Relación de Derivadas

1.- A partir de la definición de derivada de una función en un punto, calcular la derivada de las funciones $f(x)=3x$, en $x_o=1$, y $g(x)=\sqrt{x-5}$ en $x_o=9$.

Sol: a) 3; b) 1/4

2.- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}\quad \text{en } x_o=0.$$

Sol: f continua en cero, pero no es derivable.

3.- Sea k un número real y f una función real definida sobre R, mediante

$$f(x)=\begin{cases}x^2 sen\dfrac{1}{x}+kx & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

a) Calcular la derivada de f en el punto $x_o=0$
b) Calcular la función derivada

Sol: a) f'(0)=k; b) $f'(x)=\begin{cases}2x sen\dfrac{1}{x}+x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)+k & \text{si } k\neq 0\\ k & \text{si } x=0\end{cases}$

4.- Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}3x+5 & \text{si } x\leq -1\\ 2 & \text{si } -1<x\leq 1\\ x^2-3x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Sol: f derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

5.- Calcular a y b para que la función sea derivable:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x & \text{si } x<-1\\ ax^2+bx & \text{si } x\geq -1\end{cases}$$

Sol: a=b=-2

6.- Utilizando la definición de derivada en un punto, calcular f'(-2), siendo $f(x)=\dfrac{3-2x}{4x+1}$

Sol: -2/7

7.- Derivar y simplificar:

$$f(x)=Arctg\frac{1+x}{1-x}-Arctgx$$

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot Arcsenx+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$$

Sol: $f'(x)=0\quad g'(x)=xarcsenx$

8.- Hallar un punto del intervalo [0,1], donde la tangente a la curva $f(x)=1+x-x^2$, sea paralela al eje de abscisas.

Sol: x=1/2

9.- Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ sea:

a) Paralela el eje OX
b) Paralela a la recta: $g(x)=5x+3$
c) Perpendicular a la recta: $h(x)=\dfrac{x}{3}+1$

Sol: a) x=-1 y x=3; b) x=-2 y x=4; c) x=0 y x=2.

10.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=\frac{1}{2x}+\ln x\quad \text{Si } x>0,$$

a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.
b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x=1.

Sol: a) (1,1/2); b) 4x+2y-5=0

11.- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa x = 3.

Sol: y=-2x+3

12.- Halla el punto de la curva $f(x)=\ln(1+x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa x=1.

Sol: x=-1

13.- Considera la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & \text{si } x<0\\ ax+b & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

a) Calcula a y b.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=1

Sol: a) b=1; a=0; b) y= $y=\dfrac{-1-x}{e}+\dfrac{e^2-1}{2}$

14.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Halla b, c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en x=-1 y que $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)=4$

Sol: $f(x)=x^3+x^2-x-1$

15.- Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-senx}{x-senx}$

Sol: 3

16.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función derivable definida por:

$$f(x)=\begin{cases}a-x & \text{si } x\leq 1\\ \dfrac{b}{x}+\ln x & \text{si } x>1\end{cases}$$

a) Calcula a y b.
b) Para a=3 y b=2 calcula los extremos absolutos de f en el intervalo [0,e]

Sol: a) b=2; a=3; b) mín abs en (2,1+ ln 2) y el máx abs en (0,3)

17.- Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-bx^2-bx+a & \text{si } x\leq 2\\ \dfrac{60}{x} & \text{si } x>2\end{cases}$$

a) Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.
b) Para a=48 y b=3, estudie la monotonía de f(x) y calcule sus extremos.

Sol: a) a=48; b=3; b) Máx en (-1/2,195/4)

18.- Sea la función f, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-ax+5 & \text{si } x<0\\ -x^2+b & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función f sea derivable en x=0.

Sol: a=0; b=5

19.- Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x)=e^{2x}$

$Sol: f^{n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}$

20.- Halla los puntos en los cuales la tangente a la curva $y=2x^3+3x^2-30x-6$ es paralela a la recta de ecuación $y=6x-5$.

Sol: (2, –38) y (–3, 57)

21.- Calcular las derivadas de las funciones:

$$f(x)=\frac{x^3}{sen^2x}\quad g(x)=tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\quad h(x)=\sqrt{1+x^4}$$

$f'(x)=\dfrac{3x^2sen^2x-x^3sen(2x)}{sen^4x};g'(x)=tg\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(1+tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right);h'(x)=\dfrac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

Relación de Derivadas

22.- Aplicando la derivación logarítmica, calcula la derivada de: $f(x)=\left(Arcsenx\right)^{\cos^2 x}$

Sol: $f'(x)=\left(Arcsenx\right)^{\cos^2 x}\cdot\left(sen2x\cdot\ln(arcsenx)+\frac{\cos^2 x}{arcsenx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

23.- Deriva y simplifica:

$f(x)=Arctg\frac{1+x}{1-x}-Arctgx$ $\qquad g(x)=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot Arcsenx+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$

Sol: f'(x)=0; g'(x)=x·arcsenx

24.- Halla los valores de *a* y *b* para los cuales la recta tangente a la curva $y=x^2+ax+b$ en el punto P(3,0) tenga de pendiente 2.

Sol: *a* = –4 y *b* = 3

25.- Busca los puntos de la curva $y=x^4-7x^3+13x^2+x+1$ que tienen la tangente formando un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

Sol: *P* (0, 1) *Q*(2, 15) *R*(13/4, 64/5)

27.- Se define la función f del modo siguiente:

$$f(x)=\begin{cases}\ln x-1 & \text{si } x>1\\ 2x^2+ax+b & \text{si } x\le 1\end{cases}$$

a) Encontrar los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

b) Estudiar su derivabilidad y hallar los puntos de su gráfica en los que la tangente es paralela al eje OX.

Sol: a) a=-3;b=0; b) Es derivable en R, P(3/4,-9/8)

28.- Dada la función $f(x)=\frac{e^x}{x^2-3}$, se pide:

a) Hallar su dominio de definición.

b) Hallar el punto o puntos en los que la gráfica de la curva *y = f(x)* tiene tangente horizontal.

c) Dibujar esta curva en un pequeño entorno de cada uno de estos puntos.

Sol: a) $Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right\}$; b) x=-1 y x= -3; c)

29.- A partir de la definición de derivada, calcula el producto de las funciones $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=x+1$, y después halla su derivada. Comprueba que el resultado es el mismo que si aplicamos la fórmula de la derivada del producto de funciones.

Sol: $3x^2+2x-4$

30.- El espacio recorrido por un objeto, en metros, se expresa con la fórmula: $e=4t^2+2t+1$ **a)** ¿Qué espacio ha recorrido a los 4 segundos? ¿Y a los 7 segundos? **b)** ¿Cuál es la velocidad media que ha mantenido entre los 4 y 7 segundos?

Sol: a) S(4)=73m; S(7)=211m; b) TVM[4,7]=46m/s

31.- El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene descrito por la expresión: $e=\frac{2}{3}t^2+t$; sabiendo que $v(t)=\frac{d}{dt}e(t)$; calcula la velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos.

Sol: 5 m/s.

32.- Obtén las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y=x+\sqrt{x}$ en el punto de abscisa 4.

Sol: r_T: 5x-4y+1=0; r_N: 4x+5y-46=0

33.- ¿Se verifica que la recta tangente a la curva $y=(x^2-x)(2x+1)$, en el punto de abscisa x=−1, es paralela a la recta $14x-2y-3=0$?

Sol: Si porque las pendientes son iguales.

34.- ¿Cuánto tiene que valer *a* para que la función $f(x)=x\cdot lnx-ax$ tenga, en el punto de abscisa *e*, una recta tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

Sol: a=1

35.- Sea la función $f(x)=\begin{cases}\frac{a}{x-1} & si \quad x<0\\ x^2-bx-1 & si \quad x\ge 0\end{cases}$

Calcula el valor de a y b, para que la función sea derivable en x=0.

Sol: a=b=1

36.- Dadas las funciones: $f(x)=\frac{5x-16}{x}$ y $g(x)=x^2$

Determina la abscisa del punto *x=a* donde se verifique *f'(a)=g'(a)*.

Sol: a=2

37.- Sea la función $f(x)=\begin{cases}2x^2-8x+6 & si \quad x\le 1\\ -2x^2+8x-6 & si \quad x>1\end{cases}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de *f*.

b) Representa la gráfica de *f* y comprueba lo dicho.

Sol: Continua en R, No derivable en x=1

38.- Sea la función definida para todo número real por: $f(x)=ax^3+bx$, determina a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1,1) y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es 3.

Sol: a=-2; b=3

39.- Sea la función: $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & si \quad x\le 0\\ x^3-x+1 & si \quad x>0\end{cases}$

a) ¿Es *f* continua en *x=0*? ¿Es continua en su dominio?.

b) ¿Es *f* derivable en *x=0*? ¿Es derivable en su dominio?.

c) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa *x=1*.

Sol : a) Si; b) Si; c) y=2x-1

40.- Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)=3x^2-2x+1$ en el punto de abscisa *x=1*.

Sol: *y=4x-2*

41.- Sea la función $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}x+2e^{-x} & si \quad x\le 0\\ a\sqrt{b-x} & si \quad 0<x<1\end{cases}$$

a) Determina *a* y *b* sabiendo que *f* es derivable en todo su dominio.

b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x=0

Sol: a) a=2; b=1; b) *y=x+2*

42.- Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & si\ x<0\\ x^2+2a\cos(x) & si\ 0\le x<\pi\\ ax^2+b & x\ge\pi\end{cases}$$

es continua.

a) Determina *a* y *b*.

b) Estudia la derivabilidad de *f*.

Sol: a) a=1 y b=-2; b) Derivable en $\mathbb{R}^*$

43.- Calcula los valores de *a* y *b*, sabiendo que la función

$$f(x)=\begin{cases}1+\frac{a}{x-2} & si \quad x<1\\ a+\frac{b}{\sqrt{x}} & si \quad x\ge 1\end{cases}$$ es derivable.

Sol: a=1/4; b=1/2