\circ 30' 14''$$
$$C_2 = 180^\circ - (48^\circ + 117^\circ 30' 14'') = 14^\circ 29' 46''$$

Y de aquí, utilizando otra vez el teorema del seno: $\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC} \Rightarrow c = \frac{a \cdot senC}{senA} = \begin{cases} c_1 = \frac{6{,}2 \cdot sen 69^\circ 30' 14''}{sen 48^\circ} = 7{,}81cm \\ c_2 = \frac{6{,}2 \cdot sen 14^\circ 29' 46''}{sen 48^\circ} = 2{,}09cm \end{cases}$

Así que tendríamos los dos triángulos que se ven en la figura de la página anterior.

## 3.4.3.- Caso III: Se conocen dos lados y el ángulo que forman

Como no se puede aplicar el teorema de los senos, se aplica el teorema del coseno para hallar el tercer lado, y una vez hecho esto, ya se puede aplicar el teorema de los senos.

**Ejemplo:** ***Resuelve el triángulo del que conocemos a=5,6 cm; b=4,7 cm y C=69°***

Calculamos el lado c utilizando el teorema de los cosenos: $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$
De donde:

$$c = \sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos C} = \sqrt{5{,}6^2 + 4{,}7^2 - 2 \cdot 5{,}6 \cdot 4{,}7 \cdot \cos 69^\circ} = 5{,}88cm$$

Hecho esto, aplicamos el teorema de los senos para calcular A:

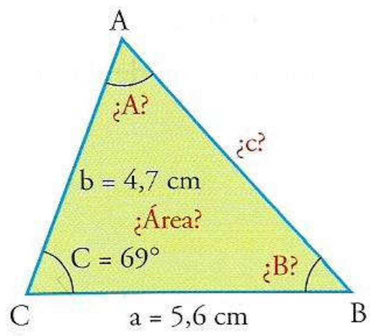
$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC} \Rightarrow senA = \frac{a \cdot senC}{c} = \frac{5{,}6 \cdot sen 69^\circ}{5{,}88} = 0{,}889$$

De aquí:

$$A = arcsen(0{,}889) = 62^\circ 45' 48''$$

Y conocidos A y C, ya podemos calcular B:

$$B = 180 - (62^\circ 45' 48'' + 69^\circ) = 48^\circ 14' 12''$$




## 3.4.4.- Caso IV: Se conocen tres lados

Se debe aplicar el teorema del coseno para hallar el primer ángulo. No tiene solución si el lado mayor es mayor o igual que la suma de los otros dos. (a=47; b=52; c=99): ejemplo sin solución.

**Ejemplo:** ***Resuelve el triángulo de que conocemos: a=7,3, b=6,2 cm y c=5,4 cm***
Calculamos el ángulo A utilizando el teorema de los cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow CosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6{,}2^2 + 5{,}4^2 - 7{,}3^2}{2 \cdot 6{,}2 \cdot 5{,}4} = 0{,}214$$

De donde:

$$A = Arc\cos(0{,}214) = 77^\circ 39' 37''$$

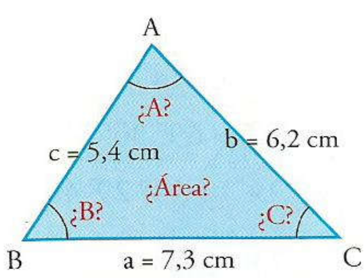
Hecho esto, aplicamos el teorema de los senos para calcular sen B:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \Rightarrow senB = \frac{b \cdot senA}{a} = \frac{6{,}2 \cdot sen 77^\circ 39' 37''}{7{,}33} = 0{,}83$$

por tanto, B: $B = arcsen(0{,}83) = 46^\circ 4' 2''$

Y conocidos A y B, ya podemos calcular C:

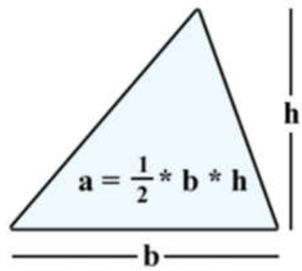
$$C = 180 - (77^\circ 39' 37'' + 56^\circ 4' 2'') = 46^\circ 16' 21''$$



| TRIGONOMETRÍA | Resolución de TRIÁNGULOS CUALESQUIERA | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| DATOS | INCÓGNITAS: Hallar los otros tres | | | | | |
| Dados tres valores | a | b | c | A | B | C |
| Dos lados y ángulo entre ellos | a | b | ① $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ | ② $\frac{a}{sen\,A}=\frac{c}{sen\,C}$ | ② $\frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C}$ | C |
| Dos lados y un ángulo no entre ellos | a | b | ③ $\frac{c}{sen\,C}=\frac{b}{sen\,B}$ | ① $\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}$ | B | ② $C=180-A-B$ |
| Un lado y dos ángulos sobre él | a | ② $\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}$ | ② $\frac{a}{sen\,A}=\frac{c}{sen\,C}$ | ① $A=180-B-C$ | B | C |
| Un lado, ángulo opuesto y otro ángulo | a | ① $\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}$ | ②' $\frac{a}{sen\,A}=\frac{c}{sen\,C}$ | A | B | ①' $C=180-A-B$ |
| Tres lados | a | b | c | ① $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ | ① $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ | ① $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ |
| Dos ángulos | ② $\frac{a}{sen\,A}=\frac{b}{sen\,B}=\frac{c}{sen\,C}$, $a$ cualquiera<br>Infinitas soluciones con lados proporcionales | | | A | B | ① $C=180-A-B$ |
| ①②③ orden de cálculo | Se usan de preferencia los datos originales<br>Se ha usado el Teorema del seno y el Teorema del coseno | | | En todos los casos, Área del triángulo:<br>$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ con p = semiperímetro | | |

## 3.4.5.- Área de un triángulo

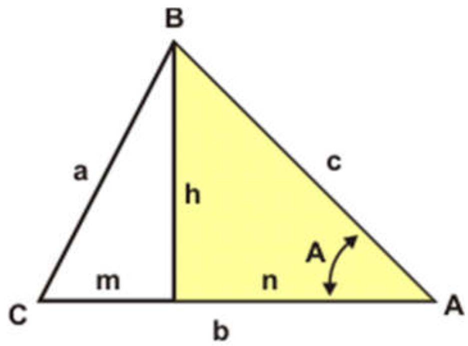
A la hora de resolver un triángulo, es interesante también calcular su área. De esta forma el triángulo queda perfectamente calculado, área incluida.




Como sabemos desde ya hace unos años, el área de un triángulo se calcula haciendo la *mitad del producto de su base por su altura*, pero además de esta archiconocida fórmula, existen otras que es importante remarcar:

### 3.5.5.1.- Cálculo del área en función de dos de sus lados y el ángulo que forman:

Consideremos el triángulo ABC en el cual trazamos la altura h relativa al lado b.




En el triángulo amarillo, el seno da A viene dado por: $sen\,A=\frac{h}{c}$

Si despejamos la altura, viene dada por: $h=c\cdot sen\,A$

Si sustituimos esta h en la fórmula del área de un triángulo, nos queda:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}b\cdot h=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot sen\,A}$$

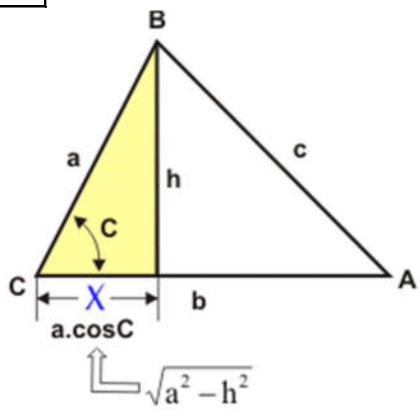
Que nos da la superficie del triángulo en función de dos de sus lados y el seno del ángulo que forman.

## *3.5.5.2.- Fórmula de Herón:*

**La fórmula de Herón**, desarrollada por Herón de Alejandría, relaciona el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados *a*, *b* y *c*:

$$\boxed{Área = \sqrt{s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}$$

En la que s es el semiperímetro del triángulo ABC: $S = \frac{a+b+c}{2}$




***Demostración:***

Consideramos el triángulo ABC de la figura, en el que trazamos la altura h relativa al lado b.

Fijándonos en el triángulo amarillo tenemos:

$$\left.\begin{array}{lll} \cos C = \frac{x}{a} & \rightarrow & x = a\cdot\cos C \\ a^2 = h^2 + x^2 & \rightarrow & x = \sqrt{a^2-h^2} \end{array}\right\} \rightarrow \quad a\cdot\cos C = \sqrt{a^2-h^2} \quad (1)$$

Fijándonos en el triángulo ABC, tenemos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C$ (2)

Si sustituimos (1) en (2), tenemos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C = a^2 + b^2 - 2b\cdot a\cdot\cos C = a^2 + b^2 - 2b\cdot\sqrt{a^2-h^2}$

Despejaremos h de esta ecuación, y para ello elevaremos ambos miembros al cuadrado:

$$-c^2 + a^2 + b^2 = 2b\sqrt{a^2-h^2} \quad \rightarrow \quad \left(-c^2+a^2+b^2\right)^2 = \left(2b\sqrt{a^2-h^2}\right)^2$$

Operando:

$$\left(a^2+b^2-c^2\right)^2 = \left(2b\sqrt{a^2-h^2}\right)^2 = 4b^2\left(a^2-h^2\right) \quad \rightarrow \quad \left(a^2+b^2-c^2\right)^2 - 4b^2\cdot a^2 = -4b^2\cdot h^2$$

Y ahora despejando h, nos queda:

$$h^2 = \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2 - 4b^2\cdot a^2}{-4b^2} = a^2 - \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4b^2} = a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2$$

Por otra parte, el área de un triángulo viene dada por: $S = \frac{1}{2}b\cdot h$ , si elevamos al cuadrado sus miembros, tenemos:

$$S^2 = \frac{1}{4}b^2\cdot h^2$$

Si sustituimos $h^2$ en esta última, nos queda:

$$S^2 = \frac{1}{4}b^2\cdot\left(a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2\right) = \frac{1}{4}b^2\cdot a^2 - \frac{1}{4}b^2\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4}b^2\cdot a^2 - \frac{1}{16}\left(a^2+b^2-c^2\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{16}b^2\cdot a^2 - \frac{1}{16}\left(a^2+b^2-c^2\right)^2 = \frac{(2ba)^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{16}$$

Diferencia de cuadrados, que desarrollando se transforma en:

$$S^2 = \frac{(2ba)^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{16} = \frac{\left(2ba + \left(a^2+b^2-c^2\right)\right)\cdot\left(2ba - \left(a^2+b^2-c^2\right)\right)}{16}$$

Y agrupando:

$$S^2=\frac{\left(2ba+\left(a^2+b^2-c^2\right)\right)\cdot\left(2ba-\left(a^2+b^2-c^2\right)\right)}{16}=\frac{\left(\left(2ba+a^2+b^2\right)-c^2\right)\cdot\left(\left(2ba-a^2-b^2\right)+c^2\right)}{16}=$$
$$\frac{\left((a+b)^2-c^2\right)\cdot\left(c^2-(a-b)^2\right)}{16}=\frac{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(c+a-b)\cdot(c-a+b)}{16}$$

Si llamamos al perímetro del triángulo 2p, tenemos:

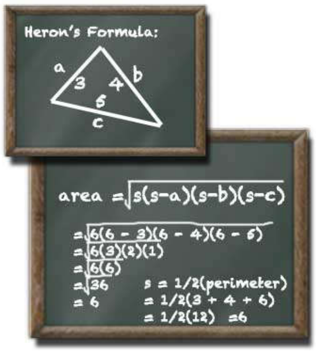
$$a+b+c=2p \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c) \\ a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b) \\ -a+b+c=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a) \end{cases}$$

Y si los sustituimos en la ecuación anterior:

$$S^2=\frac{(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(c+a-b)\cdot(c-a+b)}{16}=\frac{2p\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-a)}{16}=p\cdot(p-c)\cdot(p-b)\cdot(p-a)$$

De donde despejando S, nos queda la buscada fórmula de Herón:

$$S=\sqrt{p\cdot(p-c)\cdot(p-b)\cdot(p-a)}$$




## 3.5.- Ecuaciones y Sistemas trigonométricas

### *3.5.1.- Ecuaciones Trigonométricas*

Una ecuación es trigonométrica cuando la incógnita está ligada a alguna razón trigonométrica.

No hay un método general con el que poder resolverlas, pero son de utilidad las siguientes indicaciones:

- ✓ Si la ecuación tiene razones trigonométricas de distintos ángulos, tales como x, 2x, -x, etc… el primer paso que daremos es **expresar todas estas razones en función de un mismo ángulo**, generalmente X.
- ✓ Si existen varias razones trigonométricas, Seno, Coseno o tangente, las **expresaremos todas ellas en función de una de ellas**.
- ✓ Es conveniente **transformar las sumas y diferencias en productos**.
- ✓ Aplicaremos los pasos usuales que utilizamos en la resolución de ecuaciones algebraicas para despejar la incógnita.
- ✓ Hay que evitar, en lo posible, suprimir soluciones, o añadirlas de forma inadecuada (Por ej. elevando al cuadrado, etc..)
- ✓ Hemos de tener en cuenta que siempre habrá por lo menos dos ángulos distintos en la solución de una ecuación trigonométrica, aunque **tienen infinitas soluciones**.

**Ejemplos:**

a) $sen(2x)+\cos(x)=0$

Desarrollamos el seno del ángulo doble: $sen(2x)=2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)$ y lo sustituimos en la ecuación:

$$2Sen(x)\cdot\cos(x)+\cos(x)=0$$

Sacamos factor común el cos(x):

$$\cos(x)\cdot(2Sen(x)+1)=0$$

De aquí, si el producto de dos números es cero, es porque alguno de ellos es cero:

$$\cos(x)\cdot(2Sen(x)+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\cos(x)=0 \quad\to\quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ 2sen(x)+1=0 \quad\to\quad sen(x)=-\dfrac{1}{2} \quad\to\quad x=\begin{cases}\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \\ \dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\end{cases}$$

b) $sen(4x)-sen(2x)=0$

Desarrollamos el seno del ángulo doble: $sen(4x)=2\cdot sen(2x)\cdot\cos(2x)$ y lo sustituimos en la ecuación:

$$2Sen(2x)\cdot\cos(2x)-sen(2x)=0$$

Sacamos factor común el sen(2x):

$$sen(2x)\cdot(2\cos(2x)-1)=0$$

De aquí, si el producto de dos números es cero, es porque alguno de ellos es cero:

$$sen(2x)\cdot(2\cos(2x)-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} sen(2x)=0 \quad\to\quad \begin{cases}2x=0+2k\pi \\ 2x=\pi+2k\pi\end{cases} \quad\to\quad x=\begin{cases}0+k\pi \\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} \\ 2\cos(2x)-1=0 \quad\to\quad \cos(2x)=\dfrac{1}{2} \quad\to\quad 2x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ \dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\end{cases} \quad\to\quad x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ \dfrac{5\pi}{6}+k\pi\end{cases}\end{cases}$$

Si agrupamos las soluciones en una tabla:

| Sexagesimal | 0° | 30° | 90° | 150° | 180° | 210° | 270° | 330° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| radianes | 0 | Π/6 | π/2 | 5π/6 | π | 7π/6 | 3π/2 | 11π/6 |

c) $\cos(2x)-sen(x)=sen^2(x)$

Tenemos que buscar tener el mismo argumento, de forma que transformaremos cos(2x) en razones trigonométricas de argumento x:

$$\cos(2x)-sen(x)=sen^2(x) \quad\to\quad \cos^2(x)-sen^2(x)-sen(x)=sen^2(x) \quad\to\quad \cos^2(x)-2sen^2(x)-sen(x)=0$$

Para que la ecuación esté en función de una sola razón trigonométrica, escribiremos el $\cos^2(x)$ en función del $sen^2(x)$:

$$\cos^2(x)=1-sen^2(x)$$

Quedándonos una ecuación de la forma:

$$1-sen^2(x)-2sen^2(x)-sen(x)=0 \quad\to\quad -3sen^2(x)-sen(x)+1=0$$

ecuación de segundo grado que al resolver nos da:

$$sen(x)=\begin{cases}0,43 \quad\to\quad x=Arcsen(0,43)=\begin{cases}x_1=25,7°+360k \\ x_2=154,3°+360k\end{cases} \\ -0,77 \quad\to\quad x=Arcsen(-0,77)=\begin{cases}x_3=-50,1°=309,9°+360k \\ x_4=230,1°+360k\end{cases}\end{cases}$$

### 3.5.1.1.- Ejercicios. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $2tg(5-3x)=2\sqrt{3}$

b) $-2sen(2x+10)=\sqrt{3}$

c) $sen2x\cdot\cos x=0$

d) $senx\cdot\cos x=\frac{1}{2}$

e) $\cos x\cdot tgx=\frac{1}{2}$

f) $\sqrt{2}\cos ec5x=2$

g) $\sqrt{3}tg(3x-15)=3$

h) $\frac{senx}{\cos x}=1$

i) $sen2x=\cos x$

j) $\sqrt{3}senx+\cos x=1$

k) $\cos 2x-\cos 6x=sen5x+sen3x$

l) $\cos 2x+5\cos x+3=0$

## 3.5.2.- Sistemas de ecuaciones Trigonométricas

Un ***sistema de ecuaciones*** trigonométricas es aquel en el que al menos en una de las ecuaciones que lo forman es una ecuación trigonométrica.

Resolver los sistemas trigonométricos no es siempre sencillo, veamos los tipos de sistemas más frecuentes:

### 3.5.2.1.- Sistemas resolubles por cambio de variable o por reducción:

Son sistemas en los que aparecen dos razones trigonométricas, tal que podemos hacer el cambio de variable y obtener un sistema de ecuaciones no trigonométricas o utilizar el método de reducción para resolver de forma rápida y sencilla el sistema.

***Ejemplos:*** a) $\begin{cases} sen(2x)+\cos(3y)=1 \\ 2\cdot sen(2x)+4\cdot\cos(3y)=3 \end{cases}$

Si hacemos el cambio de variable: $x=sen(2x);\ y=\cos(3y)$ , transformamos el sistema de ecuaciones trigonométricas en uno lineal:

$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$ que resolviendo por cualquiera de los tres métodos nos da: $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

Y ahora:

$$x=\frac{1}{2} \rightarrow sen(2x)=\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x=30^\circ+360k & \rightarrow & x=15^\circ+180k \\ 2x=150^\circ+360k & \rightarrow & x=75^\circ+180k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=15^\circ+360k \\ x_2=195^\circ+360k \\ x_3=75^\circ+360k \\ x_4=255^\circ+360k \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2} \rightarrow \cos(3x)=\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 3y=60^\circ+360k & \rightarrow & y=20^\circ+120k \\ 3y=300^\circ+360k & \rightarrow & y=100^\circ+120k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1=20^\circ+360k \\ y_2=140^\circ+360k \\ y_3=260^\circ+360k \\ y_4=100^\circ+360k \\ y_5=220^\circ+360k \\ y_6=340^\circ+360k \end{cases}$$

b) $\begin{cases} y+\cos^2(x)=1 \\ 2y+2sen^2(x)=0 \end{cases}$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2 y las restamos después:

$$\begin{array}{r} 2y+2\cos^2(x)=2 \\ -\quad 2y+2sen^2(x)=0 \\ \hline 2\cos^2(x)-2sen^2(x)=2 \end{array}$$

De donde operando un poco obtenemos:

$$2\cos^2(x)-2sen^2(x)=2 \rightarrow \cos^2(x)-sen^2(x)=1 \rightarrow \cos(2x)=1 \rightarrow 2x=0+2k\pi \rightarrow x=k\pi;\ \forall k\in Z$$

### 3.5.2.2.- Sistemas donde una ecuación es resoluble:

Son sistemas en los que podemos utilizar el método de sustitución porque una de las ecuaciones es resoluble.

**Ejemplos: a)** $\begin{cases} sen\ x + \cos y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

De la segunda ecuación, despejamos x: $x = \frac{\pi}{2} - y$ y sustituimos en la primera:

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos y = 1 \quad \rightarrow \quad \cos y + \cos y = 1 \quad \rightarrow \quad 2\cos y = 1 \quad \rightarrow \quad \cos y = \frac{1}{2}$$

Ecuación cuyas soluciones son: $y = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ ó $y = \begin{cases} 60° + 360k \\ 300° + 360k \end{cases}$

Y por tanto como:

$$x = \frac{\pi}{2} - y \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \dfrac{\pi}{6} - 2k\pi \\ \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) = \dfrac{-7\pi}{6} - 2k\pi \end{cases}$$

Así que las soluciones serían: $x_1 = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \rightarrow y_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\qquad x_2 = \frac{-7\pi}{6} - 2k\pi \rightarrow y_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

**Ejemplos: b)** $\begin{cases} sen(x - y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sen(x + y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ directamente obtenemos: $\begin{cases} x - y = \begin{cases} 45° + 360k \\ 135° + 360k \end{cases} \\ x + y = \begin{cases} 60° + 360k \\ 120° + 360k \end{cases} \end{cases}$

Por tanto, tenemos 4 posibles sistemas, cada uno con una solución independiente:

a) $\begin{cases} x - y = 45° + 360k \\ x + y = 60° + 360k \end{cases}$ de donde $2x = 105° + 360k$ y por tanto: $\begin{cases} x_1 = 52{,}5° + 360k & \rightarrow & y_1 = 7{,}5° + 360k \\ x_2 = 232{,}5° + 360k & \rightarrow & y_2 = 187{,}5° + 360k \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 45° + 360k \\ x + y = 120° + 360k \end{cases}$ de donde $2x = 165° + 360k$ y por tanto: $\begin{cases} x_1 = 82{,}5° + 360k & \rightarrow & y_1 = 37{,}5° + 360k \\ x_2 = 262{,}5° + 360k & \rightarrow & y_2 = 217{,}5° + 360k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 135° + 360k \\ x + y = 60° + 360k \end{cases}$ de donde $2x = 195° + 360k$ y por tanto: $\begin{cases} x_1 = 97{,}5° + 360k & \rightarrow & y_1 = 322{,}5° + 360k \\ x_2 = 277{,}5° + 360k & \rightarrow & y_2 = 142{,}5° + 360k \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 135° + 360k \\ x + y = 60° + 360k \end{cases}$ de donde $2x = 255° + 360k$ y por tanto: $\begin{cases} x_1 = 127{,}5° + 360k & \rightarrow & y_1 = 352{,}5° + 360k \\ x_2 = 307{,}5° + 360k & \rightarrow & y_2 = 172{,}5° + 360k \end{cases}$

### 3.5.2.3.- Sistemas reducibles mediante relaciones trigonométricas:

En ellos *jugamos* con las relaciones trigonométricas para transformar en sistema en uno semejante de más fácil resolución:

**Ejemplos: a)** $\begin{cases} senx + seny = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ sen(x - y) = 1 \end{cases}$ de aquí obtenemos: $x - y = 90° + 360K \quad \rightarrow \quad x = 90 + y$

Que sustituyendo en la primera ecuación nos da:

$$sen(90 + y) + sen\ y = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Usando la fórmula de transformación se sumas en productos:

$$senA + senB = 2 \cdot sen\left(\frac{A + B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

Llegamos a:

$$sen(90+y)+sen\ y=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad\rightarrow\quad 2\cdot sen(45+y)\cdot cos(45)=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Y de aquí:

$$sen(45+y)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\quad\rightarrow\quad sen(45+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\rightarrow\quad 45+y=60\quad\rightarrow\quad y=15^\circ$$

**b)** $\begin{cases} sen(x)\cdot sen(y)=-\frac{1}{2} \\ cos(x)\cdot cos(y)=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Si sumamos y restamos ambas ecuaciones, tenemos:

$$\begin{cases} \cos x\cdot\cos y+senx\cdot seny=-1 \\ \cos x\cdot\cos y-senx\cdot seny=0 \end{cases}\quad \text{de donde:}\quad \begin{cases} \cos(x-y)=-1 \\ \cos(x+y)=0 \end{cases}\quad \text{y de aquí:}\quad \begin{cases} x-y=180^\circ \\ x+y=90^\circ \end{cases}$$

Resolviendo el sistema lineal, obtenemos:

$$x=135^\circ \qquad y=-45^\circ$$

## 3.6.- Aplicaciones de la Trigonometría

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación geodesia y la astronomía. Actualmente hay una enorme cantidad de usos de la trigonometría y de las funciones trigonométricas.

Infinidad de los objetos que nos rodean se modelan matemáticamente, y la trigonometría es una de las ramas de la matemática más utilizada para el cálculo de algunas variables. Algunas áreas en la cual manejamos o utilizamos trigonometría son:

**INFOGRAFÍA:** En la construcción de juegos para consolas o computadoras, todo lo que se representa geométricamente en pantalla se hace utilizando mucha trigonometría, para simular procesos naturales o físicos.

**GEOGRAFÍA:** El cálculo de distancias en un mapa, donde estamos hablando de paralelos y meridianos que no son ni más ni menos que líneas en una circunferencia nos puede ayudar el cálculo de su longitud.

**ELECTRÓNICA:** Muchas señales de aparatos eléctricos, tienen usan funciones trigonométricas para ser modeladas, las series de fourier permiten casi definir cualquier señal como suma ponderada de senos y cosenos.

**ARQUITECTURA:** Para el diseño de planos, cálculo de resistencia de materiales, tratamos con modelos geométricos, en los cuales las funciones trigonométricas son de gran ayuda.

**APLICACIONES CAD Y DIBUJO:** las Curvas, Elipse, Círculos utilizan en su formulación funciones trigonométricas.

**ASTRONOMÍA:** Muy frecuentemente utilizada, para calcular orbitas de los planetas.

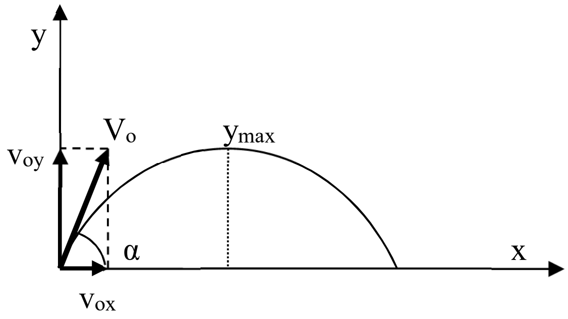
**MÚSICA:** cualquier onda sonora por el teorema de Fourier se puede expresar como una suma de diferentes ondas armónicas y estas ondas armónicas se suelen expresar matemáticamente con funciones seno o coseno.

**FÍSICA:** permite resolver problemas de mecánica clásica, tiro parabólico, planos inclinados, y un largo etc. Como ejemplo veremos varios casos:

### 3.6.1.- Tiro Parabólico

En este tipo de movimientos la velocidad inicial $v_o$ se descompone en $v_{oy}$ (vertical) M.R.U.A. y $v_{ox}$ (horizontal) M.R.U.

$$\boxed{\begin{aligned} v_{ox} &= v_o \cdot Cos\alpha \\ v_{oy} &= v_o \cdot Sen\alpha \end{aligned}}$$




Y en cualquier instante del movimiento:

$$v_x = v_{ox} = v_0 \cdot Cos\alpha$$
$$v_y = v_{oy} - g \cdot t = v_o \cdot sen\alpha - g \cdot t$$

Los desplazamientos horizontal y vertical experimentados por el móvil serán:

- ***Desplazamiento horizontal:*** $x = v_x \cdot t = (v_o \cdot \cos\alpha) \cdot t$
- ***Desplazamiento vertical:*** $y = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = (v_o \cdot sen\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Si de la ecuación del desplazamiento horizontal despejamos t; $t = \dfrac{x}{v_o \cdot \cos\alpha}$

y lo metemos en la ecuación del desplazamiento vertical: $y = v_o \cdot sen\alpha \cdot \dfrac{x}{v_o \cdot \cos\alpha} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_o^2 \cdot \cos^2\alpha}$

obtenemos: $y = x \tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2 \cdot v_o^2 \cdot \cos^2\alpha}$ Que es la ecuación de la trayectoria.

***Para calcular la celeridad*** (módulo de la velocidad) del proyectil en un punto cualquiera de su trayectoria basta con:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 \cdot \cos^2\alpha + (v_o \cdot sen\alpha - g \cdot t)^2} = \sqrt{v_o^2 + g^2 \cdot t^2 - 2v_o \cdot g \cdot t \cdot sen\alpha}$$

Y si tenemos en cuenta la ecuación del desplazamiento vertical, esta ecuación queda: $v = \sqrt{v_o^2 - 2 \cdot g \cdot h}$

El proyectil alcanzará su ***altura máxima*** cuando la componente vertical de la velocidad sea nula. De aquí deducimos el tiempo que tardará en conseguir dicha altura máxima.

$$0 = v_o \cdot sen\alpha - g \cdot t$$

Y por lo tanto:

$$t_{y_{\max}} = \frac{v_o \cdot sen\alpha}{g}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación el desplazamiento vertical obtenemos:

$$\boxed{Y_{\max} = v_o \cdot sen\alpha \cdot \frac{v_o \cdot sen\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_o^2 \cdot sen^2\alpha}{g^2} = \frac{v_o^2 \cdot sen^2\alpha}{2 \cdot g}}$$

Para calcular el alcance final del proyectil, el tiempo que tarda el proyectil en caer al suelo es el doble del tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima. $t_v = \dfrac{2 \cdot v_0 \cdot sen\alpha}{g}$

Si sustituimos en la ecuación del desplazamiento horizontal: $\boxed{X_{\max} = \dfrac{v_o^2 \cdot sen2\alpha}{g}}$

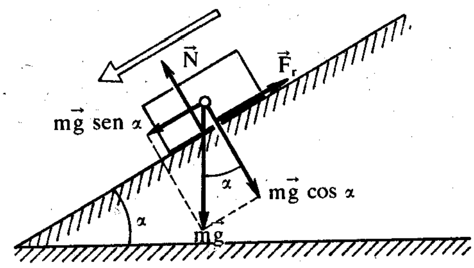
El máximo alcance se conseguirá cuando sen $2\alpha = 1$; es decir $2\alpha = 90°$, y por lo tanto $\alpha = 45°$.

### 3.6.2.- Movimiento en un plano inclinado

Sea un cuerpo de masa m que se desplaza por un plano inclinado, la fuerza que favorece el movimiento es la componente del peso en la dirección del plano, mientras que la componente perpendicular al mismo se equilibra con la reacción normal:

$$N = m \cdot g \cdot Cos\alpha$$

La fuerza efectiva valdrá:




$$F_e = F_a - F_r = F_a - \mu_d \cdot N = mg \cdot Sen\alpha - \mu_d \cdot m \cdot g \cdot \text{Cos}\,\alpha$$

$$F_e = mg\left[Sen\alpha - \mu_d \cdot \text{Cos}\,\alpha\right]$$

Y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica, F=m·a, obtenemos:

$$mg(Sen\alpha - \mu_d \cdot Cos\alpha) = m \cdot a$$

De donde:

$$\boxed{a = g\left(Sen\alpha - \mu_d \cdot Cos\alpha\right)}$$

## 3.7.- Ejercicios Resueltos

**1.-** Si $\cos(80°) = \dfrac{1}{5}$, hallar el seno, el coseno y la tangente del ángulo de 40° .

Sabemos que 40 es la mitad de 80, así que utilizaremos las razones trigonométricas del ángulo mitad:

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad sen(40) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 80}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{4}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{4}{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad sen(40) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 80}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{6}{5}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{60}}{10} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{15}}{5}} = \frac{\sqrt{150}}{25} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Reseñar que en las fórmulas del ángulo mitad aparece el doble signo (±), y elegimos las raíces positivas porque el ángulo de 40 está en el primer cuadrante, y en éste todas las razones trigonométricas son todas positivas.

**2.-** Demuestre la siguiente expresión: $\dfrac{sen(x-y) - sen(x+y)}{\cos(x+y) - \cos(x-y)} = \cot(x)$

Si desarrollamos las razones trigonométricas de la suma y resta de ángulos, obtenemos:

$$\frac{sen(x-y)-sen(x+y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}=\frac{sen(x)\cdot\cos(y)-\cos(x)\cdot sen(y)-sen(x)\cdot\cos(y)-\cos(x)\cdot sen(y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)-sen(x)\cdot sen(y)-\cos(x)\cdot\cos(y)-sen(x)\cdot sen(y)}=$$

Operando después y simplificando llegamos a:

$$=\frac{\cancel{-2}\cos(x)\cdot\cancel{sen(y)}}{\cancel{-2}sen(x)\cdot\cancel{sen(y)}}=\frac{\cos x}{senx}=\cot(x)$$

Que es la expresión que buscábamos.

**3.-** Simplifique todo lo que pueda la siguiente expresión trigonométrica:

$$\frac{\cos(2a-b)-\cos(2a+b)}{sen(2a+b)+sen(2a-b)}$$

Al igual que en el ejercicio anterior, si desarrollamos las razones trigonométricas de suma y resta de ángulos, obtenemos:

$$\frac{\cos(2a-b)-\cos(2a+b)}{sen(2a+b)+sen(2a-b)}=\frac{\cos(2a)\cdot\cos(b)+sen(2a)\cdot sen(b)-\cos(2a)\cdot\cos(b)+sen(2a)\cdot sen(b)}{sen(2a)\cdot\cos(b)+sen(b)\cdot\cos(2a)+sen(2a)\cdot\cos(b)-\cos(2a)\cdot sen(b)}=$$

Que simplificando llegamos a:

$$=\frac{2sen(2a)\cdot sen(b)}{2sen(2a)\cdot\cos(b)}=\frac{2\cancel{sen(2a)}\cdot sen(b)}{2\cancel{sen(2a)}\cdot\cos(b)}=\tan(b)$$

**4.-** De un triángulo sabemos que: $\frac{sen(B+A)}{sen(B-A)}=1$. Demuestre que se trata de un triángulo rectángulo en B.

Operando tenemos que: $sen(B+A)=sen(B-A)$ , expresión en la que, si los senos son iguales, pueden ocurrir dos cosas; o los ángulos son iguales, o los ángulos son suplementarios (suman 180°)

$$\begin{cases}B+A=B-A & \rightarrow \quad 2A=0 \quad \rightarrow \quad A=0\\ B+A+B-A=180 & \rightarrow \quad 2B=180 \quad \rightarrow \quad B=90^\circ\end{cases}$$

Por tanto el triángulo es rectángulo en B.

Otra forma de demostrarlo, sería por ***reducción al absurdo***. (Suponemos que es falso y llegamos a una contradicción)

Supongamos que no es rectángulo en B; entonces: $sen(B+A)=sen(B-A)$

Si desarrollamos ambas sumas. $senB\cdot\cos A+\cos B\cdot senA=SenB\cdot\cos A-\text{Cos}\,B\cdot senA$

Y pasamos todo al primer miembro: $senB\cdot\cos A+\cos B\cdot senA-SenB\cdot\cos A+\text{Cos}\,B\cdot senA=0$

Simplificando, llegamos a: $2\cos B\cdot senA=0$ *de donde* $\begin{cases}SenA=0 & \rightarrow \quad A=0\\ \text{Cos}\,B=0 & \rightarrow \quad B=90^\circ\end{cases}$

O sea, que llegamos a una contradicción, si suponemos que B no es recto, no puede salir 90.

**5.-** Calcule todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifiquen:

$$sen(x)+\frac{4}{3}\cos^2(x)=\frac{3}{2}$$

Escribimos la ecuación en función de una sola razón trigonométrica:

$$sen(x)+\frac{4}{3}\cos^2(x)=\frac{3}{2} \quad\rightarrow\quad sen(x)+\frac{4}{3}\left(1-\cos^2(x)\right)=\frac{3}{2}$$

Operando un poco,

$$sen(x)+\frac{4}{3}\left(1-sen^2(x)\right)=\frac{3}{2} \quad\rightarrow\quad -\frac{4}{3}sen^2(x)+sen(x)+\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)=0 \quad\rightarrow\quad -\frac{4}{3}sen^2(x)+sen(x)-\frac{1}{6}=0$$

llegamos a una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$8sen^2(x)-6sen(x)+1=0 \quad\rightarrow\quad sen(x)=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{16}\begin{cases} sen(x)=\dfrac{1}{2} & \rightarrow \quad x=\begin{cases}30^\circ\\150^\circ\end{cases} \\ sen(x)=\dfrac{1}{4} & \rightarrow \quad x=\begin{cases}14^\circ 28'39''\\165^\circ 31'21''\end{cases}\end{cases}$$

**6.-** Resuelva el triángulo ABC del cual se conoce: a=15 cm, b=12 cm y A-B=15°.

Si A-B=15, entonces A=B+15. Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB} \quad\rightarrow\quad \frac{15}{sen(B+15)}=\frac{12}{senB} \quad\rightarrow\quad 15\cdot senB=12\cdot sen(B+15)$$

Desarrollando el seno de la suma:

$$15\cdot senB=12\cdot sen(B+15) \quad\rightarrow\quad 15\cdot senB=12\cdot\left(senB\cdot\cos 15+\cos B\cdot sen15\right)$$

Y operando para despejar cos B:

$$15\cdot senB-12senB\cdot\cos 15=12\cos B\cdot sen15 \quad\rightarrow\quad \left(15-12\cos 15\right)\cdot senB=12\cos B\cdot sen15$$

Obtenemos:

$$\frac{\left(15-12\cos 15\right)}{12\cdot sen15}\cdot senB=\cos B$$

Si cambiamos el cos B por $\cos B=\sqrt{1-sen^2B}$ , utilizando la identidad fundamental de la trigonometría:

$$\frac{\left(15-12\cos 15\right)}{12\cdot sen15}\cdot senB=\sqrt{1-sen^2B}$$

Elevando al cuadrado y operando, llegamos a:

$$\left(\frac{15-12\cos 15}{12\cdot sen15}\right)^2\cdot sen^2B=1-sen^2B \quad\rightarrow\quad \left[\left(\frac{15-12\cos 15}{12\cdot sen15}\right)^2+1\right]\cdot sen^2B=1$$

Y despejando el seno de B:

$$\left[\left(\frac{15-12\cos 15}{12\cdot sen15}\right)^2+1\right]\cdot sen^2B=1 \quad\rightarrow\quad senB=\sqrt{\frac{1}{\left[\left(\dfrac{15-12\cos 15}{12\cdot sen15}\right)^2+1\right]}}$$

Por tanto, el ángulo B es:

$$B = arcsen\left(\sqrt{\frac{1}{\left[\left(\frac{15-12\cos 15}{12\cdot sen15}\right)^2+1\right]}}\right) = 42°20'12''$$

Una vez calculado el ángulo B, A viene dado por $A = B + 15 = 42°20'12'' + 15° = 57°20'12''$

Y una vez conocidos A y B, calculamos C, mediante: $C = 180 - (A+B) = 80°19'37''$

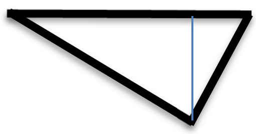
Hecho esto, utilizando el teorema del seno, obtenemos el valor del lado c:

$$\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC} \quad \rightarrow \quad c = \frac{a\cdot senC}{senA} = \frac{15\cdot sen80°19'37''}{sen57°20'12''} = 17,6\ cm$$

**7.-** En el momento de marcar Brasil el último gol a Alemania, en la final de la Copa del Mundo de Corea-Japón, Ronaldo estaba situado a 15 m del poste izquierdo y a 14 m del derecho y veía la portería bajo un ángulo de 30°. Calcula la distancia del jugador a la línea de gol.

Como tenemos dos lados y el ángulo que forman, tenemos que utilizar el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos C} = \sqrt{15^2+14^2-2\cdot 15\cdot 14\cdot\cos 30} = 7,57m$$



Conocidos los tres lados, utilizando el teorema del seno, calculamos el ángulo A

$$\frac{c}{senC} = \frac{a}{senA} \quad \rightarrow \quad A = arcsen\left(\frac{a\cdot senC}{c}\right) = arcsen\left(\frac{15\cdot sen30}{7,57}\right) = 82°12'8''$$

Y ahora fijándonos en el triángulo rectángulo de la derecha:

$$senA = \frac{h}{b} \quad \rightarrow \quad h = b\cdot senA = 14\cdot sen82°12'8'' = 13,87\ m$$

Por tanto, Ronaldo está a 13,87 metros de la línea de Gol.

**8.-** Si $\tan(\alpha+\beta) = 4$ y $\tan(\alpha) = -2$, halla $\tan(2\beta)$

Si desarrollamos la fórmula de la tangente de la suma, tenemos:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta} \quad \rightarrow \quad 4 = \frac{-2+\mathrm{tg}\beta}{1+2\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

De donde si despejamos la tangente del ángulo $\beta$

$$4(1+2\cdot\mathrm{tg}\beta) = -2+\mathrm{tg}\beta \quad \rightarrow \quad 4+8tg\beta+2-tg\beta = 0 \quad \rightarrow \quad 7tg\beta = -6 \quad \rightarrow \quad tg\beta = -\frac{6}{7}$$

Y con esto, ya podemos calcular lo que nos piden:

$$\mathrm{tg}(2\beta) = \frac{2\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}^2\beta} = \frac{2\cdot(-6/7)}{1-36/49} = -\frac{84}{13}$$

## 3.8.- Ejercicios Propuestos

**1.** De un triángulo ABC se conoce $a$ = 8 cm, $c$ = 14 cm y B = 50º. Halla los ángulos que forma su mediana $m_a$ con el lado BC.

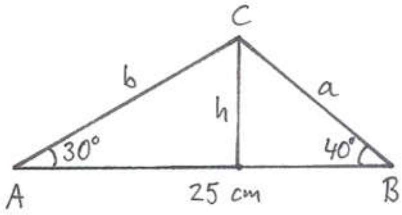
Sol: 65° 2' 4" y 114° 57' 56".

**2.** Desde el pueblo A se ven los pueblos B y C, que distan entre sí 6 km, bajo un ángulo de 63º. Si la distancia entre A y B es de 4 km, calcula lo que distan A y C.

Sol: 6,64 km

**3.** [S] Calcula el área del triángulo ABC representado en la figura siguiente:

Sol: 106,88 cm².




**4.** [S] Las agujas de un reloj de pared miden 10 y 12 centímetros, respectivamente.

a) ¿Cuál es la distancia que hay entre sus extremos cuando el reloj marca las cuatro?

b) ¿Cuál es la superficie del triángulo que determinan a esa hora?

Sol: a) 19,08 cm; b) 51,96 cm².

**5.** Calcula los lados y el área de un triángulo de 80 cm de perímetro si sus ángulos están en progresión geométrica de razón 2.

Sol : 15,85 cm; 28,55 cm y 35,60 cm; S = 220,6 cm².

**6.** Calcula la longitud de la diagonal de un pentágono regular de 4 cm de lado.

Sol: 6,47 cm

**7.** El lado de un rombo mide 18 cm y un ángulo 63º. Halla el área.

Sol: 288,72 cm².

**8.** Halla el área de un hexágono regular de 7 cm de lado.

Sol: 127,26 cm²

**9.** Las diagonales de un rectángulo miden 17 cm y uno de los ángulos que forman al cortarse es de 63º. Calcula el perímetro y el área.

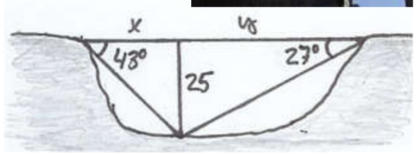
Sol: 46,74 cm; 128,67 cm².

**10.** La aguja en que termina el edificio Chrysler de Nueva York se ve, desde cierto punto del suelo, bajo un ángulo de 70º. Si retrocedemos 106 m se ve bajo un ángulo de 55º. Calcula la altura del edificio.

Sol: 315,25 m.

**11.** Para salvar un barranco de 25 m de profundidad se quiere construir un puente. Desde cada una de las orillas se ve la misma piedra del fondo bajo ángulos de 43º y 27º respectivamente. Calcula la longitud del puente.

Sol: 75,88 metros.




**12.** Dos aviones que se encuentran a 7 y 9 km de un aeropuerto se observan desde éste bajo un ángulo de 39º. ¿Qué distancia separa a los aviones?

Sol: 5,66 km

**13.** Desde nuestro lugar de observación vemos dos hoteles, situados en la orilla de un lago, bajo un ángulo de 65º. Calcula la distancia entre los dos hoteles si distan de nuestro lugar de observación 3,5 y 2,6 km respectivamente.

Sol: 3,36 km.

**14.** Dos barcos salen al mismo tiempo del puerto. Toman rumbos que forman entre sí un ángulo de 58º. El primero navega a una velocidad de 35 km/h y el segundo a 42 km/h. ¿Qué distancia les separa al cabo de 3 horas de navegación?

Sol: 113,49 km.