Lugares geométricos & Cónicas

1.- Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto (2,-3) y que es tangente a la recta 3x-4y+5=0.

Sol: $25x^2+25y^2-100x+150y-204=0$

2.- a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $2x^2+2y^2-8x-12y+8=0$. **b)** Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

Sol: a) C(2,3) r=3; b) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

3.- Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x+3y-25=0$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas *r:* $3x-y-7=0$ y *s:* $2x+3y-1=0$.

Sol: $x^2+y^2-4x+2y-11=0$

4.- Estudia la posición relativa de la recta *r:* $2x+y=1$ y la circunferencia $x^2+y^2-4x-2y-4=0$.

Sol: la circunferencia y la recta son secantes.

5.- Halla la posición relativa de la recta $3x+4y-25=0$ con respecto a la circunferencia $x^2+y^2-25=0$. Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.

Sol: Se cortan en el punto (3,4), por tanto, son tangentes.

6.- Obtén el valor de k para que la recta *s:* $x+y+k=0$, sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2+6x+2y+6=0$.

Sol: $k_1=4+2\sqrt{2}$; $k_2=4-2\sqrt{2}$

7.- Halla la posición relativa de la recta *r:* $x+y=2$ con respecto a la circunferencia $x^2+y^2+2x+4y+1=0$

Sol: la recta es exterior a la circunferencia

8.- Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos A(-4, 0) y B(4, 0) es 40. Identifica la figura resultante.

Sol: circunferencia de centro (0, 0) y radio 2.

9.- Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas r_1: $x+3y-1=0$ y r_2: $3x-y+4=0$.

Sol: a) 2x-4y+5=0; b) 4x+2y+3=0

10.- Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a Q(2, 4) sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

Sol: Circunferencia de centro (2, 4) y radio 3: $x^2+y^2-4x-8y+11=0$

11.- Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a la recta r_1: x+y+1=0 sea igual que su distancia a la recta r_2:2x+2y+4=0.

Sol: Recta paralela a las otras dos de ecuación: 2x+2y+3=0

12.- Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano cuya distancia al punto A(2,0) sea el doble de la distancia al punto B(-1, 0). Identifica la figura resultante.

Sol: Es una circunferencia de centro (-2,0) y radio 2.

13.- Estudia la posición relativa de las circunferencias.
$x^2+y^2\ \ 9=0$ y $x^2+y^2\ \ 2x\ \ 2y+1=0$

Sol: Son Interiores

14.- Consideramos la recta r: 3x 2y+15 =0 y el punto A(1, 2). Encuentra el lugar geométrico de los puntos B tales que, para cada punto M de la recta, se verifica que: $\overline{AM}=\overline{MB}$ y, además, los ángulos que forman dichos segmentos con la recta son suplementarios.

Sol: Recta de ecuación: 3x-2y+23=0

15.- Encuentra tres rectas no paralelas, que sean secante, tangente y exterior a la circunferencia de ecuación $x^2+(y\ \ 3)^2=36$.

Sol: Respuesta abierta. Una recta secante es: x y=0; Una recta tangente es: y+3 =0 y una recta exterior es: x 7 =0

16.- Halla las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ paralelas a la recta s: x+2y+6=0.

Sol: s_1: x+2y+9=0; s_2: x+2y-1=0

17.- Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+2x-4y-3=0$ perpendiculares a la recta s: x+y+3=0

Sol: s_1: x+y+3=0; s_2: x+y+3=0

18.- Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(0,0), B(0,5) y C (3,2).

Sol: $x^2+y^2-x-5y=0$

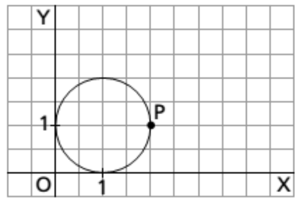
19.- Halla la ecuación de la circunferencia, cuyo diámetro es el segmento de extremos A(2,3) y B(4,9).

Sol: $(x-3)^2+(y-6)^2=10$

20.- Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro situado en el punto C(-2, 3) y que pasa por el punto de coordenadas A(-2, 5). Calcula previamente la medida del radio.

Sol: $x^2+y^2+4x-6y+9=0$

21.- La circunferencia que aparece en la figura es tangente a los ejes de coordenadas y pasa por el punto P(2,1). **a)** Calcula la ecuación de dicha circunferencia. **b)** ¿Existe más de una solución?



Sol: Existen dos soluciones. $x^2+y^2-10x-10y+25=0$; $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

22.- Dadas las rectas *r:* $3x+4y\ \ 10=0$, *s:* $5x\ \ 12y+2=0$ y la circunferencia $x^2+y^2\ \ 20x+84=0$. **a)** Comprueba que las dos rectas son tangentes a la circunferencia. **b)** Halla el punto P de intersección de ambas rectas, el punto C, que es centro de la circunferencia, y los puntos A y A', en los que las rectas son tangentes a la circunferencia. **c)** Si llamamos d, a la distancia que separa P de C, la distancia de P a Q es d r, y la distancia de P a Q' es d+r. Demuestra que $\overline{PQ}\cdot\overline{PQ'}=\left(\overline{PA}\right)^2$

Sol: P(2,1); C(10,0); A(38/5,-16/5) A'(110/13,48/13) r=4, $d=\sqrt{65}$

23.- Escribe la ecuación de las siguientes circunferencias: **a)** De centro en C(1,-5) y radio 5. **b)** De centro C(2,-2) y que pasa por el punto (3,1). **c)** De centro C(2,-1) y tangente el eje OX. **d)** De centro C(-2,-1) y tangente a la recta x+5y-2=0. **e)** De diámetro el segmento de extremos A(-4,1) y B(2,3).

Sol: a)$(x-1)^2+(y+5)^2=25$; b)$(x-2)^2+(y+2)^2=10$; c) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$; d) $(x+2)^2+(y+1)^2=81/26$; e) $(x+1)^2+(y-2)^2=10$

24.- Los puntos (3,0) y (0,4) son puntos diametralmente opuestos de una circunferencia. Halla la ecuación de esta.

Sol: $x^2+y^2\ \ 3x-4y=0$

25.- Dados los puntos A(-5,-1), B(2,4) y C(0,2), sea M el punto medio del segmento BC. Calcula la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento AM.

Sol: $x^2+y^2+4x-2y-8=0$

26.- Sean Q(-1,0) y R(3,0), **a)** Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano para los que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ es 5. **b)** Identifica la cónica resultante y sus elementos característicos.

Sol: a) $x^2+y^2-2x-8=0$; b) Circunferencia de centro C(1,0) y radio r=3.

27.- Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2,1) y B(-2,3) y que tiene su centro en la recta x+y+4=0.

Sol: $(x+2)^2+(y+2)^2=25$

28.- Sea s la recta $3x+4y-1=0$. Determina las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-4x+4y-17=0$, **a)** Paralelas a la recta s; **b)** Perpendiculares a la recta s.

Sol: a) 3x+4y+27=0 y 3x+4y-23=0; b) 4x-3y+11=0 y 4x-3y-39=0

29.- La circunferencia C pasa por el punto A(4,0) y es tangente a la bisectriz del primer cuadrante en el punto B(4,4). A) Determina la recta que pasa por B y por el centro de la circunferencia C. b) Encuentra el centro C y calcula su radio.

Sol: a) x+y-8=0; b) C(6,2) y radio r= $r = 2\sqrt{2}$

30.- Calcula la ecuación de la tangente y normal a la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ en el punto P(3,-1).

Sol: tangente: x+2y-1=0; normal: 2x-y-7=0

31.- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P(5,8) y es tangente a las rectas *r: 2x-y+3=0* y *s: x-2y+3=0*.

Sol: $(x-4)^2+(y-6)^2=5$ $\quad \left(x-\frac{76}{9}\right)^2+\left(y-\frac{94}{9}\right)^2=\frac{1445}{81}$

32.- Halla la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de vértices A(1,6), B(-4,-4) y C(4,0)

Sol: $(x-1)^2+(y-1)^2=5$

33.- Halla la posición relativa de la circunferencia de ecuación: C: $x^2+y^2-6x+8y=0$ respecto a las rectas: s_1: x+y=10, s_2: 4x+3y+20=0 y s_3: 3x–4y= 0.

Sol: La recta $s_1$es exterior a la circunferencia, s_2 y la Circunferencia son Secantes y s_3 es tangente a la circunferencia.

34.- Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:

a) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ $\qquad$ b) $25x^2+100y^2=2500$

Sol: a) Hipérbola de semieje 2, focos en $F(0,\sqrt{13})$ y $F'(0,-\sqrt{13})$, excentricidad 1,8 y asíntotas en $y=\pm\frac{2}{3}x$ b) Elipse de semiejes 10 y 5, de focos en $F(5\sqrt{3},0)$ y $F'(-5\sqrt{3},0)$ y excentricidad 0,87.

35.- La cónica de ecuación: $9x^2+16y^2+24xy+8x \quad 44y + 24 =0$ es una parábola cuyo eje es la recta: *r: 8x 6y+2 =0*. Determina su foco.

Sol: F(0,1)

36.- Halla la ecuación reducida de la elipse sabiendo que sus focos están situados en los puntos F(12, 0) y F(-12, 0) y que su eje mayor mide 26 unidades de longitud. Represéntala y calcula la medida de su eje menor, su distancia focal, su excentricidad y las coordenadas de sus vértices.

Sol: $x^2/169+y^2/25=1$; e=0,92; Vértices (13,0),(0,5),(-13,0) y (0,-5)

37.- Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia al punto A(1,0), es el triple de su distancia a la recta x=2. Identifica la figura que obtienes.

Sol: Es una hipérbola de ecuación $8x^2-y^2-34x+35=0$

38.- Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas: **a)** $4x^2+25y^2=100$ **b)** $4y^2-x^2=4$

Sol: a) Elipse de semieje mayor 5 y semieje menor 2, con focos en $F(\sqrt{21},0)$ y $F'(-\sqrt{21},0)$ y excentricidad 0,92 b) Hipérbola de semieje 1 y focos $F(0,\sqrt{5})$ y $F'(0,-\sqrt{5})$ y excentricidad 2,24 y asíntotas $y=\pm\frac{1}{2}x$

39.- Halla los elementos característicos y la ecuación reducida de una hipérbola de Focos F(5,0) y F'(-5,0) y constante de proporcionalidad k = 8.

Sol : a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1;$

40.- Comprueba si la recta r: 4x-3y+6=0 es tangente a la circunferencia $(x-2)^2+(y-3)^2=1$

Sol: Si son tangentes.

41.- El famoso hombre bala Adal L. White hizo una demostración en una ciudad. Se introdujo en un cañón y fue lanzado al aire, siguiendo una trayectoria de un arco de parábola. Alcanzó una altura máxima de 20 metros y cayó ileso a una distancia de 60 metros del cañón. Determina la ecuación de la parábola que describe su trayectoria. (Puedes suponer que el punto más elevado es el origen).

Sol: $y=-1/45\ x^2$

42.- Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por el (0,0), de radio 4 y cuyo centro está en la bisectriz del primer cuadrante.

Sol: $\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+\left(y-2\sqrt{2}\right)^2=16$

43.- Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos A(2,1) y B(3,3), sabiendo que su centro se encuentra sobre la recta s: x+y+5=0

Sol: $(x-33/2)^2+(y-23/2)^2=905/2$

44.- Halla la ecuación de una elipse de centro (1,3), semieje mayor 3 y semieje menor 2.

Sol: $x^2+9y^2-8x-54y+49=0$

45.- Determina el valor de k que hace que la recta 2x +y+k=0 sea tangente a la parábola $y^2=6x$.

Sol: k=3/4

46.- Decide qué tipo de cónicas son las siguientes, halla sus elementos y haz una representación aproximada.

a) $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ $\qquad$ ***b)*** $x^2-4y^2+16y-32=0$
c) $16x^2+9y^2-32x+54y-47=0$ $\qquad$ ***d)*** $x^2+6x-4y+17=0$

Sol: a) La cónica es una circunferencia de centro C(-1,-3) y radio 3. b) hipérbola de centro C(0, 2). c) elipse de centro C(1,-3). d) parábola de vértice V(3, 2)

47.- Estudia la posición relativa de los siguientes pares de circunferencias indicando, si los hay, los puntos de corte.

a) $\begin{cases} x^2+y^2-6x-16=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y+9=0 \\ x^2+y^2-6x+2y+9=0 \end{cases}$

Sol: a) tangentes interiores con intersección en (-2,0); b) tangentes exteriores con intersección en (3,0)

48.- Halla la longitud de la cuerda común a las circunferencias de ecuaciones: $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ y $x^2+y^2-4=0$.

Sol: d=4

49.- Halla las ecuaciones de las elipses determinadas de los modos siguientes: **a)** Focos (–2, 0), (2, 0). Longitud del eje mayor, 10. **b)** F(–3, 0) y F'(3, 0) y cuya excentricidad es 0,5. **c)** Eje mayor sobre el eje X, 10. Pasa por el punto (3, 3). **d)** Eje mayor sobre el eje Y, 2. Excentricidad, 1/2.

Sol : a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1;$ b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ c) $\frac{x^2}{25}+\frac{16y^2}{225}=1;$ d) $\frac{4x^2}{3}+y^2=1$

50.- Escribe la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto P (8,–3) y que su eje mayor es igual al doble del menor.

Sol: $x^2+4y^2=100$

51.- Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos P, del plano tales que su distancia al punto A(1,0), es el triple de su distancia a la recta x=2. Identifica la figura.

Sol: $8x^2-y^2-34x+35=0$. Es una hipérbola.

52.- Obtén el lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que: $\frac{d(P,A)}{d(P,r)}=2$ donde A(1,0) y r: y=4.

Sol: $x^2-3y^2-2x+32y-63=0$. Es una Hipérbola

53.- Identifica la siguiente cónica, obtén sus elementos y represéntala gráficamente: $4y^2-9x^2=36$.

Sol: Es una hipérbola.