60 EJERCICIOS de NÚMEROS COMPLEJOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:

a) $x^2-2x+2=0$ *(Soluc: $1\pm i$)*

b) $x^2+3=0$ *(Soluc: $\pm\sqrt{3}i$)*

c) $x^2-2x+4=0$ *(Soluc: $1\pm\sqrt{3}i$)*

d) $x^2+x+1=0$ *(Soluc: $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

e) $x^3-6x^2+21x-26=0$ *(Soluc: 2, $2\pm 3i$)*

f) $x^3+1=0$ *(Soluc: -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

g) $x^4-1=0$ *(Soluc: ±1, $\pm i$)*

h) $x^4-3x^3-2x^2+10x-12=0$ *(Soluc: -2, 3, $1\pm i$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 149: 2; pág. 163: 23 y 25*

Forma binómica de un complejo:

2. Completar (obsérvese el primer ejemplo):

COMPLEJO z	PARTE REAL Re(z)	PARTE IMAGINARIA Im(z)	OPUESTO −z	CONJUGADO $\overline{z}$
z=2+3i	Re(z)=2	Im(z)=3	−z=−2−3i	$\overline{z}=2-3i$
z=3-i				
z=1+i				
$z=3-3\sqrt{3}i$				
z=3				
z=−2i				
z=i				

3. Dados los complejos $z_1=2+3i$, $z_2=-1+4i$ y $z_3=2-5i$, hallar:

a) $z_1+z_2=$ *(Soluc: 1+7i)*

b) $z_1+z_3=$ *(Soluc: 4-2i)*

c) $z_1-z_2=$ *(Soluc: 3-i)*

d) $z_3-z_2=$ *(Soluc: 3-9i)*

e) $3z_2+2z_3=$ *(Soluc: 1+2i)*

f) $2z_1-3z_2=$ *(Soluc: 7-6i)*

g) $z_3-3z_1+4z_2=$ *(Soluc: −8+2i)*

h) $z_1+\overline{z_2}=$ *(Soluc: 1−i)*

i) $z_3-\overline{z_3}=$ *(Soluc: -10i)*

j) $2\overline{z_1}-z_1=$ *(Soluc: 2-9i)*

4. Calcular **x** e **y** para que $(2+xi)+(y+3i)=7+4i$ *(Soluc: x=1, y=5)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 162: 6 y 8*

5. Calcular:

a) (2+5i) (3+4i)= *(Soluc: -14+23i)*

b) (1+3i) (1+i)= *(Soluc: −2+4i)*

c) (1+i) (−1−i)= *(Soluc: −2i)*

d) (2−5i) i= *(Soluc: 5+2i)*

e) (2+5i) (2−5i)= *(Soluc: 29)*

f) (1+i) (1−i)= *(Soluc: 2)*

g) (5+2i) (3−4i)= *(Soluc: 23−14i)*

h) $(3+5i)^2=$ *(Soluc: −16+30i)*

i) (1+3i) (1−3i)= *(Soluc: 10)*

j) (−2−5i) (−2+5i)= *(Soluc: 29)*

k) (2+3i) 3i= *(Soluc: −9+6i)*
l) (3i) (−3i)= *(Soluc: 9)*
m) $(2+3i)^2$= *(Soluc: −5+12i)*
n) $(6-3i)^2$= *(Soluc: 27−36i)*
o) (2+3i) (1−i)= *(Soluc: 5+i)*
p) (1−3i) 2i= *(Soluc: 6+2i)*
q) (1+i) (2−3i)= *(Soluc: 5−i)*
r) (5+i) (5−i)= *(Soluc: 26)*
s) (4+3i) (4+2i)−(2+i) (3−4i)= *(Soluc: 25i)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 162: 1*

6. ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta. *(Soluc: $\in IR^+$)*

7. Dados los complejos del ejercicio 2, hallar:

a) $z_1 \cdot z_2$= *(Soluc: −14+5i)*
b) $z_1 \cdot z_3$= *(Soluc: 19−4i)*
c) $z_3 - z_2$= *(Soluc: 3−9i)*
d) $z_1 (z_3+z_2)$= *(Soluc: 5+i)*
e) $z_1 - z_2 \cdot z_3$= *(Soluc: −16−10i)*
f) $(z_1)^2$= *(Soluc: −5+12i)*
g) $(z_1-z_3)^2$= *(Soluc: −64)*
h) $z_1 \cdot \overline{z_1} =$ *(Soluc: 13)*
i) $z_1 - \overline{z_1} =$ *(Soluc: 6i)*
j) $z_2 (2z_1-3z_3)$= *(Soluc: −82−29i)*
k) $(3z_1+2z_2)^2$= *(Soluc: −273+136i)*
l) $z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot z_3 =$ *(Soluc: 75−28i*
m) $z_1{}^2 - \overline{z_1}{}^2 =$

8. Dados los complejos 2−mi y 3−ni hallar **m** y **n** para que su producto sea 8+4i.
(Soluc: $m_1=-2$ y $n_1=1$; $m_2=2/3$ y $n_2=-3$)

9. Resolver la ecuación (a+i) (b−3i)=7−11i *(Soluc: $a_1=4$ y $b_1=1$; $a_2=-1/3$ y $n_2=-12$)*

10. Calcular:

a) $\frac{1+3i}{1+i} =$ $(Sol: 2+i)$
b) $\frac{2+5i}{3+4i} =$ $\left(Sol: \frac{26}{25} + \frac{7}{25} i\right)$
c) $\frac{1+i}{1-i} =$ $(Sol: i)$
d) $\frac{3+5i}{1-i} =$ $(Sol: -1+4i)$
e) $\frac{2-5i}{i} =$ $(Sol: -5-2i)$
f) $\frac{20+30i}{3+i} =$ $(Sol: 9+7i)$
g) $\frac{i}{3-2i} =$ $\left(Sol: -\frac{2}{13} + \frac{3}{13} i\right)$
h) $\frac{1+i}{i} =$ $(Sol: 1-i)$
i) $\frac{1+2i}{2-i} =$ $(Sol: i)$
j) $\frac{1-i}{2+3i} =$ $\left(Sol: -\frac{1}{13} - \frac{5}{13} i\right)$
k) $\frac{19-4i}{2-5i} + \frac{3+2i}{i} =$ $(Sol: 4)$
l) $\frac{2-i}{3+i} - \frac{1}{2i} =$ $\left(Sol: \frac{1}{2}\right)$
m) $\frac{(5-3i)(1+i)}{\overline{1-2i}} =$ $\left(Sol: \frac{12}{5} - \frac{14}{5} i\right)$
n) $\frac{(3+2i)^2+3-2i}{(5+i)^2} =$ $\left(Sol: \frac{73}{169} + \frac{40}{169} i\right)$
o) $\frac{(3-2i)(1+i)}{\overline{1+i}-2i} =$ $\left(Sol: \frac{1}{5} + \frac{8}{5} i\right)$
p) $\frac{\frac{1+i}{i}}{\frac{2+i}{1-i}} =$ $\left(Sol: -\frac{2}{5} - \frac{4}{5} i\right)$
q) $\frac{3+2i}{i} - \frac{\overline{11+2i}}{3+4i} =$ $(Sol: 1-i)$
r) $\frac{10-10i}{i} + \frac{15-25i}{\overline{2+i}} =$ $(Sol: 1-17i)$
s) $\frac{1+ai}{a-i} =$ $(Sol: i)$
t) $\frac{-a+bi}{b+ai} =$ $(Sol: i)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 151: 1; pág. 162: 2, 3 y 5*

11. Calcular el inverso de cada uno de los siguientes complejos:

a) $3i$ $\left(Sol: -\frac{1}{3}i\right)$

b) $1+i$ $\left(Sol: \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

c) $2+3i$ $\left(Sol: \frac{2}{13}-\frac{3}{13}i\right)$

d) $1-i$ $\left(Sol: \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

e) $-2+i$ $\left(Sol: -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)$

f) i $(Sol: -i)$

12. Calcular las siguientes **potencias sucesivas de i**:

a) $i^{12}=$ *(Soluc: 1)*

b) $i^{77}=$ *(Soluc: i)*

c) $i^{125}=$ *(Soluc: i)*

d) $i^{723}=$ *(Soluc: −i)*

e) $i^{2344}=$ *(Soluc: 1)*

f) $\frac{1}{i}=$ *(Soluc: −i)*

g) $\frac{1}{i^2}=$ *(Soluc: −1)*

h) $\frac{1}{i^3}=$ *(Soluc: i)*

i) $i^{-4}=$ *(Soluc: 1)*

j) $\frac{1}{i^5}=$ *(Soluc: −i)*

k) $i^{-6}=$ *(Soluc: −1)*

l) $i^{544}=$ *(Soluc: 1)*

m) $i^{6254}=$ *(Soluc: −1)*

n) $i^{-1}=$ *(Soluc: −i)*

o) $i^{-527}=$ *(Soluc: i)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 149: 4; pág. 162: 4 (potencias sucesivas de i)*

13. Calcular las siguientes **operaciones combinadas en forma binómica**:

a) $(2+i)^3=$ *(Soluc: 2+11i)*

b) $(1+i)^3=$ *(Soluc: −2+2i)*

c) $(2-3i)^3$ *(Soluc: −46−9i)*

d) i^{-131} *(Soluc: i)*

e) $\frac{i^7-1}{1+i}=$ *(Soluc: −1)*

f) $\frac{2i-1}{i^{45}}+\frac{4-3i}{1+2i}=$ *(Soluc: 4+2i)*

g) $\frac{(3-2i)^2+(2-3i)^2}{i^{12}+i^{-5}}=$ *(Soluc: 12−12i)*

h) $\frac{(2+3i)(1-i)-(3+4i)^2}{2i^{14}-i^{-7}}$ $\left(Soluc: -\frac{1}{5}+\frac{58}{5}i\right)$

i) $\frac{(3-2i)(3+i)-(2i-3)^2}{i^{23}-i^{13}}$ $\left(Soluc: -\frac{9}{2}+3i\right)$

j) $\frac{1-(2+3i)^2(1-2i)}{2i^{77}-i^{726}}$ $\left(Soluc: -\frac{62}{5}+\frac{14}{5}i\right)$

k) $\frac{(2+3i)(3-2i)-(2-3i)^2}{17(1-i^{13})}=$ *(Soluc: i)*

l) $-2-5i-\frac{10-10i-5(1+i)}{8+2i-(5+3i)}$ *(Soluc: −5−i)*

m) $\frac{(2-3i)^2-(2+3i)(3-2i)}{3i^{17}-1}=$ $\left(Soluc: -\frac{17}{5}+\frac{34}{5}i\right)$

n) $\frac{(3+i)(3-2i)-(2i-3)^2}{2i^{20}-i^{13}}+\frac{4}{5i}$ $\left(Soluc: \frac{3}{5}+4i\right)$

o) $\frac{(2-3i)^2-(2+3i)(3-2i)}{3i^{17}-1}-\frac{4}{5i^{-25}}$ $\left(Soluc: -\frac{17}{5}+6i\right)$

14. ¿Cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m−2i) (2+4i) sea un número real? ¿E imaginario puro? ¿De qué números se trata? *(Soluc: m=1 o m=−4; z=10 y z=−20i, respectivamente)*

15. Determinar **x** para que el producto z=(2−5i) (3+xi) sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? *(Soluc: x=15/2; z=87/2)*

b) Un número imaginario puro. ¿Qué complejo z se obtiene? *(Soluc: x=−6/5; z=−87i/5)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 162: 11 y 13*

16. a) Hallar **x** con la condición de que $(x-2i)^2$ sea un número imaginario puro. *(Soluc: x=±2)*

b) Ídem con $(3x-2i)^2$ *(Soluc: x=±2/3)*

c) Ídem con $(2+xi)^2$ *(Soluc: x=±2)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 151: 3*

17. Hallar **x** e **y** de modo que $\frac{3-xi}{1+2i}=y+2i$ *(Soluc: x=−16; y=7)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 162: 7 y 10*

18. Hallar **x** para que el cociente $\frac{x+3i}{3+2i}$ sea un número imaginario puro. ¿De qué número imaginario se trata? *(Soluc: x=−2; i)*

19. Determinar **k** para que el cociente $z=\frac{-2+ki}{k-i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? $\left(Sol: k=\pm\sqrt{2};\ z=\pm\sqrt{2}\right)$

b) Un número imaginario puro. ¿Qué número es? $\left(Sol: k=0;\ z=-2i\right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 35*

20. Demostrar la siguiente igualdad, obtenida de manera fortuita por el insigne filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716):

$$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}+\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}=\sqrt{6}$$

21. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es −7+i *(Soluc: 3+i y −2+i)*

22. Determinar los valores de **a** y **b** para que el complejo z=a+bi satisfaga la ecuación $z^2=\overline{z}$

☞ ***Ejercicio libro:*** *pág. 163: 31* $\left(Soluc:\ z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_3=0,\ \ z_4=1\right)$

23. Comprobar que los números complejos 2±3i verifican la ecuación $x^2-4x+13=0$

24. Hallar una ecuación polinómica cuyas raíces sean:

a) 1±3i *(Soluc: $x^2-2x+10=0$)*

b) 5±2i *(Soluc: $x^2-10x+29=0$)*

c) 2+i y 3+5i *(Soluc: $x^2-(5+6i)x+1+13i=0$)*

d) ±i *(Soluc: $x^2+1=0$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 151: 2*

25. **<u>TEORÍA</u>:** Demostrar que si las raíces complejas de $Ax^2+Bx+C=0$ son a±bi, entonces:

$$A\left[(x-a)^2+b^2\right]=Ax^2+Bx+C$$

(Ayuda: Desarrollar el miembro izquierdo y aplicar las relaciones de Cardano-Vieta)

Forma polar de un complejo:

26. Representar los siguientes complejos, sus opuestos y sus conjugados:

a) $z_1=3+4i$ **b)** $z_2=1-i$ **c)** $z_3=-3+i$ **d)** $z_4=-2-5i$ **e)** $z_5=7i$

f) $z_6=-7$ **g)** i **h)** $-\sqrt{2}\,i$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 149: 1 y 3; pág. 162: 14*

27. Pasar a forma polar los siguientes complejos (**se recomienda representarlos previamente, para así elegir correctamente su argumento**):

a) $4+4\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: 8_{60°)*

b) $3-3\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: 6_{300°)*

c) $-\sqrt{2}+i=$ *(Soluc: $\sqrt{3}_{144^\circ\,44'}$)*

d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i=$ *(Soluc: 2_{225°)*

e) $\sqrt{3}-i=$ *(Soluc: 2_{330°)*

f) $1+i$ *(Soluc: $\sqrt{2}_{45^\circ}$)*

g) $1-i$ *(Soluc: $\sqrt{2}_{315^\circ}$)*

h) $-1-i$ *(Soluc: $\sqrt{2}_{225^\circ}$)*

i) i *(Soluc: 1_{90°)*

j) $-i$ *(Soluc: 1_{270°)*

k) $3+4i$ *(Soluc: $5_{53^\circ\,8'}$)*

l) $3-4i$ *(Soluc: 5_{306°)*

m) $-3+4i$ *(Soluc: $5_{126^\circ\,52'}$)*

n) $-5+12i$ *(Soluc: $13_{112^\circ\,37'}$)*

o) $-8i$ *(Soluc: 8_{270°)*

p) 8 *(Soluc: 8_{0°)*

q) -8 *(Soluc: 8_{180°)*

r) $3+2i$ *(Soluc: $\sqrt{13}_{33^\circ 41'}$)*

s) $-2-5i$ *(Soluc: $\sqrt{29}_{248^\circ 12'}$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 153: 1; pág. 163: 21*

28. a) Hallar **m** para que el número complejo m+3i tenga módulo 5. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: m=±4)*

b) Hallar **m** para que su argumento sea 60º *(Soluc: $m=\sqrt{3}$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 28, 38 y 39*

29. Hallar un número complejo tal que |z|=3 e Im(z)=-2. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: $z_1=\sqrt{5}-2i,\ z_2=-\sqrt{5}-2i$)*

30. Hallar un número complejo del 2º cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que Re(z)=–1. Expresarlo en forma polar. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: $-1+\sqrt{3}\,i=2_{120^\circ}$)*

31. Hallar un complejo de argumento 45º tal que sumado a 1+2i dé un complejo de módulo 5 *(Soluc: 2+2i)*

32. Encontrar un complejo tal que sumándolo con 1/2 dé otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60º *(Soluc: $\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3}{2}i$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 32*

33. Pasar a forma binómica:

a) 4_{30° *(Soluc: $2\sqrt{3}+2i$)*

b) 4_{90°

c) 2_{0°

d) 5_{π}

e) $2_{3\pi/2}$

f) 1_{90°

g) 1_{30° *(Soluc: $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$)*

h) 2_{60° $\left(Soluc:\ 1+\sqrt{3}\,i\right)$

i) 6_{225° $\left(Soluc:\ -3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i\right)$

j) 4_{120° $\left(Soluc:\ -2+2\sqrt{3}i\right)$

k) 2_{150° $\left(Soluc:\ -\sqrt{3}+i\right)$

l) 3_{60° $\left(Soluc:\ \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$

m) 3_{50° *(Soluc: 1,929+2,298i)*

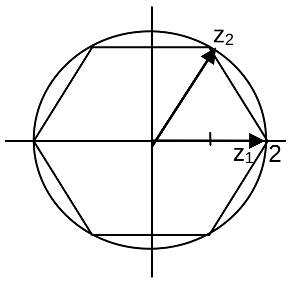
n) 2_{180° *(Soluc: −2)*

o) 1_{210° $\left(Soluc:\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$

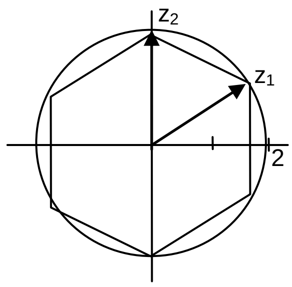
☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 153: 2; pág. 162: 15*

34. Hallar los números complejos, en forma polar y binómica, que corresponden a los vértices de estos hexágonos:

a)



b)



(Soluc: a) $z_1=2_{0^\circ}=2$; $z_4=-z_1$; $z_2=2_{60^\circ}=1+\sqrt{3}i$; $z_6=\bar{z}_2$; $z_5=-z_2$; $z_3=-z_6$ *b)* $z_1=2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i$; $z_4=-z_1$; $z_6=\bar{z}_1$; $z_3=-z_6$; $z_2=2_{90^\circ}=2i$; $z_5=-z_2$*)*

35. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(3−6i) (2−ai) sea:

a) Un número real. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=−4; 30)*

b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=1; −15i)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1er y 3er cuadrantes. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=6; −30−30i)*

36. Determinar el valor de **m** para que el complejo $z=\frac{2-mi}{8-6i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número es? *(Soluc: m=3/2; 1/4)*

b) Imaginario puro. ¿Cuál en concreto? *(Soluc: m=−8/3; i/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes. *(Soluc: m=14; 1−i)*

37. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(2+3i) (−2+ai) sea:

a) Un número real. *(Soluc: a=3)*

b) Un número imaginario puro. *(Soluc: a=−4/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1er y 3er cuadrantes. *(Soluc: a=−10)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 36 y 37*

38. a) Dado $z=2_{45^\circ}$, hallar $\bar{z}$ en polar. *(Soluc: 2_{315°)*

b) Dado $z=1_{30^\circ}$, hallar $-z$

c) Si $z=2_{30^\circ}$, hallar su conjugado y su opuesto.

d) Hallar un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es $\bar{z}=3_{70^\circ}$

39. Representar las siguientes regiones del plano complejo:

a) $Im(z)=-2$ *(Sol: recta horizontal)*
b) $Re(z)=Im(z)$ *(Sol: bisectriz del 1er cuadrante)*
c) $-1<Re(z)\le 3$ *(Sol: banda vertical)*
d) $Im(z)<2$ *(Sol: semiplano)*
e) $|z|=5$ *(Sol: circunferencia)*
f) $|z|<3$ *(Sol: región circular)*
g) $-1\le|z|<3$ *(Sol: anillo)*
h) $Arg(z)=30º$ *(Sol: recta)*
i) $Re(z)=-3$ *(Sol: recta vertical)*
j) $|z|\ge 4$
k) $Arg(z)=90º$

40. **<u>TEORÍA</u>:**

a) Demostrar que $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

b) Si $z=r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180º}$ y $r_{360º-\alpha}$?

c) El producto de dos complejos imaginarios, ¿puede ser real? Poner un ejemplo.

d) ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

e) ¿Qué condición debe cumplir un número complejo z para que $\bar{z}=\frac{1}{z}$ *(Soluc: Su módulo tiene que ser 1)*

Producto y cociente en forma polar:

41. **a)** Dados los números complejos $3_{30º}$ y $5_{60º}$, comprobar que el producto en forma polar y en forma binómica dan el mismo complejo. *(Soluc: 15i)*

b) Ídem con 3i y 2−2i $\left(Soluc:\ 6+6i=6\sqrt{2}_{\ 45º}\right)$

42. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $3_{45º}\cdot 2_{15º}$ $\left(Soluc:\ 6_{60º}=3+3\sqrt{3}\ i\right)$
b) $3_{150º}\cdot 4_{45º}$ $\left(Soluc:\ 12_{195º}\cong -11{,}59-3{,}11i\right)$
c) $1_{33º}\cdot 2_{16º}\cdot 3_{41º}$ $\left(Soluc:\ 6_{90º}=6i\right)$
d) $3_{12º}\cdot 4_{17º}\cdot 2_{1º}$ $\left(Soluc:\ 24_{30º}=12\sqrt{3}+12i\right)$
e) $2_{106º}:1_{61º}$ $\left(Soluc:\ 2_{45º}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\ i\right)$
f) $9_{37º}:3_{97º}$ $\left(Soluc:\ 3_{300º}=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$
g) $(2_{40º})^3$ $\left(Soluc:\ 8_{120º}\cong -4+4\sqrt{3}i\right)$
h) $1_{33º}:2_{16º}\cdot 3_{41º}$ $\left(Soluc:\ \left(\frac{3}{2}\right)_{58º}\cong 0{,}79+1{,}27i\right)$
i) $3_{12º}:4_{17º}:2_{1º}$ $\left(Soluc:\ \left(\frac{3}{8}\right)_{354º}\cong 0{,}37-0{,}04i\right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 155: 3; pág. 162: 16*

43. El complejo de argumento 80º y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50º. Escribir en forma binómica el otro complejo. $\left(Soluc:\ 2\sqrt{3}+2i\right)$

44. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $\frac{2_{15º}\cdot 4_{135º}}{8_{170º}}=$ $\left(Soluc:\ 1_{340º}\cong 0{,}94-0{,}34i\right)$

b) $\frac{2_{15º}\cdot(1+i)}{2_{-15º}\cdot(1-i)}=$ $\left(Soluc:\ 1_{120º}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

c) $(1+\sqrt{3}\ i)(1+i)(\sqrt{3}-i)=$ $\left(Soluc:\ 4\sqrt{2}_{\ 75º}\cong 1{,}46+5{,}46i\right)$

45. Hallar el valor de α para que el producto $3_{\pi/2}\cdot 1_\alpha$ sea:

a) Un número real positivo. *(Soluc: α=3π/2)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

46. Hallar el valor de α para que el cociente $5_\pi : 3_\alpha$ sea:

a) Un número real positivo. *(Soluc: $\alpha=\pi$)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=0$)*

c) Un número imaginario puro con su parte imaginaria positiva. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

d) Un número imaginario puro con su parte imaginaria negativa. *(Soluc: $\alpha=3\pi/2$)*

e) " " " situado en la bisectriz del 2º cuadrante

47. Sin necesidad de efectuar el producto en binómica, hallar cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m−2i) (2+4i) tenga módulo 10 *(Soluc: $m=\pm1$)*

48. Sin necesidad de efectuar el cociente, determinar el valor de **a** para que el módulo del complejo $z=\frac{a+2i}{1-i}$ sea 2 *(Soluc: $a=\pm2$)*

49. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es −8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad. (Ayuda: utilizar la forma polar) *(Soluc: $z_1=4_{120^o}$ y $z_2=2_{60^o}$)*

50. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es 4 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es 2 $\left(Soluc:\ z_1=\left(2\sqrt[3]{4}\right)_{0^o}\ y\ z_2=\left(\sqrt[3]{2}\right)_{0^o}\right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 163: 29, 30 y 31*

51. Interpretar geométricamente el resultado de multiplicar el complejo $z=a+bi=r_\alpha$ por la unidad imaginaria i.
(Soluc: Se trata de una rotación de 90º en el plano complejo)

52. Calcular cos 75º y sen 75º mediante el producto $1_{30^o}\cdot 1_{45^o}$ $\left(Soluc:\ \cos 75^o=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ sen\,75^o=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

☞ ***Ejercicio libro:*** *pág. 163: 34*

Potencias en forma polar:

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 155: 3 (sencillos)*

53. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso; dar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^2$ *(Soluc: 2i)*

b) $(2-2i)^2$ *(Soluc: −8i)*

c) $(1+i)^3$ *(Soluc: −2+2i)*

d) $(2+3i)^3$ *(Soluc: −46+9i)*

e) $(1-i)^4$ *(Soluc: −4)*

f) $(-2+i)^5$ *(Soluc: 38+41i)*

g) $\frac{(1+i)^2}{4+i}$ $\left(Soluc:\ \frac{2}{17}+\frac{8}{17}i\right)$

h) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{2}-i\right)$

i) $(i^4+i^{-13})^3$ *(Soluc: −2−2i)*

j) $(1+i)^{20}$ *(Soluc: −1024)*

k) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^6$ *(Soluc: 4096)*

l) $\frac{i^7-i^{-7}}{2i}$ *(Soluc: −1)*

m) $(4-4\sqrt{3}\,i)^3$ *(Soluc: −512)*

n) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(Soluc:\ -128+128\sqrt{3}i\right)$

o) $(\sqrt{3}-i)^5$ $\left(Soluc:\ -16\sqrt{3}-16i\right)$

p) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2}\right)^3$ *(Soluc: 27i)*

q) $(-1+i)^{30}$ *(Soluc: $2^{15}i$)*

r) $\frac{(-1+i)^2}{(1+i)^3}$ $\left(Soluc:\ -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)$

s) $(2+2\sqrt{3}\ i)^4$ *(Soluc: $-128-128\sqrt{3}i$)*

t) $(4+4\sqrt{3}\ i)^4$ *(Soluc: $-2048-2048\sqrt{3}i$)*

u) $(2+2\sqrt{3}\ i)^2$ *(Soluc: $-8+8\sqrt{3}i$)*

v) $(1+i)^5$ *(Soluc: $-4-4i$)*

w) $(1+2i)^3$

x) $(2+i^5)^3$ *(Soluc: $2+5i$)*

y) $(3+3i)^5$ *(Soluc: $-972-972i$)*

z) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^8}{\left(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\ i\right)^6}$ *(Soluc: $\left(\frac{1}{4}\right)_{30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}i$)*

α) $\dfrac{(1-\sqrt{3}\ i)^3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2}\ i)}{(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\ i)^2}$ *(Soluc: $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$)*

β) $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}\ i)^2\ (-1-i)^4}{(-1+i)^3\ i^7}$ *(Soluc: $4\sqrt{2}_{135^\circ}=-4+4i$)*

γ) $\dfrac{(-2\sqrt{3}-2\ i)^5}{(-4+4\sqrt{3}\ i)^3\ 2i}$ *(Soluc: $1_{240^\circ}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

δ) $\dfrac{(-2\sqrt{3}-2\,i)^4}{(-1+\sqrt{3}\ i)^3\ (2-2i)^2}=$ *(Soluc: $4_{210^\circ}=-2\sqrt{3}-2i$)*

ε) $\dfrac{\left(2-2\sqrt{3}\,i\right)^3}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^4\cdot i}=$ *(Soluc: $2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i$)*

ζ) $\left[\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)}{-6}\right]^3$ *(Soluc: $-i$)*

☞ ***Ejercicio libro:*** *pág. 155: 1*

54. Dados los complejos $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=3i$ y $z_3=1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3}$ **b)** $z_1\cdot z_3$ **c)** $(z_1)^4$ **d)** $\overline{z_2}$ *(Sol: a) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i$; b) $(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-)i$; c) $-8+8\sqrt{3}i$; d) $-3i$)*

55. Dado el complejo $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}\ i$, calcular $z^5\cdot\overline{z}$ *(Soluc: -64)*

56. **a)** Aplicando la fórmula de De Moivre[1], hallar sen 3α y cos 3α. Comprobar las expresiones obtenidas sustituyendo valores apropiados de α (p.ej. α=30º)

(Soluc: sen 3α=3sen α−4sen³α; cos 3α=4cos³α−3cos α)

b) Ídem para sen 4α y cos 4α

c) Ídem para las ya conocidas sen 2α y cos 2α

Raíces de un nº complejo:

57. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con **(*)**), y representarlas en el plano complejo:

a) $\sqrt[4]{1+i}$ *(Soluc: $\sqrt[8]{2}_{11,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{101,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{191,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{281,25^\circ}$)*

b) $\sqrt[3]{1-i}$ *(Soluc: $\sqrt[6]{2}_{105^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{225^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{345^\circ}$)*

(*) c) $\sqrt[4]{\dfrac{-4}{1-\sqrt{3}\ i}}$ *(Soluc: $\sqrt[4]{2}_{60^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{150^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{240^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{330^\circ}$)*

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+3i}{2-i}}$ *(Soluc: $\sqrt[6]{2}_{45^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{165^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{285^\circ}$)*

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$ *(Soluc: $i;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$)*

---

[1] Abraham De Moivre (1667-1754), matemático francés. Como dato curioso, parece ser que predijo exactamente la fecha de su propia muerte: se dio cuenta de que cada día dormía 15 minutos más que el día anterior; a partir de ahí, conjeturó que el descanso eterno le llegaría el día que durmiera durante 24 horas. Ese día aciago, calculado por él mismo, fue el 27 de noviembre de 1754.

(*) f) $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}}$ $\left(Soluc:\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -0,97+0,26i;\ 0,26-0,97i\right)$

(*) g) $\sqrt{\mathrm{i}}$ $\left(Soluc:\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

h) $\sqrt[3]{\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}}$ $(Soluc:\ 0,89_{95º;}\ 0,89_{215º;}\ 0,89_{335º})$

(*) i) $\sqrt[3]{8\mathrm{i}}$ $\left(Soluc:\ 2i;\ \pm\sqrt{3}+i\right)$

(*) j) $\sqrt[4]{-1}$ $\left(Soluc:\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

(*) k) $\sqrt[3]{8}$ $\left(Soluc:\ 2;\ -1\pm\sqrt{3}\,i\right)$

(*) l) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$ $\left(Soluc:\ \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i;\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$

m) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$ $(Soluc:\ 2_{100º;}\ 2_{220º;}\ 2_{340º})$

(*) n) $\sqrt[3]{\frac{8+8\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}}$ $\left(Soluc:\ -2i;\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)$

o) $\sqrt[4]{-2+2\mathrm{i}}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[8]{8}_{\ 33,75º;}\ \sqrt[8]{8}_{\ 123,75º;}\ \sqrt[8]{8}_{\ 213,75º;}\ \sqrt[8]{8}_{\ 303,75º}\right)$

(*) p) $\sqrt[4]{-16}$ $\left(Soluc:\ \pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i\right)$

q) $\sqrt[5]{-243}$ $(Soluc:\ 3_{30º;}\ 3_{108º;}\ 3_{180º};\ 3_{252º;}\ 3_{324º})$

(*) r) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$ $\left(Soluc:\ \sqrt{3}+i;\ -1+\sqrt{3}\,i;\ -\sqrt{3}-i;\ 1-\sqrt{3}\,i\right)$

(*) s) $\sqrt[3]{\frac{-1-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}}$

(*) t) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}}$

(*) u) $\sqrt[3]{\frac{-8+8\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}}$

(*) v) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}}$

(*) w) $\sqrt[4]{\frac{-16\mathrm{i}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}}$

x) $\sqrt[3]{-1}$

y) $\sqrt{-36}$

z) $\sqrt[3]{-27}$

α) $\sqrt[6]{729\mathrm{i}}$

β) $\sqrt[4]{16_{180º}}$

(*) γ) $\sqrt[4]{\frac{8\sqrt{3}+8\mathrm{i}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}}$ $\left(Soluc:\ \frac{\sqrt[4]{8}}{2}+\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ -\frac{\sqrt[4]{72}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i;\ -\frac{\sqrt[4]{8}}{2}-\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ \frac{\sqrt[4]{72}}{2}-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i\right)$

(*) δ) $\sqrt[3]{\frac{\mathrm{i}^6+\mathrm{i}^{-6}}{-2\mathrm{i}}}$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 157: 3 y 7; pág. 162: 17, 18, 19, 20 y 22*

58. <u>TEORÍA</u>:

a) El número 4+3i es la raíz cuarta de un cierto complejo z; hallar las otras tres raíces.

b) ¿Pueden ser 2+i, –2+i, –1–2i y 1–2i las raíces cuartas de un complejo? Justificar la respuesta.

c) ¿Pueden ser 2_{28^o}, 2_{100^o}, 2_{172^o}, 2_{244^o} y 2_{316^o} las raíces de un complejo? ¿De cuál?

d) El complejo 3_{40^o} es vértice de un pentágono regular. Hallar los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

e) Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es i+i. Hallar z y las otras raíces cúbicas.

59. a) Hallar las raíces cúbicas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(Soluc: 1;\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

b) Hallar las raíces cuartas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$(Soluc: \pm 1;\ \pm i\ )$

c) Hallar las raíces quintas de la unidad en forma polar, y dibujarlas.

$(Soluc: 1_{0^o;} 1_{72^o;} 1_{144^o};\ 1_{216^o;} 1_{288^o})$

d) Hallar las raíces sextas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(Soluc: \pm 1;\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

60. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

a) $x^3+8=0$ *(Soluc: –2,* $1\pm\sqrt{3}i$*)*

b) $x^4-16=0$ *(Soluc: ±2, ±2i)*

c) $ix^4+16=0$

d) $x^4+1=0$ $\left(Soluc: \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 157: 2 y 4; pág. 164: 24 y 26*