Aplicaciones de la Derivada

1.- Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=(x-1)e^x$

Sol: f(x) es decreciente en $]-\infty,0]$ es creciente en $[0,+\infty[$

2.- Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. Estudiar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos.

Sol: f(x) es decreciente en $[0,1[\cup]1,2]$ es creciente en $]-\infty,0]U[2,+\infty[$ Máximo Relativo (0,0) Mínimo Relativo (2,4).

3.- Encontrar las funciones polinómicas de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ cuya segunda derivada sea *x-1*.

¿Cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4,\dfrac{-1}{3}\right)$.

Sol: a=1/6; b=-1/2; c=-4; d=13

4.- Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, Hallar los coeficientes *a,b,c,d* sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1,0) es *y=-3x+3* y que la función presenta un extremo en el punto de abscisa *x=0*.

Sol: a=1; b=-3; c=0; d=2

5.- Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Hallar los coeficientes *a,b,c,d,* sabiendo que la función tiene un máximo en (0,3) un mínimo en *x=2* y un punto de inflexión en (1,1).

Sol: a=1; b=-3; c=0; d=3

6.- Dada la función definida en $]0,+\infty[$ $f(x)=\sqrt[x]{x}$, hallar sus máximos y mínimos.

Sol: máximo Absoluto en el punto $\left(e,e^{\frac{1}{e}}\right)$

7.- Estudiar la monotonía y la curvatura de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Sol: decreciente en $[e,+\infty[$ es creciente en $]0,e]$ f presenta un máximo Absoluto en el punto $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$ y un punto de inflexión en el punto $\left(e^{\frac{3}{2}},\dfrac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$

8.- Estudiar la concavidad de la función: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

Sol: puntos de inflexión en $\left(-1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ y en $\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$

9.- Consideremos la función la función $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$

a) Determina sus máximos, mínimos y puntos de inflexión
b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Sol: Siempre creciente, puntos de inflexión en los puntos de abscisas x=-1 y x=1.

10.- Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x+sen3x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot senx}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-senx}=2 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=-\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{senx}-\frac{1}{x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-1)}{\cos x-senx+x-1}=-2 \qquad \lim_{x\to 0}tgx\cdot\ln x=0 \qquad \lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{6} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{senx}-x-1}{2x^2-x^3}=\frac{1}{4} \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}\right)=-\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}=2\pi^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^{x^2}-1}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{sen^2x}=-\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x\cos x-1}{senx-x+1-\cos x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}x^{senx}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{sen^2x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\frac{\sqrt{e}}{e} \qquad \lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1 \qquad \lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\frac{1}{6} \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}=e \qquad \lim_{x\to +\infty}(3^{-x}-x)=-\infty$$

11.- Sea la función $f(x)=-2x+ae^{-x}+bx-1$

a) Halle los valores de *a* y *b* sabiendo que la función tiene un mínimo en *x=0* y que la gráfica de la función pasa por el punto (0, 0).

b) Para *x= 0 y x=1*, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x=–1.*

Sol: a) a=b=1; b) y=-5x-5

12.- Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\alpha senx}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

Sol: α=1; limite = 0

13.- De la función $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ estudia dominio, continuidad, monotonía y curvatura.

Sol:

14.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$,

- **a)** Da sus intervalos de monotonía y los extremos relativos.
- **b)** Da los intervalos de concavidad-convexidad y sus puntos de inflexión.
- **c)** Escribe la ecuación de la recta tangente en el punto donde se anula la derivada segunda de *f*.
- **d)** Sol: a) Crec (-∞,0), decrec (0,+∞) max en x=0; b) P.I. en x=1; ∩ en (-∞,1) y U en (1,+∞); c) en x=1; y=(3-x)/e

15.- Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\dfrac{a\cdot sen(x)-xe^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de *a* y el de dicho límite.

Sol:

16.- De la función $f: R\to R$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo en *x=-1*, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa *x=-2* y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa *x = 0*. Calcula *a, b, c* y *d* sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = 2* tiene pendiente 9.

Sol:

17.- Sea la función $f: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$ definida por $f(x) = e^x\cdot(x^2-x+1)$

- **a)** Calcula $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$
- **b)** Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.
- **c)** Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.

Sol: a) 0 y +∞; b) Max en x=-1; y min en x=0; c) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

18.- Sea $f:(-\infty,1)\to R$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x+2\cdot e^{-x} & si\ \ x\le 0 \\ a\cdot\sqrt{b-x} & si\ \ 0<x<1\end{cases}$

- **a)** Determina *a* y *b* sabiendo que *f* es derivable en todo su dominio.
- **b)** Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x = 0*

Sol: a) a=2√2; b=1/2; b) y_t=2-2x; y_n=(x+4)/2.

19.- Considera la función $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x+5-2\cdot senx$. Halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Sol: $(\pi/3, 5\pi/3);(0,\pi/3)U(5\pi/3,2\pi)$

20.- Considera la función $f(x)=ax+\dfrac{1}{x}$. Determina los valores del parámetro a para los cuales la función es decreciente en el punto de abscisa *x=2*.

Sol: $a<\dfrac{1}{4}$

21.- Halla los puntos de la curva $f(x)=\dfrac{4}{x}$ en donde la tangente es perpendicular a la recta y=x.

Sol: (-2,-2) y (2,2)

22.- ¿En qué punto de la curva $y=x^3-3x$ la recta $y=x-4$ es tangente a ella?

Sol: (2,-2)

23.- Sea la función $f(x)=-2x^3+a\cdot e^{-x}+bx-1$

- **a)** Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en *x=0* y que la gráfica de la función pasa por el punto (0,0)
- **b)** Para *a=0* y *b=1*, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x=-1*.

Sol: a) a=1; b=1; b) y=-5x-5

24.- El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora t, mediante la función $S(t)=660-231t+27t^2-t^3$ con $6\le t\le 12$.

- **a)** ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?
- **b)** ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?

Sol: a) 30% al inicio; 48% al cierre; b) el máximo de audiencia es del 55% y se alcanza a las 11 horas.
El mínimo de audiencia es del 23% y se alcanza a las 7 horas.