Tema 1

Repaso de Conceptos

Números Reales & Álgebra

MATEMATICAS I

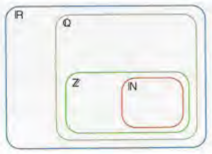
Raúl González

Tema 1: Números y Álgebra

1. TEMA 1:NÚMEROS REALES

1.1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

ESQUEMA DE CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

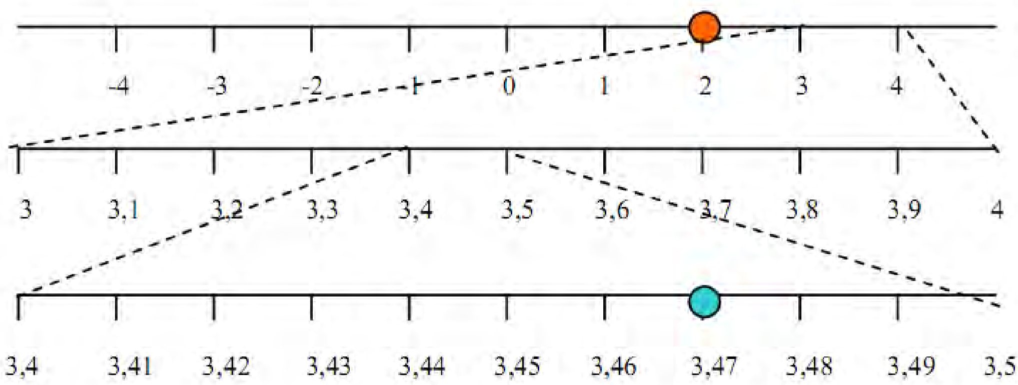


- REALES (R)
  - RACIONALES (Q)
    - ENTEROS (Z)
      - NATURALES (N) $\Rightarrow 0\,;4\,;\frac{24}{6};\sqrt{81}$......
      - ENTEROS NO NATURALES (Enteros negativos) $\Rightarrow -11\,;\frac{-24}{4};\sqrt[3]{-8}$....
    - FRACCIONARIOS (Racionales no enteros)
      - Fracciones: $\frac{3}{4},\frac{-5}{8}$...
      - Números decimales
        - Exactos: 0,31;...
        - Periódicos
          - Puros: $7,\widehat{1}$;...
          - Mixtos: $7,3\widehat{1}$,...
  - IRRACIONALES (I) $\Rightarrow \sqrt{2}\,;-\sqrt{3}\,;\sqrt[3]{5}\,;\pi$, decimales no periódicos.....

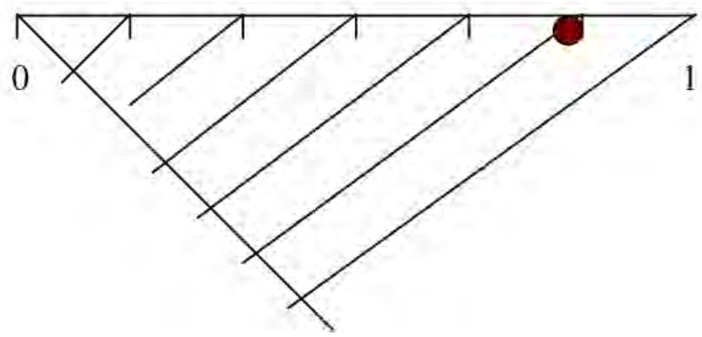
1.2. REPRESENTACIÓN SOBRE LA RECTA

La representación de un número real sobre la recta se hará de un modo u otro según el tipo de número que sea:

Entero o decimal exacto: 2; 3,47

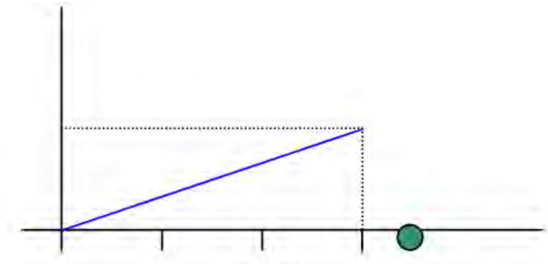


Decimal periódico: Puede expresarse en forma de fracción y, de este modo, se representa dividiendo cada unidad entre las partes que tenga el denominador y tomando tantas de esas partes como indique el numerador: 5/6, -8/5



Racional cuadrático: Construyendo triángulos rectángulos y teniendo el cuenta el

Teorema de Pitágoras: $\sqrt{2}\sqrt{6};\sqrt{10}$



1.3. INTERVALOS Y SEMIRECTAS.

1.3.1. INTERVALO ABIERTO DE EXTREMOS A Y B.

Es el conjunto de números comprendidos entre a y b, sin coger a éstos.
Se suelen representar de las siguientes formas:

(a,b) $\{ x \in R \ / \ a < x < b \}$

1.3.2. INTERVALO CERRADO DE EXTREMOS A Y B.

Es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluyendo a éstos.
Se suelen representar de las siguientes formas:

[a,b] $\{ x \in R \ / \ a \leq x \leq b \}$

1.3.3. INTERVALO SEMIABIERTO O SEMICERRADO.

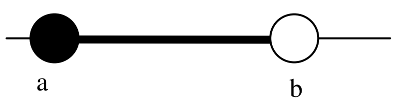
Son intervalos donde uno de sus extremos es abierto y el otro cerrado.
Se nos pueden presentar los siguientes casos:

(a,b], intervalo abierto en a y cerrado en b. Es el conjunto de números comprendidos entre a y b sin coger al a y tomando al b. Sus otras formas de representación son

$\{ x \in R \ / \ a < x \leq b \}$

[a,b), intervalo cerrado en a y abierto en b. Es el conjunto de números comprendidos entre a y b, cogiendo al a y no al b.
Sus otras formas de representación son

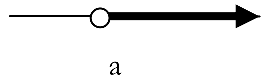
$\{ x \in R \ / \ a \leq x < b \}$



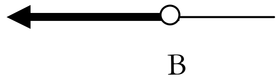
1.3.4. SEMIRECTAS.

Son intervalos donde uno de sus extremos es un número real y el otro es $\pm$
Tenemos los siguientes casos:

$[a, \infty) \equiv \{ x \in R / a \leq x \} \equiv$

$(a, \infty) \equiv \{ x \in R / a < x \} \equiv$ 

$(-\infty, b] \equiv \{ x \in R / x \leq b \} \equiv$ 

$(-\infty, b) \equiv \{ x \in R / x < b \} \equiv$ 

1.4. ENTORNOS

Se llama entorno de centro a y radio r, y se denota por Er(a) o E(a,r), al intervalo abierto (a-r, a+r).

Er(a) = (a-r, a+r)

Los entornos se expresan con ayuda del valor absoluto.
Er(0) = (-r, r) se expresa también |x|<0, o bien, -r < x < r.
Er(a) = (a-r, a+r) se expresa también |x-a|<0, o bien, a -r < x < a+r.

1.4.1. ENTORNO REDUCIDO

Se emplea cuando se quiere saber qué pasa en las proximidades del punto, sin que interese lo que ocurre en dicho punto.

E r(a) = { x (a-r, a+r), x ≠ a}*

1.5. VALOR ABSOLUTO.

Consideremos los números 5 y –5, estos dos números tienen el mismo valor sin el signo, o lo que es lo mismo, tienen el mismo valor absoluto.

El valor absoluto de un número a se designa por $|a|$ y coincide con el número si este es positivo o con el opuesto si este es negativo

$$|a| = \begin{cases} a........si.....a \geq 0 \\ -a.....si....a < 0 \end{cases}$$

Tomemos por ejemplos

|3| = 3
|-3| = -(-3) = 3
|6| = 6
|-6| = -(-6) = 6

Observad que para eliminar las barras del valor absoluto, nos tenemos que fijar en el signo de lo que vaya dentro de las barras del valor absoluto. Si es positivo, queda igual y si es negativo, cambiamos el signo de lo que vaya dentro.

El problema se nos presenta cuando no conozcamos el signo. Por ejemplo, resolver la siguiente ecuación con valor absoluto

$$|x| = 3$$

Para resolverla, lo primero es quitar el valor absoluto. Debemos conocer el signo de lo de dentro (x). Como no conocemos el valor de x, no conocemos su signo, no podemos quitar el valor absoluto.

En estos casos se supone que lo de dentro del valor absoluto puede presentar los dos signos, luego el problema tiene doble solución.

Suponemos en primer lugar que $x > 0$ ê

$|x| = 3 \Rightarrow x = 3$

Suponemos en segundo lugar que $x < 0$

$\Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$

Ejemplo:

Hallar la solución (es) de la siguiente ecuación: $|3x - 1|=5$

Suponemos $3x - 1<0 \Rightarrow -3x+1 = 5 \Rightarrow -3x = 4 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$

Suponemos ahora $3x-1>0 \Rightarrow 3x-1=5 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

1.6. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS.

1.- $a^0 = 1$	2.- $a^1 = a$	3.- $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$
4.- $(a^n)^m = a^{n.m}$	5.- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	6.- $a^m . a^n = a^{m+n}$
7.- $a^m : a^n = a^{m-n}$	8.- $(a.b.c)^d = a^d.b^d.c^d$	9.- $\left(\frac{a}{c}\right)^b = \frac{a^b}{c^b}$

Todo número entero que acabe en ceros, se puede expresar como producto del número sin los ceros, por una potencia de base 10 y exponente igual al número de ceros:

$250.000.000 = 25 . 10^7$ (notación científica)

Todo número decimal se puede expresar como producto del número sin la coma por una potencia de base 10 y exponente negativo igual al número de cifras decimales.

$0'000025 = 25 . 10^{-6}$

$14'567 = 14567 . 10^{-3}$

2. IGUALDADES NOTABLES.

1.- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 +2ab$	2.- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 – 2ab$
3.- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	4.- $(a-b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$
5.- $(a+b).(a-b) = a^2 – b^2$	

Ejemplos:

$\mathbf{(x+5)^2} = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$\mathbf{(2x-5)^2} = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

$\mathbf{(x^2-x+1)^2} = ((x^2-x)+1)^2 = (x^2-x)^2 + 1^2 + 2((x^2-x))1 =$

$= (x^2)^2 + (-x)^2 - 2x^2(-x) + 2(x^2-x) + 1 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

$\mathbf{(3x-2)} \cdot \mathbf{(3x+2)} = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$

3. DEFINICIÓN DE RADICAL.

Dada la ecuación $x^n = a$, llamamos raíz n-ésima de a, a una de las soluciones de dicha ecuación, y que se simboliza por $\sqrt[n]{a}$, donde n es el índice de la raíz y a el radicando.

3.1. Propiedades de los radicales

1.- $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$	**2.-** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	**3.-** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	**4.-** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

3.2. Simplificación de radicales

Dado $\sqrt[n]{a^m}$, si n y m tienen divisores en común, podemos simplificar el radical, por ejemplo:

$$\sqrt[16]{2^{12}} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3}$$

3.3. Reducción a índice común.

Obtener el índice común de varios radicales consiste en hallar el m.c.m. de los índices, dividir este mcm entre cada índice y el resultado multiplicarlo por el exponente del radicando.

Por ejemplo, reducir a índice común los siguientes radicales:

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{7}$$

El mcm(2,3,6) = 6 ê $\sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[6]{3^2}$, $\sqrt[6]{7}$

3.4. Racionalizar.

Racionalizar una fracción consiste en eliminar las raíces del denominador de una fracción multiplicando el numerador y el denominador por una expresión adecuada. Dicha expresión va en función de la expresión del denominador. Podemos distinguir dos casos:

1.- $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a.\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}.\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a.\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a.\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$

2.- $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)} = \frac{a\sqrt{b}+a\sqrt{c}}{b-c}$

Ejemplos: Racionalizar las siguientes expresiones:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{5.\sqrt{5^{3-2}}}{\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[3]{5^{3-2}}} = \frac{5.\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{5.\sqrt[3]{5}}{5} = \sqrt[3]{5}$$

$$\frac{7}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{7.\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{7\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{2-3} = -7\sqrt{2}-7\sqrt{3}$$

3.5. Extracción de factores de un radical.

Para extraer factores de un radical $\sqrt[n]{a^p}$, p debe ser mayor o igual que n. Se divide p entre n, el cociente nos dice cuántos factores salen y el resto nos indica cuántos se quedan:

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3.\sqrt[3]{3^2}$$

3.6. Introducción de factores en un radical.

Para introducir factores dentro de un radical, se eleva el factor al índice: Ej : $5.\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{5^4.2}$

3.6.1. Suma de radicales.

Para sumar o restar radicales, éstos deben ser semejantes, es decir, han de tener el mismo índice y el mismo radicando:

$$5.\sqrt{12} + 2.\sqrt{27} - 3\sqrt{75} = 5.\sqrt{2^2.3} + 2.\sqrt{3^3} - 3.\sqrt{5^2.3} = 5.2\sqrt{3} + 2.3\sqrt{3} - 3.5\sqrt{3} =$$

$=(10+6-15).\sqrt{3} = \sqrt{3}$

3.6.2. Producto y cociente de radicales

Para multiplicar y dividir radicales lo primero es reducir a índice común y, aplicando propiedades de radicales, reducir a un solo radical.

$$\frac{\sqrt{a.\sqrt[3]{a}}.\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^5}} = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{a^3.a}}.\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^5}} = \frac{\sqrt[6]{a^4}.\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^5}} = \frac{\sqrt[12]{a^8}.\sqrt[12]{a^9}}{\sqrt[12]{a^5}} = \frac{\sqrt[12]{a^{17}}}{\sqrt[12]{a^5}} = \sqrt[12]{\frac{a^{17}}{a^5}} = \sqrt[12]{a^{12}} = a$$

4. CONCEPTO DE LOGARITMO.

Sea a un número real positivo, no nulo y distinto de 1, y A otro número positivo no nulo. Se llama logaritmo en base a del número A, al exponente x a que debe elevarse la base a para obtener el número A.

Se representa por

$$\log_a A = x \rightarrow a^x = A$$

Ejemplos

1.- Hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 16 = x \rightarrow 2^x = 16 \rightarrow 2^x = 2^4 \rightarrow x = 4 \rightarrow \log_2 16 = 4$

b) $\log_{1/3} 9 = x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \rightarrow 3^{-x} = 3^2 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2$

2.- Calcular: $\log_2 128$, $\log_3 \sqrt{243}$, $\log_5 \left(\frac{5}{\sqrt[3]{5}}\right)$

De la infinidad de bases que podemos elegir para un logaritmo, hay dos que son, en la práctica, los más utilizados, los de base a = 10 y base a = e .

Base 10: Los logaritmos de base a = 10, se llaman ***Logaritmos decimales***, y se suele representar de la siguiente forma

4.1. Log A en la calculadora

Estos logaritmos decimales se pueden obtener directamente con la calculadora, usando la tecla $\boxed{\text{log}}$. Por ejemplo, si deseamos calcular el valor de log 245, procederíamos de la siguiente forma

245 $\boxed{\text{log}}$ → en la pantalla aparece 2'389166084 → log 245 = 2'389166084

Base e: Se llaman ***logaritmos neperianos*** y se representan por

4.2. Ln A en la calculadora

Estos logaritmos también se obtienen directamente usando la calculadora y con la tecla $\boxed{\text{ln}}$, por ejemplo, si deseamos obtener el valor de ln 245, teclearíamos

245 $\boxed{\text{ln}}$ → en la pantalla aparece 5'501258211

→ ln 245 = 5'501258211

4.3. Propiedades de los logaritmos.

Las siguientes propiedades de los logaritmos son fundamentales para poder operar con los mismos.

Las propiedades de los logaritmos son las propiedades de las potencias.

1.- $\log_a a = 1 \rightarrow a^1 = a$	2.- $\log_a 1 = 0 \rightarrow a^0 = 1$

3.- $\log_a a^x = x$ ➔ $a^x = a^x$ 4.- $a^{\log_a x} = x$ ➔ $\log_a x = \log_a x$

5.- Logaritmo de un producto ➔ $\log_a(A.B) = \log_a A + \log_a B$

6.- Logaritmo de un cociente ➔ $\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$

7.- Logaritmo de una potencia ➔ $\log_a A^n = n.\log_a A$

8.- Logaritmo de una raiz ➔ $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_a A$

Dominar estas propiedades, equivale a poder resover una gran cantidad de problemas.

Ejemplos:

1.- Hallar el valor de los siguientes logaritmos decimales sin usar la calculadora:

a) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}\log 10 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$

b) $\log 40 + \log 25 = \log(40.25) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$

c) $\log 80 - \log 8 = \log \frac{80}{8} = \log 10 = 1$

2.- Descomponer los siguientes logaritmos en logaritmos simples:

a) $\log (x.y.z) = \log x + \log y + \log z$

b) $\log\left(\frac{x^3.y}{z^2}\right) = \log (x^3.y) - \log z^2 = \log x^3 + \log y - \log z^2 =$

$= 3.\log x + \log y - 2 \log z$

3.- Reducir a un solo logaritmo las siguientes expresiones

a) $3 \log A + 5\log B - 2 \log Z = \log A^3 + \log B^5 - \log Z^2 = \log (A^3.B^5) - \log Z^2 = \log\left(\frac{A^3.B^5}{Z^2}\right)$

b) $\frac{3}{2} \log A + \log B + \frac{1}{2} \log Z = \log A^{3/2} + \log B + \log Z^{1/2} =$

$= \log \left(A^{3/2}.B.Z^{1/2}\right) = \text{lob} \left(\sqrt{A^3}.B.\sqrt{Z}\right)$

4.- Sabiendo que log 2 = 0'3010, hallar el valor de los siguientes logaritmos

a) $\log 8 = \log 2^3 = 3.\log 2 = 3.\ 0'3010 = 0'9030$

b) $\log 5 = \log(10/2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0'3010 = 0'699$

c) $\log 0'125 = \log\left(\frac{125}{1000}\right) = \log 125 - \log 1000 =$ $=\log\left(\frac{1000}{8}\right) - \log 1000 = \log 1000 - \log 8 - \log 1000 = -\log 2^3 =$
$= -3.\log 2 = -3 \,.\, 0'3010 = -\,0'9030$

4.4. Cambio de base.

Conocido el logaritmo de un número en una base, se puede hallar en cualquier otra base.

Supongamos que conocemos el logaritmo de cierto número A en dos bases distintas a y b, es decir, conocemos

$$\log_a A \quad y \quad \log_b A$$

Nos planteamos conocer la relación que hay entre ambos. Esta relación viene dada por la fórmula

$$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b}$$

Como consecuencia de esta última propiedad, se deduce que solamente necesitamos conocer los logaritmos en una sola base, los demás se obtienen aplicando el proceso anterior.

Para hallar un logaritmo en cualquier base, haremos un cambio a base 10, que sabemos hallar.

Hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 40 = \frac{\log 40}{\log 3} = \frac{1'6021}{0'4771} = 3'3580$

b) $\log_2 13'567 = \frac{\log 13'567}{\log 2} = \frac{1'1325}{0'3010} = 3'7625$

5. EXPRESIONES ALGEBRÁICAS.ECUACIONES Y SISTEMAS

5.1. Operaciones con polinomios.

5.1.1. SUMA:

Para obtener la suma de dos polinomios P(x) y Q(x) se suman coeficientes a coeficientes de la misma potencia.

Por ejemplo, consideremos los polinomios:

$P(x)= 5x^4+3x^3-3x^2+7x-1$ y $Q(x)=2x^3-5x+10$ ➔ $P(x)+Q(x) = 5x^4+5x^3-3x^2+2x+9$

5.1.2. PRODUCTO:

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), para multiplicar P(x).Q(x), se multiplica cada monomio de P(x) con cada uno de los monomios de Q(x) y después sumar los de igual grado.

Por ejmplo, consideremos los polinomios :

$P(x)= 5x^4+3x^2+7x-2$ y $Q(x)= 2x^3+3x^2-1$

➔ $P(x).Q(x)= 10x^7+15x^6-5x^4+6x^5+9x^4-3x^2+14x^4+21x^3-7x-4x^3-6x^2+2 =$

$= 10x^7+15x^6+18x^4+6x^5+17x^3-9x^2+7x+2$

5.1.3. DIVISIÓN:

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), para poder dividir P(x) entre Q(x), el grado de P(x) ha de ser mayor o igual que el de Q(x).

$$\begin{array}{l|l} P(x) & \underline{\ Q(x)\ } \\ & \ C(x) \\ R(x) & \end{array} \quad ➔ \ P(x) = Q(x).C(x)+R(x)$$

Consideremos los polinomios:

$P(x) = 4x^4-12x^3+7x-5$ y $Q(x)= 3x^2-6x$

Realicemos la división P(x):Q(x) ➔

$$➔ \begin{array}{rrrr|l} 4x^4 & -12x^3 & & +7x-5 & \underline{3x^2-6x} \\ -4x^4 & +8x^3 & & & \frac{4}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3} \\ \hline & -4x^3 & & & \\ & 4x^3 & -8x^2 & & \\ \hline & & -8x^2 & +7x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8x^2 - 16x \\ \hline \quad - 9x - 5 \end{array}$$ ➔ $C(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$ y el resto es $R(x) = -9x-5$

<u>División por un monomio de la forma (x-a):</u>

Para realizar esta división aplicamos la Regla de Ruffini

Por ejemplo, realicemos la división $(x^3-2x^2+3x-5):(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 3 & -5 \\ -2 & & -2 & 8 & -22 \\ \hline & 1 & -4 & 11 & \boxed{-27} \end{array}$$ ➔ $C(x) = x^2-4x+11$ y $R(x)=-27$

5.2. Descomposición Factorial.

Por ejemplo, factorizar el polinomio $P(x)= 3x^3-6x^2-3x+6$

➔ **Aplicamos Ruffini con los divisores de +6 que son :** $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ **, y nos quedamos con los que den de resto 0.**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -6 & -3 & 6 \\ 1 & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 3 & -3 & -6 & \boxed{0} \\ -1 & & -3 & 6 & \\ \hline & 3 & -6 & \boxed{0} & \\ 2 & & 6 & & \\ \hline & 3 & \boxed{0} & & \end{array}$$

➔ **$P(x) = (x-1).(x+1).(x-2).3$ siendo las raíces de $P(x)$ $x=1$, $x=-1$, $x=2$**

5.3. FRACCIONES ALGEBRAICAS.

DEF: Denominamos Fracción Algebraica al cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con } Q(x) \neq 0$$

Por ejemplo: $\frac{3x-5}{2x^2+x-1}$; $\frac{5}{7x^3-2x+3}$

5.3.1. <u>SIMPLIFICAR FRACCIONES ALGEBRAICAS:</u>

Para simplificar una fracción algebraica, hay que descomponer factorialmente los polinomios del numerador y del denominador, y después, eliminar los factores comunes de ambos.

Por ejemplo, simplificar la fracción:

$$\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+3x^2+2x}=\frac{x.(x^2+5x+6)}{x.(x^2+3x+2)}=\frac{\cancel{x}.\cancel{(x+2)}.(x+3)}{\cancel{x}.\cancel{(x+2)}.(x+1)}=\frac{x+3}{x+1}$$

5.3.2. OPERACIONES:

Para sumar o restar fracciones algebraicas, procedemos como en la suma de fracciones numérica, reducimos a común denominador.

Por ejemplo, realizar la siguiente diferencia : $\frac{3x-1}{x^2+2x+1}-\frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$

Obtenemos la descomposición factorial de cada denominador:

$x^2+2x+1 = (x+1).(x+1) = (x+1)^2$

$x^2-2x-3 = (x+1).(x-3)$

➔ **el mínimo común múltiplo es** $(x+1)^2.(x-3)$

➔ $$\frac{3x-1}{x^2+2x+1}-\frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3).(3x-1)-(x+1).(4x^2-1)}{(x+1)^2.(x-3)}=$$

$$=\frac{-4x^3-x^2-9x+4}{(x+1)^2.(x-3)}$$

6. ECUACIONES

En la resolución de una ecuación conviene seguir los siguientes pasos:

1.- Quitar denominadores.

2.- Quitar paréntesis.

3.- Pasar las incógnitas a un miembro y los números al otro.

4.- Despejar la incógnita.

Ejemplos:

1.- Resolver la ecuación

$$\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-4}{10}=2.(x-5)$$

=> 2.(3x+2) – 1.(4x – 4) = 20.(x – 5)

=> 6x + 4 – 4x + 4 = 20x –100 => -18x = -108

⇨ x = 6

6.1. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Las ecuaciones de 2º grado se reducen , utilizando las transformaciones en las ecuaciones, a la forma

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$
que es una ecuación completa de 2º grado en x.

La ecuación incompleta de 2º grado en x tienen la forma

1) $ax^2 = 0$ 2) $ax^2 + bx = 0$ 3) $ax^2 + c = 0$

Para resolver estas ecuaciones de 2º grado, aplicamos la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Aunque las ecuaciones incompletas se pueden resolver directamente despejando x.

a) $ax^2 = 0$ => $x^2 = \frac{0}{a} = 0$ => $x = 0$

b) $ax^2 + bx = 0$ => $x\,(ax+b) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax+b=0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$

c) $ax^2 + c = 0$ => $ax^2 = -c$ $\Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$ $\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones

a) $3x^2-48=0$ b) $x^2+3x=0$ c) $x^2+5x+6=0$ d) $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2$

El número de soluciones de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, pueden ser dos, una o ninguna. Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de segundo grado sin tener que resolverla, basta observar el valor de la expresión $b^2 - 4ac$, que se llama discriminante de la ecuación.

1.- Si $b^2 - 4ac > 0$ $\Rightarrow$ La ecuación tendrá dos soluciones distintas.

2.- Si $b^2 - 4ac = 0$ $\Rightarrow$ La ecuación una solución.

3.- Si $b^2 - 4ac < 0$ $\Rightarrow$ La ecuación no tiene solución.

6.2. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A DOS.

6.2.1. ECUACIONES BICUADRADAS.

Estas ecuaciones tienen la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Para resolver estas ecuaciones hacemos un cambio de variable, llamaremos $z = x^2$.

La ecuación queda de la forma $az^2 + bz + c = 0$

que es de 2º grado y ya sabemos como hallar el valor z. Una vez hallada la z, se calcula el valor de x sin más que despejarla en la ecuación

$$x^2 = z \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{z}$$

Ejemplo.

1.- Resolver la ecuación $x^4 + 20x^2 - 576 = 0$

Llamamos

$$z = x^2 \rightarrow z^2 + 20z - 576 = 0$$

$$\rightarrow z = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 2304}}{2} = \frac{-20 \pm 52}{2} = \begin{cases} z = 16 \\ z = -36 \end{cases}$$

Hallemos ahora el valor de x

1.- $z = 16 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

2.- $z = -36 \Rightarrow x^2 = -36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-36} \notin R$ no hay solución.

2.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

3.- El área de un rectángulo mide 48 cm^2 y la diagonal mide 10 cm. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?.

6.2.2. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE POLINOMIOS A LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A DOS.

Supongamos que tenemos el polinomio $P(x)=x^3-4x^2+x+6$. Si igualamos dicho polinomio a cero, obtenemos una ecuación polinómica.

$$x^3-4x^2+x+6=0$$

Podemos aplicar todo lo estudiado con el cálculo de raíces de un polinomio, para calcular las soluciones de estas ecuaciones.

Para resolver la ecuación anterior podemos aplicar la factorización de polinomios, aplicamos la regla de Ruffini.

Los divisores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	0

$\Rightarrow$ $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ $\Rightarrow$ $(x+1).(x^2 - 5x + 6) = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=2 \end{array}\right\}$$

Ejemplos:

1.- Resolver la ecuación $x^3-3x^2+2x=0$

Solución: **Sacamos factor común**

$$\Rightarrow x(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=1 \end{array}\right\}$$

2.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-7x^2+3x=0$ b) $x^3-2x^2-9x+18=0$

6.3. ECUACIONES RACIONALES.

Hay veces que en una ecuación puede aparecer la variable x en el denominador. En estos casos se procede de forma similar a cuando trabajamos con fracciones algebraicas.

- **Se eliminan los denominadores.**
- **Se resuelve la ecuación.**
- **Las soluciones obtenidas se comprueban en la ecuación original. Las que la verifican on las soluciones buscadas.**

Ejemplos:

Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=3$$

Solución:

$$\frac{x.(x+1)}{(x-1).(x+1)}+\frac{2x.(x-1)}{(x-1).(x+1)}=\frac{3.(x-1).(x+1)}{(x-1).(x+1)} \rightarrow$$

$\rightarrow$ $x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$ $\rightarrow$ $-x = -3$ $\rightarrow$ $x = 3$

6.4. ECUACIONES IRRACIONALES.

Son aquellas ecuaciones donde la incógnita aparece, en alguno de sus términos, bajo el signo radical.

Lo primero que debemos hacer es aislar la raíz en un miembro y elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación. Si queda algún radical, repetimos el proceso. De esta forma, llegaremos a una ecuación del tipo de las anteriores, que ya sabemos cómo resolverlas.

1.- Resolver la ecuación

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$$

=> $\left(\sqrt{x+5}\right)^2=\left(5-\sqrt{x}\right)^2$ => $x + 5 = 25 + x - 10\sqrt{x}$

=> $-20 = -10\sqrt{x}$ => $2 = \sqrt{x}$ => $4 = x$

2.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x+\sqrt{5x+10}=8$ b) $7 + 2x = 1 + x + 3 + 2\sqrt{3+x}$

6.5. ECUACIONES EXPONENCIALES.

Una ecuación exponencial es aquella donde la incógnita aparece en el exponente.

Son ecuaciones exponenciales

$2^x = 8 \qquad 3^{x+2} + 81 = 0 \qquad 5^{2x} - 6.5^x + 5 = 0$

Para resolver estas ecuaciones distinguiremos dos apartados:

6.5.1. ECUACIONES DONDE LA INCÓGNITA APARECE EN UN SOLO EXPONENTE.

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x+1} = 8$ **b) $4^{x+1} - 8 = 0$**

a) $2^{x+1} = 8 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2$

a) $4^{x-1} = 8 \Rightarrow 2^{2x-2} = 2^3 \Rightarrow 2x - 2 = 3 \Rightarrow 2x = 5$
$\Rightarrow x = 5/2$

Puede ocurrir que no podamos descomponer todos los miembros en potencias de la misma base, por ejemplo en:

$2^x = 127$

En estos casos, para despejar x, tomaremos previamente log

$\text{Log } 2^x = \log 127$

$$\Rightarrow \quad x. \text{Log } 2 = \log 127 \Rightarrow x = \frac{\log 127}{lo2} = \frac{2'1038}{0'3010} = 0'6332$$

6.5.2. ECUACIONES DONDE LA INCÓGNITA APARECE EN MÁS DE UNA POTENCIA.

Son ecuaciones de este tipo

$2^{x+3} + 4^{x+1} - 320 = 0, \qquad 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

En este tipo de ecuaciones, todas las potencias que tengan en el exponente la incógnita x, se descompone en potencias de la misma base. A continuación, y haciendo uso de las propiedades de las potencias, debemos conseguir que en el exponente aparezca tan sólo x. Posteriormente, hacemos un cambio de variables, llamamos z a la potencia que tiene en el exponente x, quedando una ecuación algebraica simple de resolver.

Ejemplo:

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x+3} + 4^{x+1} - 320 = 0$ **b) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$**

a) $2^{x+3} + 4^{x+1} - 320 = 0$ ➔ $2^{x+3} + 2^{2x+2} - 320 = 0$ ➔

➔ $2^x.8 + 2^{2x}.4 - 320 = 0$ ➔ $8.2^x + 4.(2^x)^2 - 320 = 0$

➔ llamamos $z = 2^x$ ➔ $8.z + 4.z^2 - 320 = 0$

➔ $z^2 + 2z - 80 = 0$

➔ $z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+320}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} z_1 = 8 \\ z_2 = -10 \end{array} \right.$

➔ Una vez hallada z, hallamos x

1) $2^x = 8$ ➔ $2^x = 2^3$ ➔ $x = 3$

2) $2^x = -10$ ➔ no tiene solución.

b) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$ ➔ $\dfrac{2^x}{2} + 2^x + 2^x.2 = 7$ ➔

➔ llamamos $z = 2^x$ ➔ $\dfrac{z}{2} + z + 2z = 7$ ➔ $z + 2z + 4z = 14$ ➔

➔ $7z = 14$ ➔ $z = 2$ ➔ $2^x = 2$ ➔ $x = 1$

6.6. ECUACIONES LOGARÍTMICAS.

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) log x + log (x+3) = 2.log(x+1)
b) 2.logx – 2. Log(x+1) = 0

a) $\log x + \log(x+3) = 2.\log(x+1)$ ➔ $\log(x^2+3x) = \log(x+1)^2$ ➔

➔ $x^2 + 3x = x^2 + 1 + 2x$ ➔ $3x - 2x = 1$ ➔ $-x = 1$ ➔ $x = -1$

b) $2.\log x - 2..\log(x+1) = 0$ ➔ $\log x^2 - \log(x+1)^2 = 0$ ➔

➔ $\log \dfrac{x^2}{x^2+2x+1} = \log 10^0$ ➔ $\dfrac{x^2}{x^2+2x+1} = 1$ ➔ $x^2 = x^2 + 2x + 1$ ➔

➔ $-2x = 1$ ➔ $x = -1/2$

6.7. SISTEMAS DE ECUACIONES . MÉTODO DE GAUSS.

6.7.1. ESTUDIAR EL CARÁCTER DE UN SISTEMA.

Todo sistema de ecuaciones puede presentar o no soluciones, y en caso de **tener soluciones, puede tener una o muchas.**

Los sistemas que tengan soluciones se dicen que son Sistemas Compatibles.
Si la solución es única, se llaman Sistemas Compatibles Determinados**.**
Si hay más de una solución se llaman Sistemas Compatibles Indeterminados**. Los sistemas que no tiene solución se llaman** Sistemas Incompatibles.

Estudiar el carácter de un sistema es estudiar su compatibilidad o incompatibilidad.

Ejemplos.

El sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ 5x+2y=12 \end{array}\right\}$$ **es un SCD, pues tiene una única solución (2,1)**

El sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ 4x-6y=2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} -4x+6y=-2 \\ ....4x-6y=2 \end{array}\right\}$$ **===> 0 = 0 => es un SCI, tiene infinitas soluciones**

El sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ 4x-6y=3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} -4x+6y=-2 \\ ...4x-6y=3 \end{array}\right\}$$

0 = 1 Contradicción

es un S.I., sistema incompatible, no tiene solución.

6.7.2. MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss es el más apropiado cuando tenemos que resolver sistemas lineales con más de dos ecuaciones . En esencia, este método consiste en transformar el sistema inicial en otro equivalente de forma que este último sea más senciallo de resolver.

1.- Resolver mediante el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}2x-5y-4z=0\\x+3y-z=2\\x+2y+z=6\end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}2x-5y-4z=0\\x+3y-z=2\\x+2y+z=6\end{array}\right\} \xrightarrow[E_1 \leftrightarrow E_2]{} \left.\begin{array}{l}x+3y-z=2\\2x-5y-4z=0\\x+2y+z=6\end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{-2E_1+E_2\\-1E_1+E_3}]{} \left.\begin{array}{l}x+3y-z=2\\..-11y-2z=-4\\.....-y+2z=4\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+3y-z=2\\..-11y-2z=-4\\.....-y+2z=4\end{array}\right\} \xrightarrow[E_2 \leftrightarrow E_3]{} \left.\begin{array}{l}x+3y-z=2\\......-y+2z=4\\..-11y-2z=-4\end{array}\right\} \xrightarrow[-11E_2+E_3]{} \left.\begin{array}{l}x+3y-z=2\\......-y+2z=4\\.............-24z=-48\end{array}\right\}$$

➔ **z=2** ➔ **y=0** ➔ **x=4**

➔ **Solución (4,0,2)**

2.- Resolver los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{l}3x-4y+2z=0\\2x-3y+z=0\\2x-y+3z=0\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}-2x-4y+7z=1\\9x-y+3z=0\\-5x+3y-2z=-1\end{array}\right\}$$

6.7.3. SISTEMAS NO LINEALES.

En general, el problema de la resolución de sistemas lineales casi nunca presenta demasiados problemas, pero con los sistemas no lineales, la cosa cambia. Resolver un sistema de ecuaciones no lineales es bastante complicado y laborioso. En este curso, vamos a limitarnos al estudio de algunos casos particulares.

Sistemas no lineales de dos ecuaciones en las cuales una ecuación es lineal y la otra es de segundo grado.

$$\left.\begin{array}{l}3x+y=5\\x^2-y^2=3\end{array}\right\}$$

Para resolver este tipo de sistema, el método de sustitución es el más apropiado; se despeja una variable de la ecuación lineal y se sustituye en la ecuación no lineal, resultando una ecuación de segundo grado. Una vez resuelta esta ecuación, volvemos a la primera ecuación y obtenemos los valores de la otra variable.

$$\left.\begin{array}{l}3x+y=5\\ x^2-y^2=3\end{array}\right\}$$ ➔ **y=5-3x ➔ x^2 – $(5\text{-}3x)^2$ = 3 ➔ x^2 – (25 + $9x^2$ –30x) = 3**

➔ **-8x^2 +30x-28=0 ➔ 4x^2-15x+14=0 ➔** $x=\dfrac{15\pm\sqrt{225-224}}{8}=\begin{cases}x=2\\ x=\dfrac{7}{4}\end{cases}$

➔ **si x=2 ➔ y=-1 ➔ Solución (2,-1)**

➔ **si x=$\frac{7}{4}$ ➔ y = $-\frac{1}{4}$ ➔ Solución** $\left(\frac{7}{4},-\frac{1}{4}\right)$

6.8. INECUACIONES DE 1ER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Resolver la inecuación

2(x + 1) – 3 (x – 2) < x + 6

➔ 2x + 2 – 3x + 6 < x + 6 ➔ 2x – 3x – x < 6 – 2 – 6

➔ - 2x < -2 ➔ x > 1 ➔ x > 1

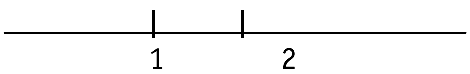
➔ La solución de la inecuación es x ∈ $(1,\infty)$

6.9. INECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Resolver la inecuación $x^2 - 3x + 2 \le 0$

Hallamos las raíces de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\end{cases}$$



Los tres intervalos en los que queda descompuesta la recta son $(-\infty,1]$, [1,2], $[2,\infty)$. Tomamos un valor de cada intervalo y lo sustituimos en la inecuación:

➔ x=0 ➔ $0^2 - 3.0 + 2 = 2$ ➔ no verifica la inecuación

➔ x=1’5 ➔ 1’25 – 4’5 + 2 = - 1’25 ≤ 0 ➔ si verifica la inecuación

➔ x = 3 ➔ 9 – 9 + 2 = 2 ➔ no verifica la inecuación

➔ la solución es el intervalo [1,2] ➔ x ∈ [1,2]

El poner corchete o paréntesis en los intervalos depende de si en la desigualdad aparece el signo igual o no.

6.9.1. INECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO SUPERIOR A DOS.

Resolver $\mathbf{x^3-x^2-6x < 0}$

Solución:

Tenemos que $x^3-x_2-6x = x.(x+2).(x-3) < 0$

$-\infty$ -2 0 3 ∞

x	-	-	+	+
x+2	-	+	+	+
x-3	-	-	-	+
	-	+	-	+

➔ La solución es $x \in (-\infty,0)\cup(0,3)$

6.10. INECUACIONES FRACCIONARIAS.

Toda inecuación fraccionaria de primer grado con una incógnita se reduce a una expresión del tipo

$$\frac{ax+b}{cx+d} <,>,\leq,\geq 0$$

Veamos con un ejemplo cómo se resuelven estas inecuaciones:

Resolver la inecuación $\frac{2x-3}{x+1} > 1$

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 ====> \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 ====>$$

$$====> \frac{2x-3-x-1}{x+1} > 0 ====> \frac{x-4}{x+1} > 0$$

Hallamos los valores que nos anule el numerador (x=4) y el denominador (x=-1), y construimos la siguiente tabla

$-\infty$ -1 4 $+\infty$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,4)$	$(4,\infty)$
X – 4	-	-	+
X + 1	-	+	+

	+	-	+

En los intervalos, si la desigualdad no lleva el igual, se pondrán en todos paréntesis. Pero si la desigualdad es $\leq ó \geq$, los números procedente del numerador llevarán corchetes y los del denominador paréntesis.

De cada intervalo tomamos un valor y lo sustituimos en las expresiones del numerador y denominador, apuntando el signo resultante. Al final aplicamos la regla de los signos. Si la desigualdad es < 0 ó ≤ 0 tomaremos como solución los intervalos donde haya quedado el signo (-). Si la desigualdad es > 0 ó ≥ 0, tomaremos como solución los intervalos donde haya quedado el signo (+).

En nuestro caso, la solución está en los intervalos $(-\infty,-1) \cup (4,\infty)$

6.11. SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA.

Todo sistema formado por dos o más inecuaciones, recibe el nombre de sistema de inecuaciones.

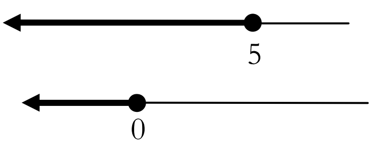
Para resolverlo, resolvemos cada inecuación por separado, representamos gráficamente cada solución y tomamos como solución del sistema la zona común entre ellas.

Ejemplo.

Resolver los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{matrix} 3x-7\leq 8 \\ 2x+2\leq 2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} 3x\leq 15 \\ 2x\leq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} x\leq 5 \\ x\leq 0 \end{matrix}\right\}$

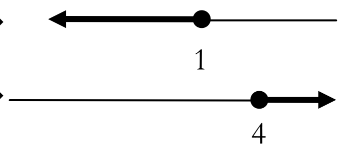
$x \leq 5$ ➔
$x \leq 0$ ➔



Si montamos un dibujo en el otro, la zona común es $(-\infty,0]$ ➔ solución.

b) $\left.\begin{matrix} 3x+5\leq 8 \\ 2x-5\geq 3 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} 3x\leq 3 \\ 2x\geq -8 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} x\leq 1 \\ x\geq 4 \end{matrix}\right\}$

$x \leq 1$ ➔
$x \geq 4$ ➔



Si montamos una región sobre la otra, observamos que no hay zona común => el sistema no tiene solución.

Repaso número real. Intervalos:

1. Separar los siguientes números en racionales o irracionales, indicando, de la forma más sencilla posible, el porqué:

$$\frac{1}{8} \qquad \frac{-}{3} \qquad \sqrt{5} \qquad 2{,}6 \qquad 0 \qquad -3 \qquad -\frac{25}{3} \qquad \sqrt{13} \qquad 0{,}1 \qquad 6{,}\widehat{4} \qquad 534 \qquad 1{,}41421356\,2\ldots$$

(Soluc: $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$)

2. **a)** Representar sobre la misma recta real los siguientes racionales:

$$\frac{3}{2} \qquad -3 \qquad 0{,}\widehat{6} \qquad \frac{5}{6} \qquad -\frac{3}{4} \qquad \frac{11}{5} \qquad 2{,}25 \qquad \frac{19}{6} \qquad 3{,}\widehat{9}$$

b) Construir $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ y $\sqrt{10}$ sobre la recta real (no necesariamente sobre la misma), mediante regla y compás, y la aplicación del teorema de Pitágoras.

3. Completar:

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
1		[-1,3]	
2			
3			
4		[-2,1)	
5			{x∈IR/ 1<x≤5}
6			
7			{x∈IR/ x<2}
8		(0,∞)	
9			
10		(-1,5)	
11			{x∈R/ x≤0}
12		[2/3,∞)	

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
13			{x∈IR/ -2<x≤2}
14			{x∈IR/ |x|<3}
15			{x∈IR/ |x|K3}
16			
17		[-1,1]	
18			{x∈IR/ x<-1}
19			
20		(-∞,-2)U(2,∞)	
21		(-∞,2)U(2,∞)	
22			{x∈IR/ |x|≤5}
23		[-2,2]	
24			

Repaso fracciones, potencias y raíces:

4. Operar, simplificando en todo momento:

$$\frac{\frac{5}{4}-\frac{3}{5}:\left[2+\frac{3}{5}\left(\frac{6}{9}:\frac{3}{4}\right)\right]}{\frac{5}{4}:\frac{3}{5}\left(2+\frac{3}{5}:\frac{6}{9}\right)-\frac{3}{4}}=$$

5. Completar:

$a^m \cdot a^n =$

$\frac{a^m}{a^n} =$

$\left(a^m\right)^n =$

$(a \cdot b)^n =$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

$a^0 =$

$a^{-n} =$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$

$1^n =$

$(-1)^{par} =$

$(-1)^{impar} =$

$(\text{base negativa})^{\text{par}} =$

$(\text{base negativa})^{\text{impar}} =$

Añadir estas fórmulas al formulario matemático de este curso. Utilizando las propiedades anteriores, simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\left(2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 2^3\right)^3}{\left[\frac{(1/3)^{-2}}{3}+1\right]^3}=$$ *(Sol: 1)*

6. Completar:

Definición de raíz n-ésima	$\sqrt[n]{a}=x \Leftrightarrow$
Casos particulares de simplificación	$\sqrt[n]{x^n}=$
	$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=$
Equivalencia con una potencia de exponente fraccionario	$\sqrt[n]{x^m}=$
Simplificación de radicales/Índice común	$\sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}}=$
Producto de raíces del mismo índice	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=$
Cociente de raíces del mismo índice	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=$
Potencia de una raíz	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=$
Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=$
Introducir/Extraer factores	$x\cdot\sqrt[n]{a}=$

Añadir estas fórmulas al formulario matemático de este curso. Utilizando las propiedades anteriores, simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\left(\sqrt{a^3}\right)^3}{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^3}}}=$$ *(Sol: $\sqrt[3]{a^{13}}$)*

Repaso polinomios y fracciones algebraicas:

7. Dados $P(x)=4x^5-8x^4+2x^3+2x^2+1$ y $Q(x)=4x^3-4x^2+2x$, se pide:

a) Extraer el máximo factor común de Q(x)

b) $P(x)-2x\cdot Q(x)$

c) $Q(x)\cdot Q(x)$

d) $P(x) : Q(x)$

8. Simplificar: $\frac{x^4-5x^2-36}{x^2-9}$ *(Sol: x^2+4)*

9. Operar y simplificar: $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}-\frac{12}{x^2-4}$ $\left(Sol: \frac{2x+3}{x+2}\right)$

Repaso ecuaciones, sistemas e inecuaciones:

10. Resolver:

a) $3\left(\frac{11x}{6}-x\right)-4=2x-3\left(1-\frac{x}{6}\right)$

b) $\left.\begin{array}{l}\frac{20x+7}{9}-\frac{4x+y}{2}=2\\ \frac{7x+1}{4}-\frac{2x-2y}{6}=x\end{array}\right\}$ *(Sol: x=1, y=−2)*

c) $\frac{(2x^2+3)(2x^2-3)}{2}-\frac{(2x-3)^2}{3}=4x-\frac{41}{6}$ *(Sol: x=±1)*

d) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$ *(Sol: x=114)*

e) $\frac{x-2}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-3x+2}=\frac{x-1}{x-2}$ *(Sol: x=−3)*

f) $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ x^2-2x+3y=-1\end{array}\right\}$ *(Sol: x_1=4, y_1=−3; x_2=1, y_2=0)*

g) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{5x+6}{6}<\frac{(x+3)(x-3)}{3}+6$ *[Sol: x∈(0,7)]*

h) $\left.\begin{array}{l}\frac{5-3x}{4}-3(x+4)\le\frac{3(x+2)}{2}+2\\ \frac{2(2x+1)-(x-1)}{3}-\frac{2x+1}{5}<2\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[-3,2)]*

i) $\frac{x+3}{x-7}\le\frac{1}{2}$ *[Sol: x∈[-13,7)]*

Miscelánea (I):

11. Indicar cuál es el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$); en caso de ser $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$, razonar el porqué:

$\frac{-}{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ 0,0015 -10 $\frac{5}{6}$ $2,\widehat{3}$ 2,02002000 2...

(Soluc: $\mathbb{I}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{N}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$)

12. Representar en la recta real los siguientes intervalos y definirlos empleando desigualdades:

a) [2,4]	**d)** (-1, 3)	**g)** (-∞,3]	**j)** (-∞,-2]
b) (1,6)	**e)** (-2,2)	**h)** [-3,3]	
c) [1,5)	**f)** (0,∞)	**i)** (5/3,∞)	

☞ *Ejercicios libro: pág. 29: 3 y 4; pág. 47: 36, 37 y 38*

13. Operar, simplificando en todo momento:

a) $\frac{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}{2}:\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}:\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}=$

b) $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left[(-2)^3\right]^2 + (-3)^3 \cdot (-3)^2} =$ *(Sol: –4/179)*

c) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}\sqrt{4\sqrt{2}}}}{\left(\sqrt[8]{2}\right)^2} =$ *(Sol: $\sqrt[24]{2^{25}}$)*

14. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) El valor numérico de P(x) para x=–2

b) La factorización de R(x)

c) P(x)+Q(x)+R(x) *(Sol: $6x^3+13x^2-5x+11$)*

d) P(x)–Q(x)–R(x) *(Sol: $2x^3-x^2+x-5$)*

e) P(x)+3 Q (x) – 2 R (x) *(Sol: $10x^3-8x^2-x+22$)*

f) P(x) **:** (x+2) por Ruffini

15. Operar y simplificar:

$$\dfrac{\dfrac{x^3 - x}{2x^2 + 6x}}{\dfrac{5x^2 - 5x}{2x + 6}} =$$ $\left(Sol:\ \dfrac{x+1}{5x}\right)$

16. Resolver:

a) $\dfrac{1+96\frac{1}{480}}{96x} = \dfrac{1}{1600}$ *(Sol: x=20)*

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=6 \\ 2x+y-3z=-9 \\ -x+2y+z=-2 \end{array}\right\}$ *(Sol: x=1, y=-2; z=3)*

c) $\dfrac{3x^2+1}{6x+1} = \dfrac{6x-1}{3x^2-1}$ *(Sol: x=0; x=±2)*

d) $2\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 4$ *(Sol: x=5; x=13/9)*

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}\,x - \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ *(Sol: x=±√2)*

f) $\left.\begin{array}{l} 2x-y=1 \\ x^2+3xy=0 \end{array}\right\}$

g) $\dfrac{(3x+1)(3x-1)}{6} + 4x - 5 \geq \dfrac{(x+2)(x-2)}{2} + \dfrac{11}{6}$ *[Sol: x∈(-∞,-5]U[1,∞)]*

h) $\left.\begin{array}{l} 2x-10 > -x+2 \\ 12-4x > -3x+2 \\ 3(x+2) \geq 2(x+6) \end{array}\right\}$ *[Sol: x∈(6,10)]*

i) $\dfrac{1}{x} \leq x$ *[Sol: x∈[-1,0)U[1,∞)]*

17. Señalar cuáles de los siguientes números son racionales o irracionales, indicando el porqué:

a) 3,629629629....	**c)** 5,216968888...	**e)** 7,129292929...
b) 0,130129128...	**d)** 0,123456789...	**f)** 4,101001000...

(Soluc: $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$)

18. Representar en la recta real los siguientes conjuntos numéricos y nombrarlos empleando intervalos:

a) $\{x\in IR/ -2<x\leq 3\}$	**d)** $\{x\in IR/ x<0\}$	**g)** $\{x\in IR/ x>-3\}$	**j)** $\{x\in IR/ \|x\|\geq 2\}$
b) $\{x\in IR/ 1\leq x\leq 4\}$	**e)** $\{x\in IR/ \|x\|\leq 3\}$	**h)** $\{x\in IR/ x\leq 5\}$	**k)** $\{x\in IR/ \|x\|=2\}$
c) $\{x\in IR/ x\geq 2\}$	**f)** $\{x\in IR/ \|x\|>4\}$	**i)** $\{x\in IR/ \|x\|<5\}$	

19. Operar, simplificando en todo momento:

a) $$\frac{\frac{4}{3}:\frac{7}{4}+\left(7+\frac{2}{5}\right):\frac{7}{3}}{\frac{4}{3}+\frac{7}{4}\left(7-\frac{2}{5}\right)\frac{7}{3}}=$$ *(Sol: 236/1697)*

b) $$\frac{\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}\left(\frac{5}{2^3}\right)^{-1}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}}+(-4)^{-3}}{1+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{4^{-3}}}=$$ *(Sol: –1/64)*

c) $$\frac{\left(\sqrt{125}\right)^3}{\sqrt{5\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{25}}}=$$ *(Sol: $\sqrt[12]{5^{41}}$)*

20. Dados $P(x)=6x^4+11x^3-28x^2-15x+18$ y $Q(x)=3x-2$, se pide:

a) Factorizar P(x), por Ruffini

b) $Q^5(x)$, por Tartaglia

c) $P(x)\cdot Q(x)-2x^2Q(x)$

d) $P(x):Q(x)$

21. Operar y simplificar:

$$\frac{1}{x^2-9x+20}-\frac{1}{x^2-11x+30}+\frac{1}{x^2-10x+24}$$ $\left(Sol:\ \frac{x-7}{x^3-15x^2+24x-120}\right)$

22. Resolver:

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ x-2y+3z=13 \\ -x+y+4z=9 \end{array}\right\}$$ *(Sol: x=2, y=-1; z=3)*

b) $$\frac{5}{x+2}=\frac{3}{2}-\frac{x}{x+3}$$ *(Sol: $x_1=3$; $x_2=-4$)*

c) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 2ax \\ x^2 = ay \end{array}\right\}$ *(Soluc : $x = a\cdot\sqrt[3]{2}$, $y = a\cdot\sqrt[3]{4}$)*

d) $1-\frac{3x-7}{5} > \frac{5x+4}{15} - \frac{x-1}{3}$ *(Sol: x<3)*

e) $3x^2+15x+21<0$ *(Sol: ∄ soluc.)*

f) $3x^2+15x+21>0$ *(Sol: $\forall x \in \mathbb{R}$)*

g) $\frac{(x+2)(x-2)}{4} - \frac{x^2}{2} < \frac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4} - 2$ *[Sol: $x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$]*

h) $(x^2-4)(x^2+4)<0$

23. Separar los siguientes números en racionales e irracionales, indicando el porqué:

$$\frac{1}{2} \quad - \quad \sqrt{13} \quad \frac{2{,}6}{2} \quad \sqrt{169} \quad 0{,}\widehat{7} \quad \frac{3}{5} \quad 0{,}494949.. \quad \sqrt{7} \quad 3{,}75 \quad -13 \quad 6{,}2\widehat{4} \quad 1{,}732050..$$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 28: 1 y 2***

24. Hallar la U e ∩ de los siguientes intervalos:

a) A=[-2,5)	**c)** E=(-∞,0]	**e)** I=(-∞,0)	**g)** M=[-3,-1)
B=(1,7)	F=(-3,∞)	J=[0,∞)	N=(2,7]
b) C=(0,3]	**d)** G=[-5,-1)	**f)** K=(2,5)	**h)** O=(-3,7)
D=(2,∞)	H=(2,7/2]	L=(5,9]	P=(2,4]

25. Calcular, **aplicando, siempre que sea posible, las propiedades de las potencias,** y simplificando en todo momento. **Cuando no sea ya posible aplicar las propiedades de las potencias, debido a la existencia de una suma o resta, pasar la potencia a número y operar**:

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^2 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{4}{9}\right)^2\right]^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{3^4}\; 2^{-1}} =$$

(Sol: –608/81)

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 45: 7, 8, 12 y 14***

26. a) Extraer factores y simplificar:

$$5\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{81}} =$$

(Sol : $\frac{5}{3}\sqrt[3]{2}$)

b) Sumar, reduciendo previamente a radicales semejantes:

$$5\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3} - \sqrt{300} =$$

(Sol : $-\frac{17}{2}\sqrt{3}$)

c) Racionalizar y simplificar:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{125}} =$$

(Sol : $\frac{8\sqrt{5}}{25}$)

$\sqrt[3]{\frac{1}{1296}}=$ *(Sol: $\frac{\sqrt[3]{36}}{36}$)*

$\frac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}-\frac{9}{\sqrt{3}}=$ *(Sol: 2)*

27. Dados $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$ y $Q(x)=x^2-9$, se pide:

a) Factorizar P(x), por Ruffini

b) $Q^4(x)$, por Tartaglia

c) $P(x)-Q(x)\cdot Q(x)$

d) $P(x) : Q(x)$

28. Operar y simplificar:

$\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-2}\,\frac{x-1}{x+1}=$ *(Sol: $\frac{2x^3-2x^2-2x}{x^3-2x^2-x+2}$)*

29. Resolver:

a) $-x^2-x=0$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=-1$)*

b) $\sqrt{3}=\frac{2x}{1-x^2}$ *(Sol: $x_1=\sqrt{3}/3$, $x_2=-\sqrt{3}$)*

c) $(x^2+1)^4=625$ *(Sol: $x=\pm 2$)*

d) $(x^2-1)^4=0$ *(Sol: $x=\pm 1$)*

e) $\frac{x^4}{10}=8x$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=2\cdot\sqrt[3]{10}$)*

f) $\frac{\sqrt{x}}{x}=0$ *(Sol: $\nexists$ soluc.)*

g) $\sqrt{x^2+4x+4}=1$ *(Sol: $x_1=-1$, $x_2=-3$)*

h) $x^6-16x^2=0$ *(Sol: $x=0$, $x=\pm 2$)*

i) $\sqrt[3]{x+5}=2$ *(Sol: $x=3$)*

j) $x^3=3x$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$; $x_3=-\sqrt{3}$)*

k) $-7x\le -7$ *(Sol: $x\ge 1$)*

l) $x^2<9$ *[Sol: $x\in(-3,3)$]*

30. ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta:

a) Todo número real es racional.

b) Todo número natural es entero.

c) Todo número entero es racional.

d) Siempre que multiplicamos dos números racionales obtenemos otro racional.

e) Siempre que multiplicamos dos números irracionales obtenemos otro irracional.

f) Entre dos números reales existe siempre un racional.

g) " " " " " " " "

☞ *Ejercicios libro: pág. 49: 62*

31. Representar los siguientes intervalos e indicar su unión e intersección:

a) [-2,5) y [3,∞) | **b)** (0,3) y [9/2,∞) | **c)** (-5,-1] y [-1,4] | **d)** (-1,3) y [3,∞)

☞ *Ejercicios libro: pág. 47: 39, 40 y 45*

Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

32. Indicar para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones; en el caso de las desigualdades, indicar la solución mediante intervalos:

a) $|x|=5$

b) $|x|\leq 5$

c) $|x|>5$

c) $|x-4|=2$ *(Sol: $x_1=2$, $x_2=6$)*

d) $|x-4|\leq 2$ *(Sol: $x\in[2,6]$)*

e) $|x-4|>2$ *(Sol: $x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$)*

f) $|x+4|>5$ *(Sol: $x\in(-\infty,-9)\cup(1,\infty)$)*

g) $|x|=-2$

h) $|x|=0$

i) $|x|<2$

j) $|x|\geq 2$

k) $|x+1|=3$ *(Sol: $x_1=-4$, $x_2=2$)*

l) $|x-2|\leq 3$ *(Sol: $x\in[-1,5]$)*

m) $|x|=7$

n) $|x|\leq 6$

o) $|x|>2$

p) $|x-2|<5$ *(Sol: $x\in(-3,7)$)*

q) $|x+3|\geq 7$ *(Sol: $x\in(-\infty,-10]\cup[4,\infty)$)*

r) $|2x|<8$ *(Sol: $x\in(-4,4)$)*

☞ *Ejercicios libro: **pág. 47: 41 y 42***

Resolución gráfica de inecuaciones y sistemas:

33. Resolver **gráficamente** los siguientes sistemas de ecuaciones de 1er grado; resolverlos a continuación analíticamente (por el método deseado), y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=7, y=5)*

b) $\left.\begin{array}{l} x+3y=6 \\ 2x-y=-2 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=0, y=2)*

c) $\left.\begin{array}{l} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=1)*

d) $\left.\begin{array}{l} x+2y=0 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\}$ *(Sol: x=2, y=-1)*

e) $\left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{array}\right\}$ *(Sol: x=3, y=1)*

f) $\left.\begin{array}{l} x+3y=1 \\ 2x-y=2 \end{array}\right\}$ *(Sol: x=1, y=0)*

34. Resolver **gráficamente** las siguientes inecuaciones de 2º grado; resolverlas a continuación analíticamente y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

a) $x^2-6x+8\geq 0$ *[Sol: $x\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$]*

b) $x^2-2x-3<0$ *[Sol: $x\in(-1,3)$]*

c) $x^2-5x+6>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$]*

d) $x^2-3x-10\leq 0$ *[Sol: $x\in[-2,5]$]*

e) $3x^2-10x+7\geq 0$ *[Sol: $x\in(-\infty,1]\cup[7/3,\infty)$]*

f) $2x^2-16x+24<0$ *[Sol: $x\in(2,6)$]*

g) $x^2-4x+21\geq 0$ *[Sol: $\forall x\in IR$]*

h) $x^2-3x>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$]*

i) $x^2-4\geq 0$ *[Sol: $x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$]*

j) $x^2-4x+4>0$ *[Sol: $x\in IR-\{2\}$]*

k) $x^2+6x+9\geq 0$ *[Sol: $\forall x\in IR$]*

l) $x^2+6x+9>0$ *[Sol: $\forall x\in IR-\{-3\}$]*

m) $x^2-2x+1<0$ *[Sol: $\nexists$ soluc.]*

n) $x^2-4x+4\leq 0$ *[Sol: x=2]*

o) $6x^2-5x-6<0$ *[Sol: $x\in(-2/3,3/2)$]*

p) $x^2-4x+7<0$ *[Sol: $\nexists$ soluc.]*

r) $2x^2-8x+6<0$ *[Sol: $x\in(-3,\ -1)$]*

s) $2x^2+10x+12\leq 0$ *[Sol: $x\in[-3,\ -2]$]*

t) $-x^2+5x-4\geq 0$ *[Sol: $x\in[1,4]$]*

Notación científica:

35. Pasar a notación científica los siguientes números:

a) 300.000.000=
b) 456=
c) 0,5=
d) 0,0000000065=
e) 18.400.000.000=
f) 0,000001=
g) -78986,34=
h) 0,0000093=
i) 1.230.000.000.000=
j) 14 billones €=
k) 150 millones $=
l) 7,3=
m) 73=
n) 0,00010001=
o) 10=
p) 1=
q) 0,011001=
r) 16.730.000=
s) -345,45

36. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas (y comprobar que se obtiene el mismo resultado):

- Sin calculadora, aplicando sólo las propiedades de las potencias.
- Utilizando la calculadora científica.

a) $2,5\cdot10^{7}+3,6\cdot10^{7}=$

b) $4,6\cdot10^{-8}+5,4\cdot10^{-8}=$

c) $1,5\cdot10^{6}+2,4\cdot10^{5}=$

d) $2,3\cdot10^{9}+3,25\cdot10^{12}=$

e) $3,2\cdot10^{8}-1,1\cdot10^{8}=$

f) $4,25\cdot10^{7}-2,14\cdot10^{5}=$

g) $7,28\cdot10^{-3}-5,12\cdot10^{-3}=$

h) $(2\cdot10^{9})\cdot(3,5\cdot10^{7})=$

i) $\dfrac{8,4\cdot10^{9}}{2\cdot10^{7}}=$

j) $\dfrac{\left(3,2\cdot10^{-3}\right)\cdot\left(4\cdot10^{5}\right)}{2\cdot10^{-8}}=$

k) $(2\cdot10^{5})^{2}=$

☞ *Ejercicios libro: pág. 39: 2 y 3; pág. 47: 30 a 35*

37. La estrella más cercana a nuestro sistema solar es α-Centauri, que está a una distancia de tan sólo 4,3 años luz. Expresar, en km, esta distancia en **notación científica**. (Dato: velocidad de la luz: 300.000 km/s) ¿Cuánto tardaría en llegar una sonda espacial viajando a 10 km/s? *(Sol: $4,068\cdot10^{13}$ km)*

Miscelánea (II):

38. Si el lado de un cuadrado aumenta 2 cm, su área aumenta 28 cm^2 ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado originario? *(Sol: Se trata de un cuadrado de lado 6 cm)*

39. a) ¿Qué otro nombre recibe el intervalo $[0,\infty)$? ¿Y $(-\infty,0]$?

b) ¿A qué equivale $IR^{+} \cup IR^{-}$? ¿Y $IR^{+} \cap IR^{-}$?

40. a) Simplificar, reduciendo previamente a radicales semejantes:

$$\sqrt{128}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}-3\sqrt{27}-\sqrt{2}=$$ *(Sol: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$)*

b) Racionalizar y simplificar:

$$\frac{3\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}+2}+\frac{6\sqrt{12}}{7\sqrt{6}}=$$ *(Sol: 11/7)*

$$\frac{3\sqrt[5]{9}}{2\sqrt[3]{243}} =$$ $\left(Sol: \dfrac{\sqrt[15]{3^{11}}}{6}\right)$

c) Operar y simplificar:

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2\left(5-\sqrt{21}\right)=$$

d) Simplificar y operar:

$$\sqrt{125}-2\sqrt[4]{400}+\sqrt[6]{8000}=$$ $\left(Sol: 3\sqrt{5}\right)$

41. Un grupo de estudiantes alquila un piso por el que tienen que pagar 420 € al mes. Uno de ellos hace cuentas y observa que si fueran dos estudiantes más, cada uno tendría que pagar 24 € menos. ¿Cuántos estudiantes han alquilado el piso? ¿Cuánto paga cada uno? *(Sol: 5 estudiantes a 84 € cada uno)*

42. Calcular el volumen aproximado (en m^3) de la Tierra, tomando como valor medio de su radio 6378 km, dando el resultado en **notación científica** con dos cifras decimales. $\left(\text{Volumen de la esfera}: \frac{4}{3}\pi r^3\right)$

(Sol: $1,15\cdot10^{21}$ m^3)

43. Con dos tipos de barniz, de 3,50 €/kg y de 1,50 €/kg, queremos obtener un barniz de 2,22 €/kg. ¿Cuántos kilogramos tenemos que poner de cada clase para obtener 50 kg de la mezcla? (Ayuda: plantear un sistema de ecuaciones de primer grado) *(Sol: 18 kg del barniz de 3,50 y 32 kg del de 1,50)*

44. Racionalizar denominadores y simplificar:

a) $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$ $\left(Sol: \dfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\right)$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$ $\left(Sol: \sqrt[6]{243}\right)$

c) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}+\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ *(Sol: 7)*

d) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\left(Sol: \dfrac{1+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 45 y ss.: 9,* ***10, 11****, 13 y 15 (potencias de exponente fraccionario)*

pág. 31: ***1, 2,*** *3 y* ***4****; pág. 32:* ***5 y 6****; pág. 46:* ***16, 17, 21, 22, 23 y 27*** *(operaciones con radicales)*

pág. 32: 8; pág. 46: ***25 y 26*** *(radicales semejantes)*

pág. 32: ***7****; pág. 33:* ***9 y 10****; pág. 46:* ***24, 28 y 29*** *(racionalización)*

45. Dos árboles de 15 m y 20 m de altura están a una distancia de 35 m. En la copa de cada uno hay una lechuza al acecho. De repente, aparece entre ellos un ratoncillo, y ambas lechuzas se lanzan a su captura a la misma velocidad, llegando simultáneamente al lugar de la presa. ¿A qué distancia de cada árbol apareció el ratón? (Ayuda: Si se lanzan a la misma velocidad, recorren el mismo espacio, pues llegan a la vez; aplicar el teorema de Pitágoras, y plantear un SS.EE. de 2º grado) *(Sol: a 15 m del árbol más alto)*

46. En una balanza de precisión pesamos cien granos de arroz, obteniendo un valor de 0,0000277 kg. ¿Cuántos granos hay en 1000 toneladas de arroz? Utilícese **notación científica**. *(Sol: $3,61\cdot10^{12}$ gr)*

47. Un almacenista de fruta compra un determinado número de cajas de fruta por un total de 100 €. Si hubiera comprado 10 cajas más y cada caja le hubiera salido por 1 € menos, entonces habría pagado 120 €. ¿Cuántas cajas compró y cuánto costó cada caja? *(Sol: 20 cajas a 5 €)*

48. La luz del sol tarda 8 minutos y 20 segundos en llegar a la Tierra. Calcular la distancia Tierra-Sol, empleando **notación científica**. *(Sol: $1,5\cdot 10^8$ km)*

49. Hallar dos números positivos sabiendo que su cociente es 2/3 y su producto 216 *(Sol: 12 y 18)*

50. TEORÍA: **a)** ¿Qué es el discriminante de una ecuación de 2º grado? ¿Qué indica? Sin llegar a resolverla, ¿cómo podemos saber de antemano que la ecuación x^2+x+1 carece de soluciones?

b) Inventar una ecuación de 2º grado con raíces $x_1=2/3$ y $x_2=2$, y cuyo coeficiente cuadrático sea 3

c) Sin resolver y sin sustituir, ¿cómo podemos asegurar que las soluciones de $x^2+5x-300=0$ son $x_1=15$ y $x_2=-20$?

d) Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $x^2+bx+6=0$ sabiendo que una de las soluciones es 1. Sin necesidad de resolver, ¿cuál es la otra solución?

51. Un rectángulo tiene 300 cm^2 de área y su diagonal mide 25 cm. ¿Cuánto miden sus lados? *(Sol: 20 x 15 cm)*

52. Resolver:

a) $x^6+7x^3-8=0$ *(Sol: x=1, x=-2)*

b) $x^6-64=0$ *(Sol: x=±2)*

c) $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+y=3\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ *(Sol: $x_1=1$; $y_1=2$; $x_2=2/5$; $y_2=1$)*

d) $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-9}=\sqrt{x-1}$ *(Sol: x=5)*

53. Un frutero ha comprado manzanas por valor de 336 €. Si el kilo de manzanas costara 0,80 € menos, podría comprar 48 kg más. Calcular el precio de las manzanas y la cantidad que compró.
(Sol: 120 kg a 2,80 €/kg)

54. Resolver la ecuación $2x^3-3x^2=-\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es 1/2 *(Sol: x=±1/2, 3/2)*

55. Una persona compra una parcela de terreno por 4800 €. Si el m^2 hubiera costado 2 € menos, por el mismo dinero habría podido comprar una parcela 200 m^2 mayor. ¿Cuál es la superficie de la parcela que ha comprado? ¿Cuánto cuesta el m^2? *(Sol: 600 m^2; 8 €)*

56. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x-2}=x$ *(Sol: x=2)*

57. El área de un **triángulo** rectángulo es 30 m^2 y la hipotenusa mide 13 m. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos? *(Sol: 12 m y 5 m)*

58. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x}-1$ (Ayuda: aplicar Tartaglia y Ruffini) *(Sol: x=1)*

59. Calcular dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 195 *(Sol: 13 y 15)*

60. Resolver: **a)** $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ y-x^2=1\end{array}\right\}$ *(Sol: x=1, y=2)* **b)** $\left.\begin{array}{l}y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\\ y=\sqrt{x^3}\end{array}\right\}$ *(Sol: x=1; y=1)*

61. Si multiplicamos la tercera parte de cierto número por sus tres quintas partes, obtenemos 405. ¿Cuál es ese número? *(Sol: 45)*

62. **a)** Inventar una ecuación polinómica de grado 3 que tenga únicamente por soluciones x=-2, x=1 y x=3

b) Inventar una ecuación polinómica de grado 4 que tenga únicamente como raíces 1 y 2

c) Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. *(Sol: 1 raíz)*

63. Varios amigos alquilan un local por 800 €. Si hubieran sido tres más, habría pagado cada uno 60 € menos. ¿Cuántos amigos son? *(Sol: 5 amigos)*

64. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: P(-1)=P(2)=P(-3)=0 y P(-2)=18

65. Uno de los lados de un rectángulo es doble que el otro y el área mide 50 m^2. Calcular las dimensiones del rectángulo. *(Sol: 5 x 10 m)*

66. Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{\frac{y}{1-y}}{\frac{y}{1-y}+1}=$ *(Sol: y)*

b) $\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}\right)=$ $\left(Sol:\ \frac{1}{x}\right)$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{a-b}\right)\frac{a+b}{ab}=$ $\left(Sol:\ -\frac{2}{a-b}\right)$

d) $\frac{xy}{x^2-y^2}:\frac{x-y}{y}+\frac{y}{x-y}=$ $\left(Sol:\ \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$

67. Un campo rectangular de 4 ha de superficie tiene un perímetro de 10 hm. Calcular, en metros, su longitud y su anchura. (Recordar: 1 ha=100 a; 1 a=100 m^2) *(Sol: 100 m x 400 m)*

68. Demostrar que: **a)** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$ **b)** $\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}=a\cdot b$

69. Las diagonales de un rombo están en la relación de 2 a 3. El área es de 108 cm^2. Calcular la longitud de las diagonales y el lado del rombo. *(Sol: d=12 cm; D=18 cm; l≅10,81 cm)*

70. Operar y simplificar:

$x+\dfrac{2}{x-\frac{4}{x}}-\dfrac{x-1}{x-2}=$ $\left(Sol:\ \frac{x^2+x+2}{x+2}\right)$

☞ *Ejercicios libro: pág. 71: **1**, 2 y 3; pág. 92: **1 y 3** (descomposición factorial; Ruffini);*

*pág. 92: **4** (simplificación de F.A.)*

*pág. 73: **2**; pág. 74: 3 y 4; pág. 92: **5** y 6 (operaciones con F.A.)*

71. El diámetro de la base de un cilindro es igual a su altura. El área total es 169,56 m^2. Calcular sus dimensiones. *(Sol: d=h=6 m)*

72. Transformar en potencias de exponente fraccionario la siguiente expresión, operar y simplificar:

$$\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}} =$$

73. Despejar x y simplificar:

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 \qquad \left(Sol: x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

74. Demostrar que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ **b)** $2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

75. Calcular la velocidad y el tiempo que ha invertido un ciclista en recorrer una etapa de 120 km sabiendo que, si hubiera ido 10 km/h más deprisa, habría tardado una hora menos. *(Sol: v=30 km/h; t=4 h)*

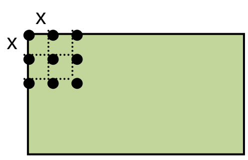
76. Resolver:

a) $\left|x^2 - 3x\right| = 4$ *(Sol: x_1=-1, x_2=4)*

b) $\left|2x-3\right| = \left|x+4\right|$ *(Sol: x_1=-1/3; x_2=7)*

☞ *Ejercicios libro: **pág. 96: 44 y 47***

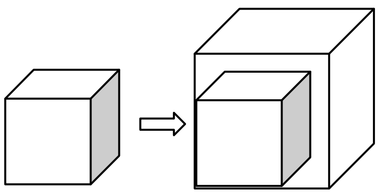
77. En un terreno rectangular de lados 64 m y 80 m se quieren plantar 357 árboles formando una cuadrícula regular. ¿Cuál será el lado de esa cuadrícula? (Ayuda: En el lado menor, por ejemplo, hay 64/x cuadrículas, y un árbol más que el número de cuadrículas) *(Sol: x=4 m)*



78. Operar, racionalizando previamente

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \qquad \left(Sol: \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

79. Al aumentar en 1 cm la arista de un cubo su volumen aumenta en 271 cm^3. ¿Cuánto mide la arista? (Ayuda: plantear una ecuación de 3er grado) *(Sol: 9 cm)*



80. Dos tinajas tienen la misma cantidad de vino. Si se pasan 37 litros de una a otra, ésta contiene ahora el triple que la primera ¿Cuántos litros de vino había en cada tinaja al principio? *(Sol: 74 l)*

81. Un padre, preocupado por motivar a su hijo en Matemáticas, se compromete a darle 1 € por problema bien hecho, mientras que, si está mal, el hijo le devolverá 0,5 €. Después de realizar 60 problemas, el hijo ganó 30 €. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente? *(Ayuda: Plantear un SS.EE. de 1er grado)*

(Sol: 40 problemas)

82. Tres hermanos se reparten un premio de 350 €. Si el mayor recibe la mitad de lo que recibe el mediano; y el mediano la mitad de lo que recibe el pequeño, ¿cuánto dinero tendrá cada hermano al final?

(Sol: 50 € el mayor, 100 € el mediano y 200 € el pequeño)

83. Un ganadero decide repartir una manada de 456 caballos entre sus hijos e hijas. Antes del reparto se enfada con los dos únicos varones, que se quedan sin caballos. Así, cada hija recibe 19 cabezas más. ¿Cuántas hijas tiene el ganadero? *(Sol. 6 hijas)*

84. Una cuadrilla de vendimiadores tiene que vendimiar dos fincas, una de las cuales tiene doble superficie que la otra. Durante medio día trabajó todo el personal de la cuadrilla en la finca grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en la finca grande y la otra mitad trabajó en la pequeña. Durante esa tarde fueron terminadas las dos fincas, a excepción de un reducido sector de la finca pequeña, cuya vendimia ocupó el día siguiente completo a un solo vendimiador. ¿Con cuántos vendimiadores contaba la cuadrilla? (Ayuda: Llamar x al nº de vendimiadores y s a la superficie que vendimia una persona en media jornada, y plantear una ecuación, ¡no un sistema!) *(Sol. 8 vendimiadores)*