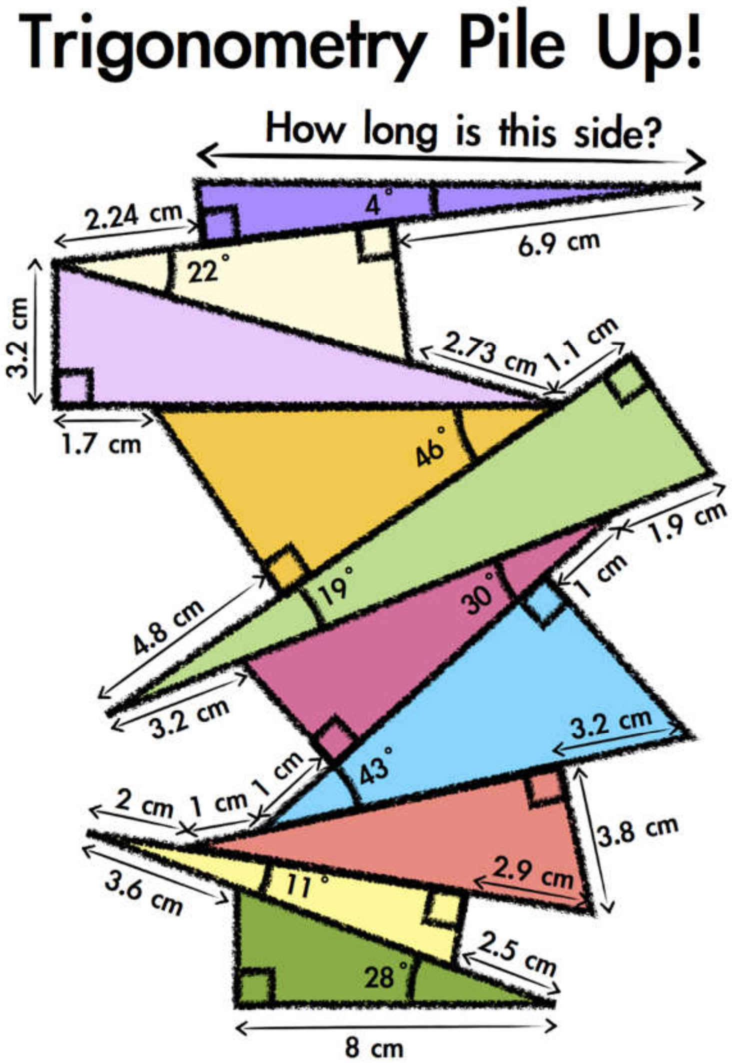
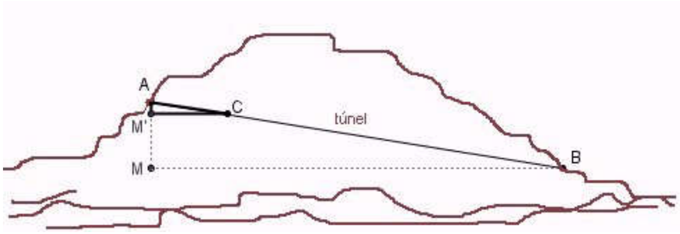
Tema 2: Razones Trigonométricas. Resolución de Triángulos Rectángulos



1.0.- Introducción

Una de las construcciones más notables de los antiguos griegos fue el túnel de Sanos, en el que, ineludiblemente emplearon la triangulación. Se realizó en el siglo VI a.C. para llevar agua desde las fuentes del Monte Castro a la ciudad de Samos (donde nació Pitágoras), situada en aguas del mar egeo. El túnel tenía unos dos metros de diámetro y algo más de un kilómetro de longitud. Se excavó partiendo simultáneamente de sus dos extremos A y B, lo que suponía una planificación tecnológica sorprendente.

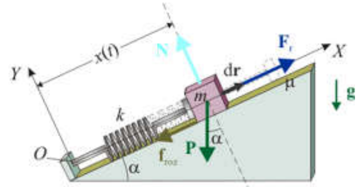


La palabra ***geometría*** tiene dos raíces griegas "*geo*" tierra y "*metrón*" medida, o sea, significa "medida de la tierra"; los matemáticos griegos sentaron las bases teóricas de la Geometría y elaboraron una gran cantidad de resultados o teoremas que permiten relacionar los diferentes elementos métricos de un triángulo rectángulo; sin embargo, fueron incapaces de encontrar fórmulas que relacionaran los ángulos del triángulo con las dimensiones de sus lados.

En esta unidad se explican y aplican los conceptos y procedimientos que conducen al concepto de razón trigonométrica, estableciéndose así los cimientos sobre los que se basa el concepto de función trigonométrica.

La trigonometría plana es una rama de las matemáticas que trata de las medidas de los triángulos y sus aplicaciones prácticas relacionadas con otras Ciencias como la Topología, la Astronomía…..

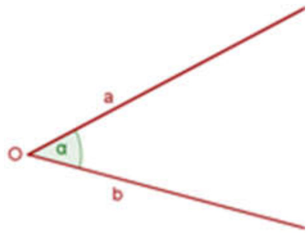
En esta primera unidad del primer curso de Bachillerato Científico-Tecnológico se trabajan contenidos de Trigonometría que algunos alumnos han abordado en el segundo ciclo de la ESO de forma muy superficial. Por este motivo se inicia sin presuponer conocimientos previos, pero aprovechando contenidos de geometría referentes a la semejanza de triángulos que sí forma parte de los objetivos generales de Secundaria.



La segunda unidad didáctica de este bloque aborda la "*resolución de triángulos cualesquiera*" remarcando de esta forma la importancia de la materia estudiada en aspectos de la vida cotidiana y en relación con otras asignaturas: Cálculo de la latitud de un punto geográfico, Cartas náuticas de navegación, Fuerza de rozamiento en un plano inclinado,…..

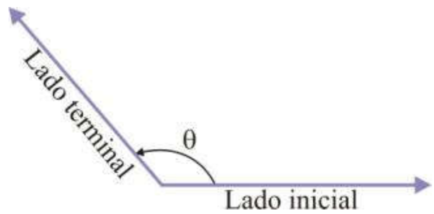
1.1.- Ángulos

Como ya sabemos, un **ángulo** es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen o vértice. Suelen medirse en unidades tales como el radián, el grado sexagesimal o el grado centesimal.



1.1.1.- Ángulo en el plano.

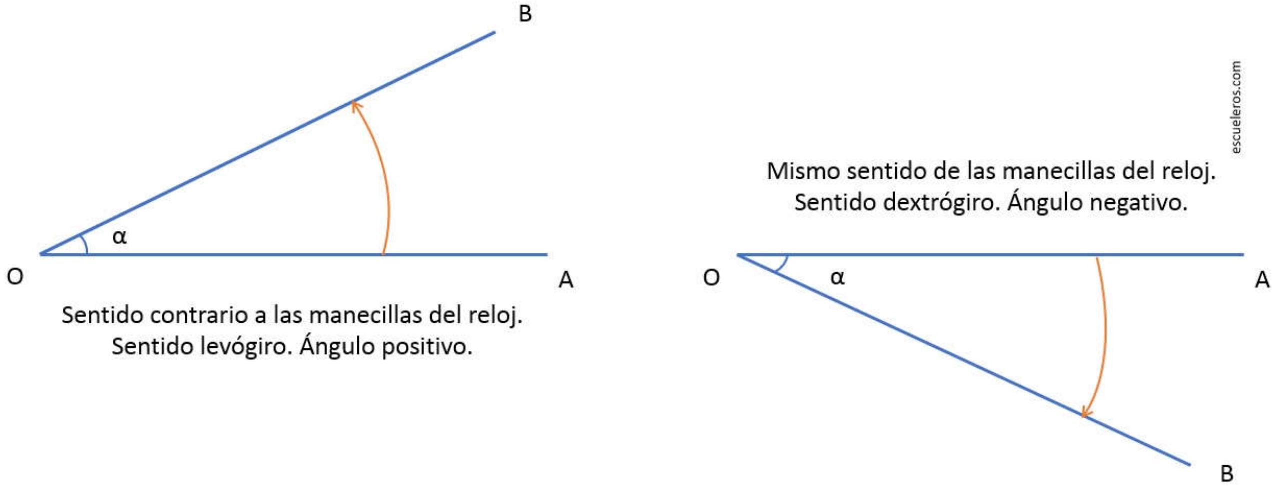
Existen básicamente dos formas de definir un ángulo en el plano:



1. Forma geométrica: Se le llama "ángulo" a la amplitud entre dos líneas de cualquier tipo que concurren en un punto común llamado vértice. Coloquialmente, ángulo es la figura formada por dos líneas con origen común. El ángulo entre dos curvas es el ángulo que forman sus rectas tangentes en el punto de intersección.

2. Forma trigonométrica: Es la amplitud de rotación o giro que describe un segmento rectilíneo en torno de uno de sus extremos tomado como vértice desde una posición inicial hasta una posición final. Si la rotación es en sentido levógiro (contrario a las manecillas del reloj), el ángulo se considera positivo. Si la rotación es en sentido dextrógiro (conforme a las manecillas del reloj), el ángulo se considera negativo.

1.1.2.- Criterio de orientación de ángulos.



1.1.3.- Sistemas de Medida de ángulos.

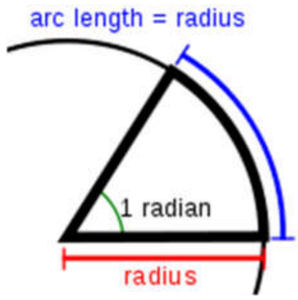
Generalmente se usan dos sistemas de medición: el sistema sexagesimal, cuya unidad es el grado,°, y el sistema radial cuya unidad es el radián: rad.

Medidas en Grados (DEG):

El **grado** es el ángulo plano que teniendo vértice en el centro de un círculo intercepta sobre la circunferencia de ese círculo un arco de longitud $l = \frac{2\pi R}{360^\circ}$. Se simboliza por °.

- Un **grado** es igual a 60 **minutos**: 1°=60'
- Un **minuto** es igual a 60 **segundos**: 1' = 60"
- Un ángulo recto mide 90°, uno llano 180° y un ángulo completo mide 360°.

Medidas en Radianes: (RAD):



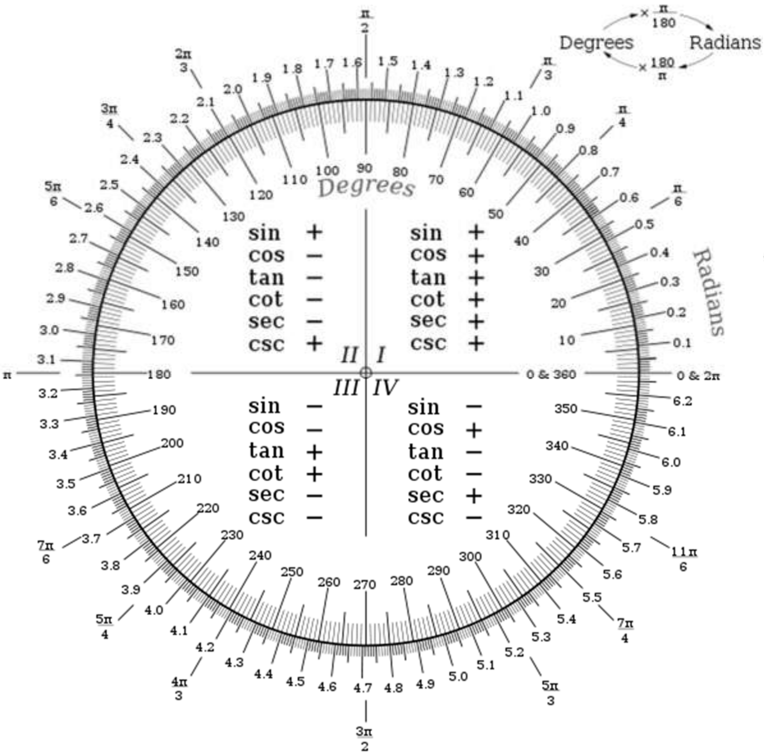
El **radián** es el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de ese círculo un arco de longitud igual al radio. Se simboliza por rad.

Equivalencias

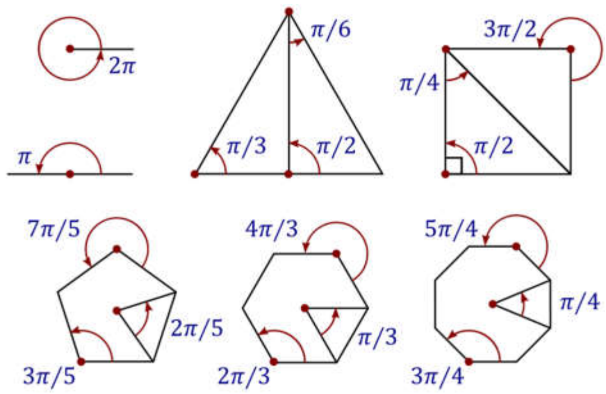
Tabla de conversión entre grados sexagesimales y radianes.

- La equivalencia entre grados sexagesimales y radianes es: π rad = 180°

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π

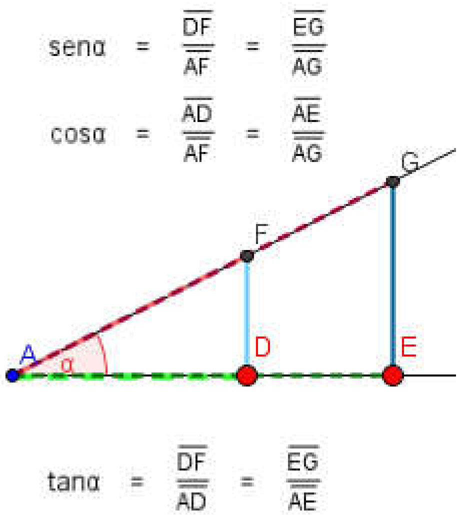


Ángulos en las figuras geométricas más comunes



1.2.- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

El concepto de razón trigonométrica de un ángulo agudo se puede obtener como una consecuencia inmediata del concepto de proporcionalidad y de los resultados que de él se derivan como es la Semejanza de Triángulos. En particular, la razón de semejanza entre dos triángulos nos permite definir, partiendo de dos triángulos rectángulos en posición de Thales como los de la figura adjunta, Seno, Coseno y Tangente del ángulo agudo como los cocientes que se derivan de las relaciones de proporcionalidad siguientes:



$$Sen\,\alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AG}} \quad , \quad Cos\,\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AG}} \quad , \quad Tag\,\alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$$

Teniendo en cuenta que la hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es el lado más grade, concluimos inmediatamente:
Si α es un ángulo agudo:

- $0 \le \text{Sen}(\alpha) \le 1$
- $0 \le \text{Cos}(\alpha) \le 1$

Observando los triángulos rectángulos y, aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene inmediatamente la *relación fundamental de la trigonometría*:

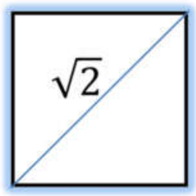
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Además de estas tres razones trigonométricas, existen otras tres que son:

Secante	Cosecante	Cotangente
$\text{Sec}\ \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}$	$\text{Cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{EG}}$	$\text{Cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EG}}$

1.2.1.- Razones Trigonométricas de los ángulos de 30, 45 y 60

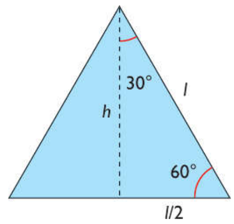
Para algunos ángulos como 30°, 45° y 60°, las razones trigonométricas se pueden calcular de forma exacta:



Ángulo de 45°:

Utilizamos un cuadrado de lado unidad, en el que la diagonal la calculamos mediante Pitágoras.

Aquí, tenemos que:
$$\left.\begin{array}{l} sen45=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ Cos45=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} tg45=\frac{sen45}{cos45}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$



Ángulo de 30°:

Utilizaremos un triángulo equilátero de lado l, en el que calculamos su altura en función de l, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3l^2}{4}}=\sqrt{3}\frac{l}{2}$$

Aquí, tenemos ahora:

$$\left.\begin{array}{l} sen30°=\frac{l/2}{l}=\frac{1}{2} \\ cos30°=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{l}{2}}{l}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} tg30°=\frac{Sen30°}{cos30°}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulo de 60°:

De forma similar, y utilizando el mismo triángulo obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} sen60°=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{l}{2}}{l}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ cos60°=\frac{l/2}{l}=\frac{1}{2}\end{array}\right\} tg60°=\frac{Sen60°}{cos60°}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$$

Por tanto tenemos que:

$$sen45=cos45=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sen30=cos60=\frac{1}{2} \qquad sen60=cos30=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

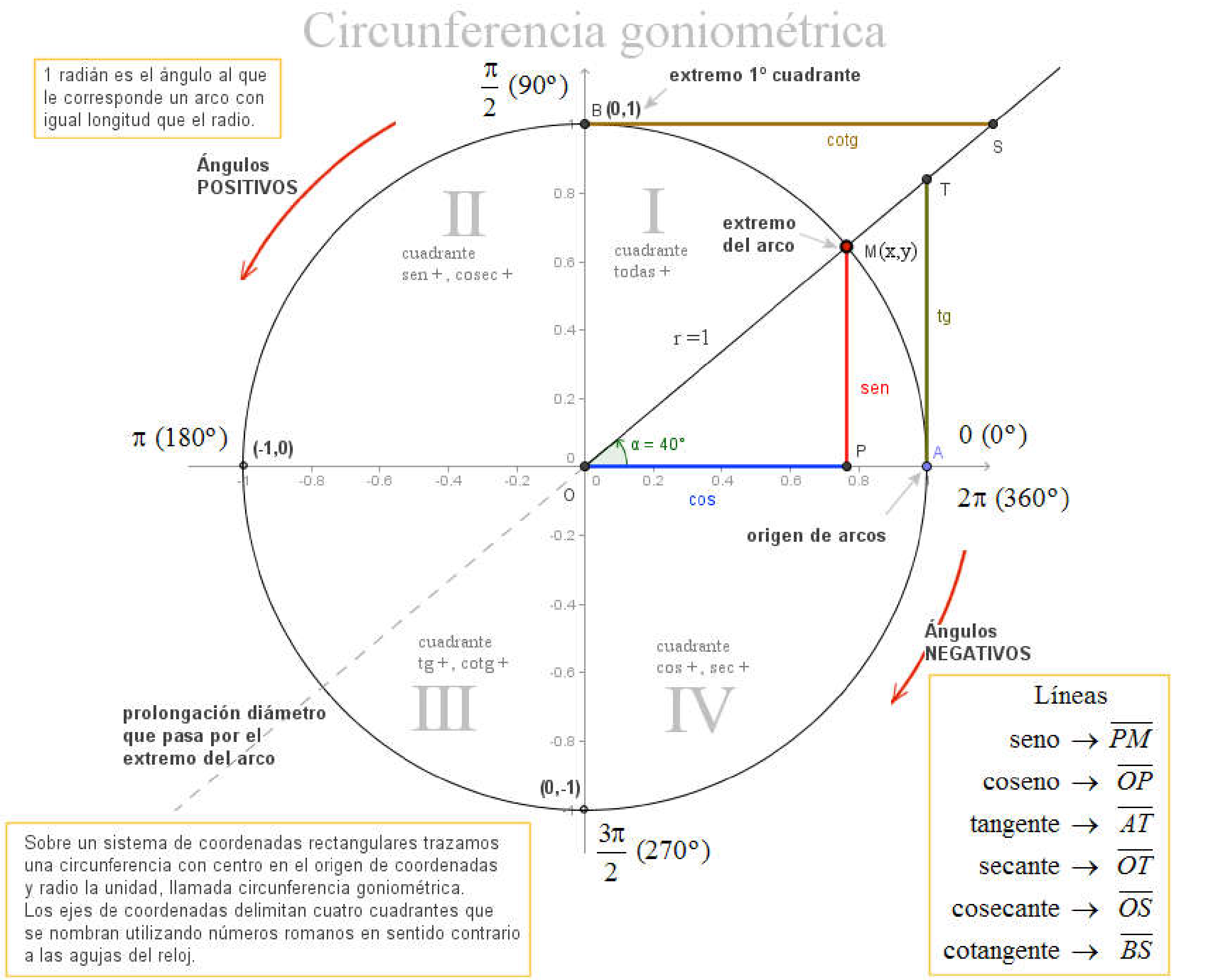
De donde podemos deducir que si α y β son dos ***ángulos complementarios***, ocurre que:

$$\boxed{sen\alpha=cos\beta \quad y \quad cos\alpha=sen\beta}$$

1.3.- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera:

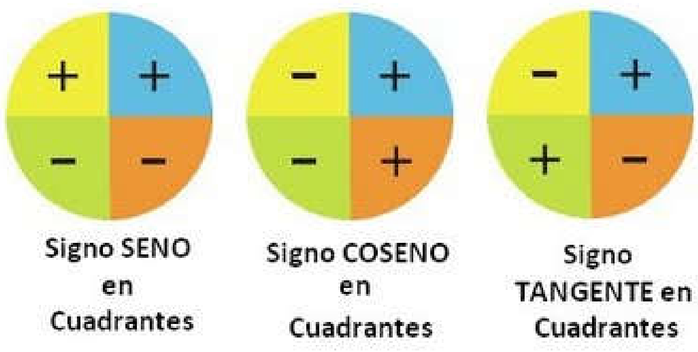
Una circunferencia goniométrica es una circunferencia especial que vamos a utilizar para medir ángulos y definir las razones trigonométricas de los mismos.

- Consideremos una circunferencia de centro (0,0= y radio 1. Como todas las relaciones trigonométricas son razones de proporcionalidad, el valor del radio nos resultará indiferente pero, si lo consideramos como 1, nos hará los cálculos más sencillos.
- Los ángulos se situarán sobre la circunferencia siguiendo los siguientes principios:
  1. El vértice en el centro de la circunferencia (0,0).
  2. Uno de sus lados lo haremos coincidir con el *semieje positivo de las x*.
  3. El otro lado se colocará donde le corresponda, abriendo el ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj y con vértice en (0,0).
  4. Cuando abramos el ángulo en el mismo sentido de las agujas del reloj, consideraremos su valor como negativo.



Si situamos un ángulo agudo, α, sobre la circunferencia gonoimétrica, (cos α, sen α) son las coordenadas del punto M en que el segundo lado de un ángulo cualquiera γ corta a la circunferencia goniométrica.

Se cumple en todos los casos que: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$



1.3.1.- Regla para calcular las razones Trigonométricas de los ángulos más importantes:

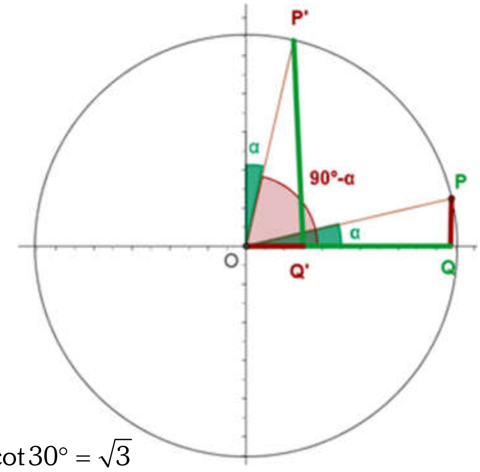
Numeramos los ángulos de 0 a 4 en orden creciente. El número que corresponde a cada ángulo será el *n* del mismo. Numerados así el seno de un ángulo será la raíz de su *n* partida por 2. De esta forma obtenemos la fila de los senos. Para obtener la fila de los cosenos no hace falta ningún cálculo, simplemente colocamos la fila que hemos obtenido antes en orden inverso. Y para obtener la de las tangentes simplemente divididos el valor del seno entre el valor del coseno.

	0º	30º	45º	60º	90º
$Sen\ \alpha =$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$Cos\ \alpha =$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$Tg\ \alpha =$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$

1.4.- Determinación de las razones trigonométricas de ángulos de diferente cuadrante:

1.4.1.- Ángulos Complementarios:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \\ \\ \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{sen}\alpha \end{array}\right\} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

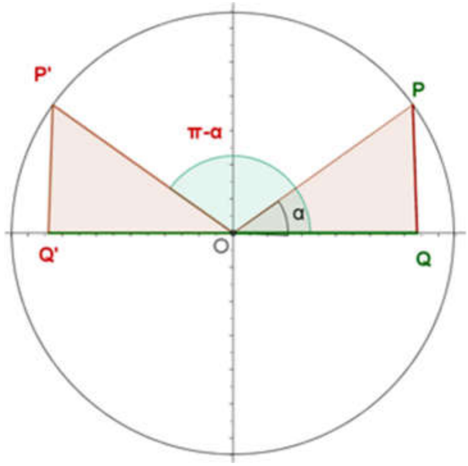


Como ejemplo, calculamos las razones del ángulo de 60°.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sen } 60^\circ=\text{sen}(90^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \text{Cos } 60^\circ=\text{Cos}(90^\circ-30^\circ)=\text{Sen}30^\circ=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \tan 60^\circ=\tan(90^\circ-30^\circ)=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$$

1.4.2.- Ángulos Suplementarios:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sen}(\pi-\alpha)=\text{Sen }\alpha \\ \\ \text{Cos}(\pi-\alpha)=-\text{ Cos }\alpha \end{array}\right\} \quad \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$



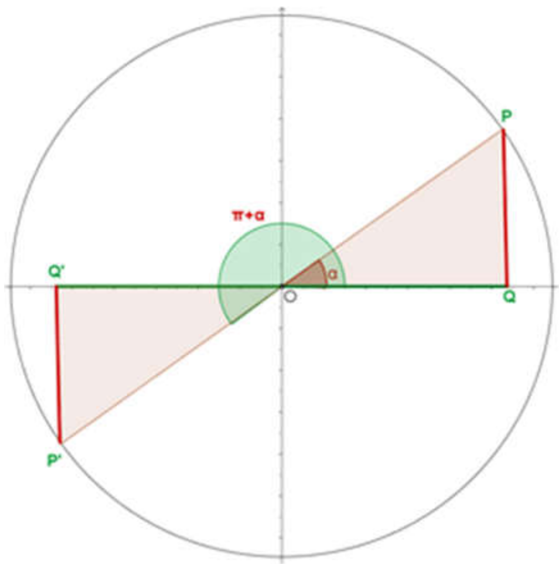
$$\text{sen}150^\circ=\text{sen}(180^\circ-30^\circ)=\text{sen}30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ=\tan(180^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

1.4.3.- Ángulos que difieren en 180°:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(\pi+\alpha)=-\text{sen }\alpha \\ \\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \end{array}\right\} \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$



Como ejemplo, trabajaremos las razones trigonométricas del ángulo de 210°:

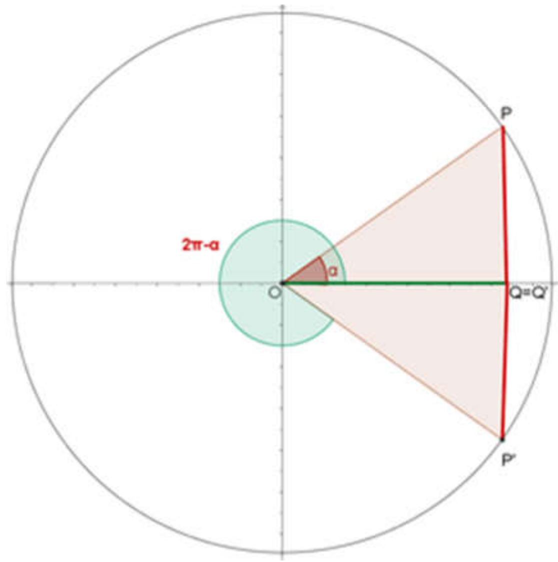
$$\text{sen } 210^\circ=\text{sen}(180^\circ+30^\circ)=-\text{sen}30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210^\circ=\tan(180^\circ+30^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.4.4.- Ángulos Opuestos:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha\\ \\ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha\end{array}\right\}\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$



Como ejemplo, trabajaremos las razones trigonométricas del ángulo de 330°:

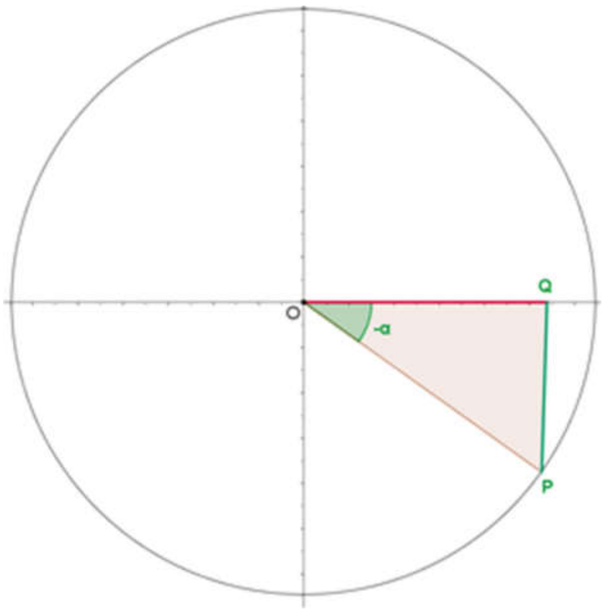
$$\operatorname{sen}330^\circ=\operatorname{sen}(360^\circ-30^\circ)=-\operatorname{sen}30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

1.4.5.- Ángulos Negativos:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha\\ \\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\end{array}\right\}\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$



Como ejemplo, para este caso, trabajaremos las razones trigonométricas del ángulo de -30°:

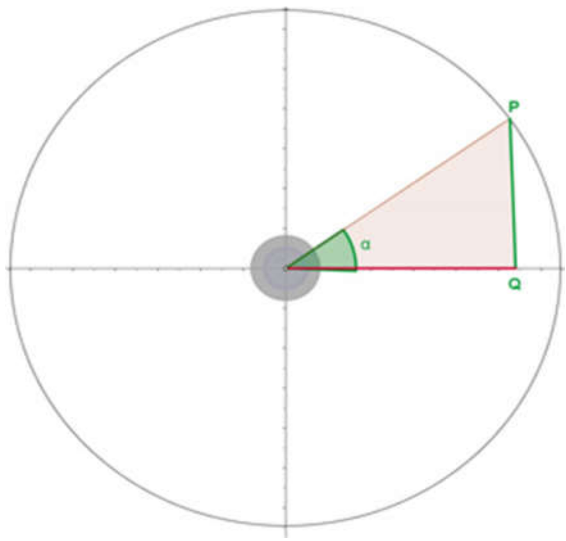
$$\operatorname{sen}(-30^\circ)=-\operatorname{sen}30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

1.4.6.- Ángulos Mayores de 360°:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(\alpha+2k\pi)=\operatorname{sen}\alpha\\ \\ \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha\end{array}\right\}\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$$



Como ejemplo, para este caso, trabajaremos las razones trigonométricas del ángulo de 750°, y antes dividiremos entre 360 para ver el número de vueltas:

$$\begin{array}{r|l}750^\circ & 360^\circ \\ \hline 30^\circ & 2\end{array}$$

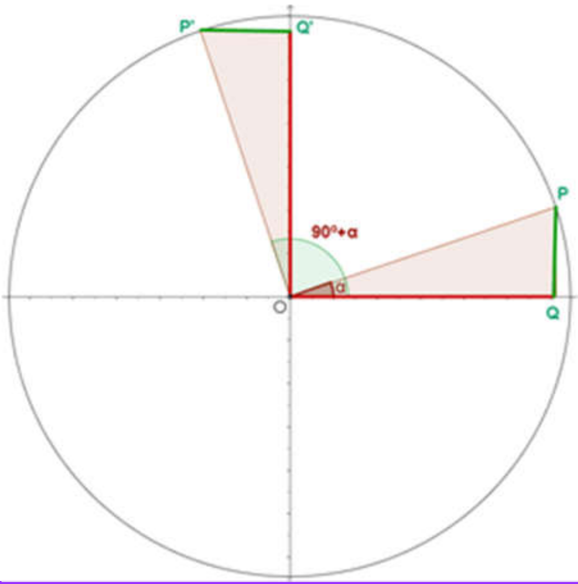
$$\text{sen } 750° = \text{sen}(2{\cdot}360° + 30°) = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 750° = \cos(2{\cdot}360° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 750° = \tan(2{\cdot}360° + 30°) = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

1.4.7.- Ángulos que difieren en 90°:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha \\ \\ \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\text{sen}\alpha \end{array}\right\} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$$



Como ejemplo, de este caso, trabajaremos las razones trigonométricas del ángulo de 120°:

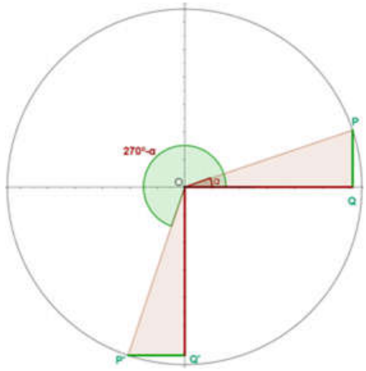
$$\text{sen } 120° = \text{sen}(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120° = \tan(90° + 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$$

1.4.8.- Ángulos que suman 270°:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha \\ \\ \text{Cos}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\text{sen}\alpha \end{array}\right\} \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$$

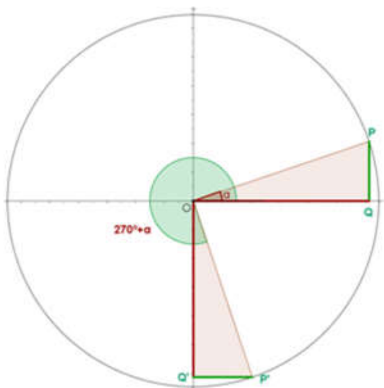


Como ejemplo, de este caso, trabajaremos las razones trigonométricas del ángulo de 240°:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 240° = \text{sen}(270° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 240° = \cos(270° - 30°) = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \tan 240° = \tan(270° - 30°) = \cot 30° = \sqrt{3}$$

1.4.9.- Ángulos que difieren 270°:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha \\ \\ \text{Cos}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \text{sen}\alpha \end{array}\right\} \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cot\alpha$$

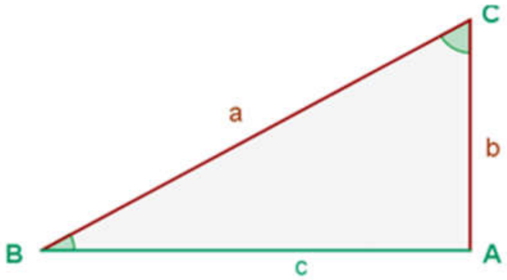


Como ejemplo, de este caso, trabajaremos las razones trigonométricas del ángulo de 300°:

$$\text{sen } 300° = \text{sen}(270° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300^\circ = \cos(270^\circ + 30^\circ) = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \tan 300^\circ = \tan(270^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

1.5.- Resolución de Triángulos Rectángulos.



Resolver un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de sus elementos (lados y ángulos) desconocidos. Para ello, nos valemos de las siguientes relaciones:

- Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$
- Los ángulos agudos son complementarios: $B + C = 90^\circ$
- Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

$$\text{Sen B} = \frac{b}{a} \qquad \text{Cos B} = \frac{c}{a} \qquad \tan B = \frac{b}{c} \qquad \tan C = \frac{c}{b}$$

Las dos primeras fórmulas nos aportan un resultado importante: El seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario.

En un triángulo rectángulo, conocemos siempre el valor del ángulo recto. El triángulo queda determinado cunado conocemos, además, al menos dos de sus elementos, uno de los cuales ha de ser un lado.

Ejemplo 1.1.- Resuelve el triángulo rectángulo del que sabemos que su hipotenusa es de 15 cm y el ángulo B es de 30°.

El ángulo C vale: C = 90 – 30 = 60°

Para determinar el cateto b, aplicamos $\text{sen B} = \frac{b}{a}$; por tanto: $\text{sen } 30^\circ = \frac{b}{15}$, de donde $b = 15 \cdot \text{sen } 30 = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7{,}5$ cm

Para calcular el cateto c, lo podemos hacer mediante el teorema de Pitágoras, o mediante el coseno de 30°.

- Mediante Pitágoras: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15^2 - 7{,}5^2} = 12{,}99$ cm
- Mediante: $\cos 30 = \frac{c}{15} \quad \Rightarrow \quad c = 15 \cdot \cos 30 = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12{,}99$ cm

Por tanto: A=90°, B=30°, C=60°, a=15 cm, b=7,5 cm y c=12,99 cm.

TRIGONOMETRÍA	Resolución de TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS					A = 90º
DATOS	INCÓGNITAS: Hallar los otros tres					
Dados tres valores	a	b	c	A	B	C
Hipotenusa y cateto	a	b	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	90º	$sen\, B = \frac{b}{a}$	$\cos C = \frac{b}{a}$
Dos catetos	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$	b	c	90º	$tg\, B = \frac{b}{c}$	$tg\, C = \frac{c}{b}$
Hipotenusa y ángulo	a	$b = a\ sen\, B$	$c = a \cos B$	90º	B	$C = 90 - B$
Cateto y ángulo opuesto	$a = \frac{b}{sen\, B}$	b	$c = \frac{b}{tg\, B}$	90º	B	$C = 90 - B$
Cateto y ángulo contiguo	$a = \frac{b}{\cos C}$	b	$c = b\ tg\, C$	90º	$B = 90 - C$	C
Dos ángulos	$\begin{cases} b = a\ sen\, B \\ c = a\ sen\, C \end{cases} \quad \forall a \in \Re$ Infinitas soluciones con lados proporcionales			90º	B	C
	Se usan de preferencia los datos originales			En todos los casos, Área del triángulo: $S = \frac{b\,c}{2} = \frac{b\,a\,sen\, C}{2}$		

ANEXO I

Valores de las razones trigonométricas más importantes:

α	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sen	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	½	0	-½	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-½	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	½	0	-½	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-½	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	± ∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	± ∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
Cosec	± ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	2	± ∞	-2	$-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	± ∞
Sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	± ∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	± ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	1
Cotg	± ∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	± ∞	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	± ∞