5 Funciones trigonométricas y números complejos

En la **Unidad 4** hemos estudiado las razones trigonométricas de un ángulo y sus relaciones; en esta vamos a estudiar las funciones circulares a que dan lugar las mencionadas razones. Se profundizará en los conceptos de periodicidad y acotación ya estudiados en Secundaria. También se presentan las funciones inversas arco seno, arco coseno y arco tangente.

Leonhard Euler (Wikimedia Commons)

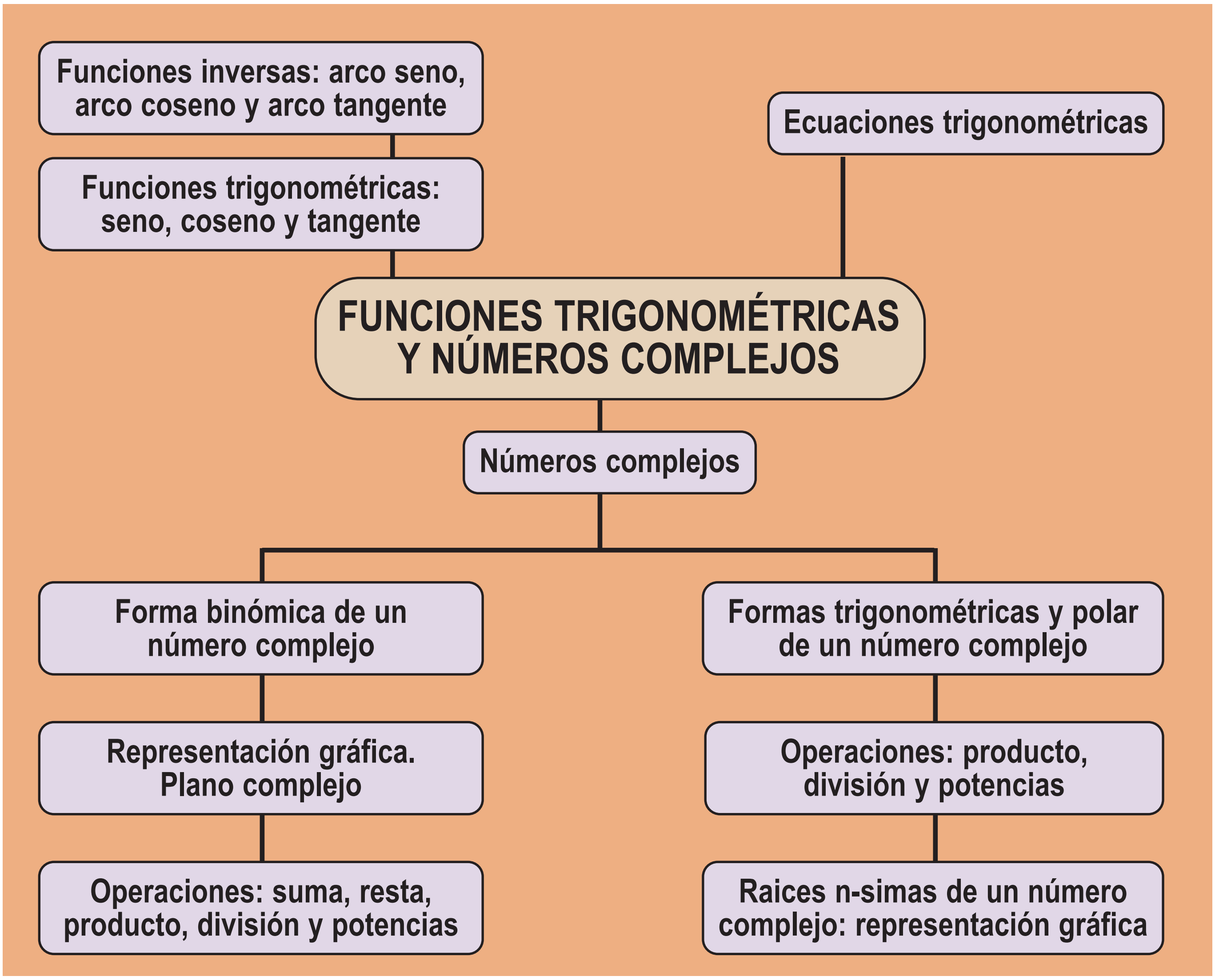
Continuamos con el estudio de las ecuaciones trigonométricas, donde aplicamos tanto los conocimientos sobre las funciones trigonométricas como las relaciones entre las razones trigonométricas estudiadas en la Unidad anterior.

La trigonometría nos ayuda a estudiar un nuevo conjunto numérico, cuyos elementos se llaman "**números complejos**". Suponen la ampliación del conjunto de los números reales, de modo que en dicho conjunto se pueden calcular raíces cuadradas de números negativos, así como efectuar todas las demás operaciones de los números reales. Esta ampliación es posible gracias a la introducción del número *i*, nombre que el matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783) dio a la unidad imaginaria y que se define como $i = \sqrt{-1}$.

Si los números reales se representan en una recta que llenan (recta real), su conjunto ampliado necesita un plano para su representación (plano complejo). Veremos las diferentes formas de escribir un número complejo, así como las operaciones que podemos realizar con ellos (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Manejar con soltura las propiedades de las funciones circulares y de sus inversas.
2. Reconocer las gráficas de las funciones circulares y de sus inversas.
3. Manejar con soltura las relaciones entre razones trigonométricas de ángulos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.
4. Reconocer las diversas formas de expresar un número complejo y pasar de una a otra según convenga en la aplicación.
5. Realizar con soltura operaciones con números complejos utilizando en cada caso la forma de expresión adecuada.
6. Determinar y representar en el plano las raíces enésimas de un número complejo.

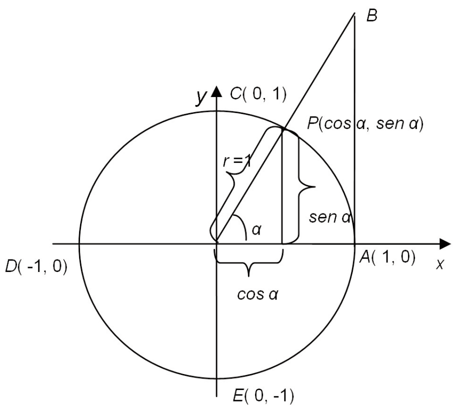


ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Funciones trigonométricas o circulares

Vamos a construir las funciones que asocian a cada ángulo, medido en radianes, el valor de su seno, coseno y tangente.

Para ello, recuerda que las coordenadas del punto de corte del segundo lado de un ángulo central con la circunferencia goniométrica son $P(x, y) = P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Además, como la tangente del ángulo es el valor del segmento $\overline{AB}$ de la figura, resulta que la circunferencia de radio unidad será un auxiliar valioso para estudiar las funciones circulares.



En la tabla siguiente aparecen los valores de las funciones seno, coseno y tangente de algunos ángulos.

GRADOS	0º	45º	90º	135º	180º	225º	270º	315º	360º
RADIANES	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
sen	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	–1	$-\sqrt{2}/2$	0
cos	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	–1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1
tg	0	1	——	–1	0	1	——	–1	0

Con estos datos se dibujan las funciones

$$y = \operatorname{sen} x; \quad y = \cos x; \quad y = \operatorname{tg} x$$

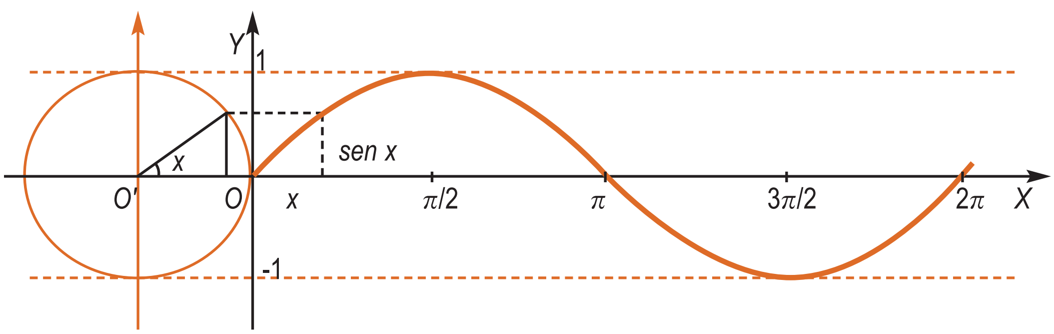
en las que la variable ángulo medido en radianes es la abscisa *x*, y la ordenada *y* es la razón trigonométrica correspondiente.

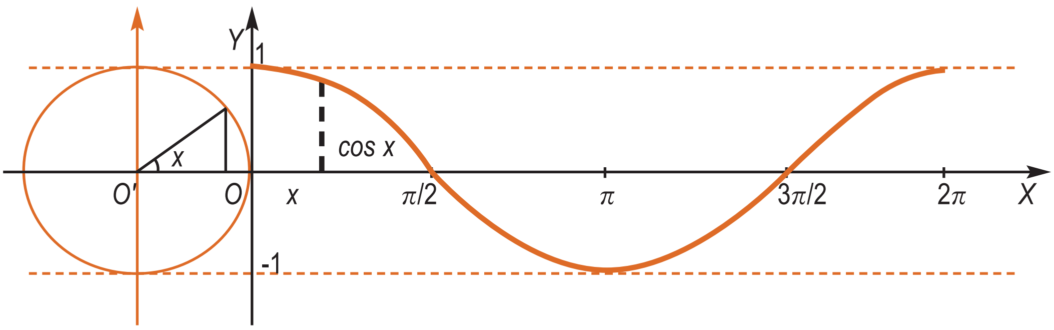
Estas funciones son las llamadas **funciones trigonométricas o circulares**.

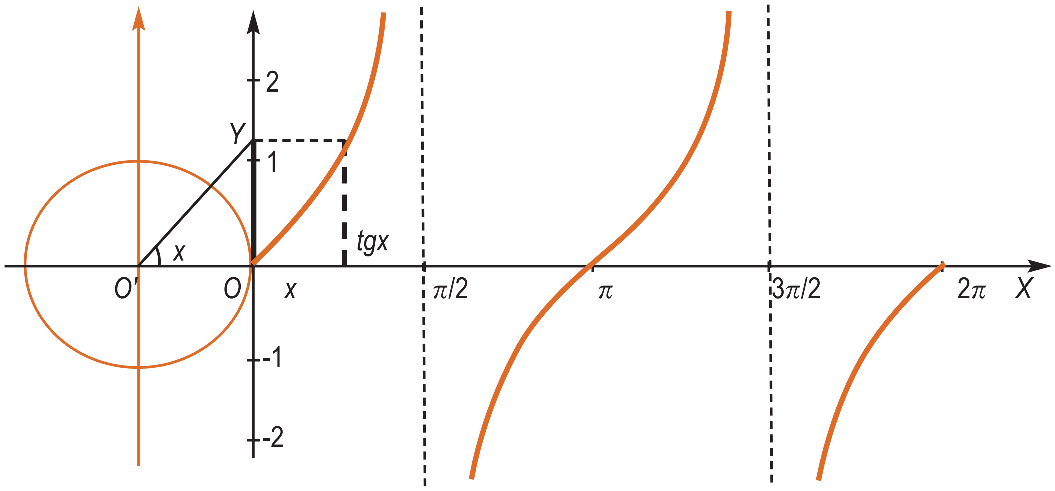
En la primera figura las coordenadas de $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ informan que el seno y el coseno no pueden ser mayores que 1, ni menores que –1 pues son los catetos de un triángulo cuya hipotenusa es la unidad. Podemos escribir por tanto que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1, \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1,$$

y, además, cuando el seno vale 1 ó –1, el coseno ha de valer 0, y a la inversa, cuando el coseno vale 1 ó –1, el seno vale 0.







En cambio, la tangente no está acotada. Observa que para $\frac{\pi}{2}$ rad se obtendría por la definición $\frac{1}{0}$, lo que nos lleva a decir que $tg\,\frac{\pi}{2}=\infty$, aunque con las precauciones pertinentes, pues dependiendo de cómo nos acerquemos a $\frac{\pi}{2}$ (por su izquierda o por su derecha) podemos ir a ∞ ó $-\infty$. Lo mismo sucede en $\frac{3\pi}{2}$.

Funciones trigonométricas definidas en *R*

En las gráficas anteriores se han representado las funciones trigonométricas sólo en el intervalo $[0, 2\pi]$. Sin embargo, el ángulo, interpretado como giro, tiene sentido para valores superiores a 2π, e incluso giros negativos.

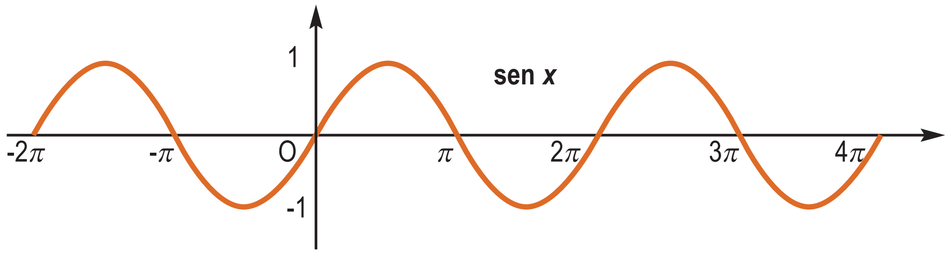
Para el estudio de las funciones fuera del intervalo $[0, 2\pi]$ tendremos en cuenta que para los valores de los ángulos superiores a 360º ó 2π rad, se verifica que:

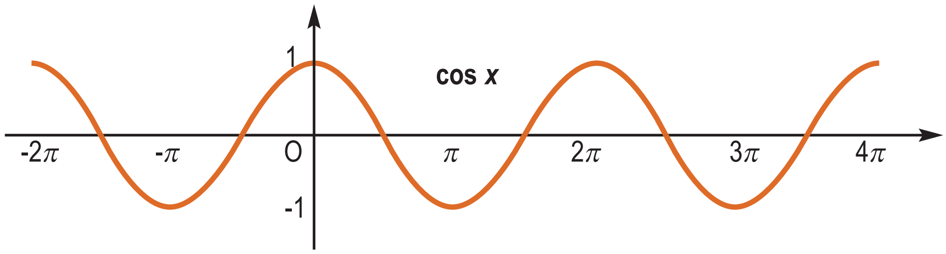
$$x' = x + 360^{\circ}\cdot n \quad (x' \text{ y } x \text{ medidos en grados})$$

$$x' = x + 2\pi\cdot n \quad (x' \text{ y } x \text{ medidos en radianes})$$

La coincidencia de los ángulos anteriores implica que sus razones trigonométricas coinciden. Dado que los valores de las funciones trigonométricas *sen x* y *cos x* se repiten periódicamente en cada intervalo de longitud 2π, decimos que son **funciones periódicas** de período 2π. Abreviadamente:

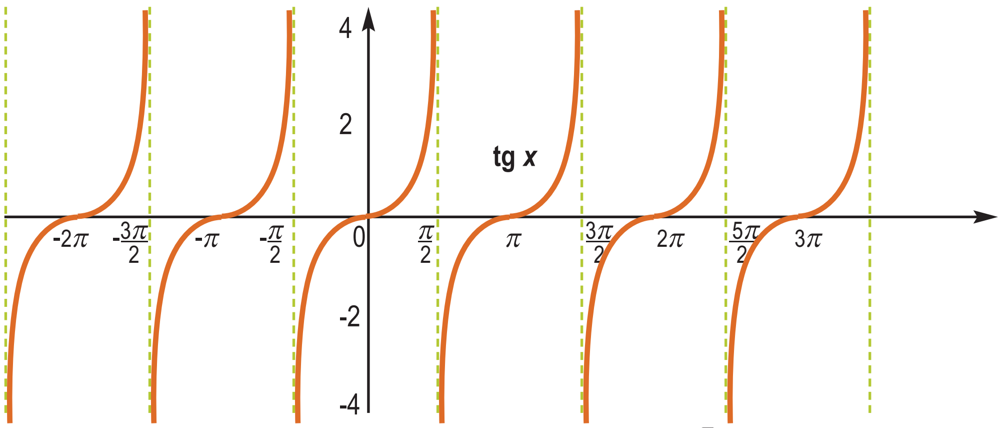
$$sen\,(\alpha + 2\pi) = sen\,\alpha; \qquad cos\,(\alpha + 2\pi) = cos\,\alpha.$$





Se observa que la gráfica de la función coseno tiene la misma forma que la del seno aunque empieza valiendo uno (está desplazada $\frac{\pi}{2}$ rad con respecto al seno).

La tangente no se parece a ninguna de las anteriores:



Vale cero siempre que lo vale el seno. A medida que nos acercamos a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda (ángulos del primer cuadrante) el coseno se acerca a cero con números positivos y el seno a uno, por lo que la tangente tenderá a ∞. Si nos acercamos a $\frac{\pi}{2}$ por la derecha (ángulos del segundo cuadrante), el coseno se acerca a cero pero con números negativos y el seno se acerca a 1, por lo que la tangente tiende a $-\infty$. Por lo tanto, $x = \frac{\pi}{2}$ es una asíntota vertical de la tangente.

Igual le sucede en $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{2}\ldots$, es decir, la tangente tiene infinitas asíntotas verticales en los puntos cuya abscisa vale $x = \frac{\pm(2n+1)\pi}{2}$ (múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$). Como las asíntotas verticales van, por ejemplo, de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$, el período de la tangente es de $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad.

El siguiente paso es definir las funciones trigonométricas *sen x*, *cos x* y *tg x*, ésta última como $tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$.

Las funciones responden a una abstracción de las razones trigonométricas y conservan las propiedades que tienen dichas razones, que son:

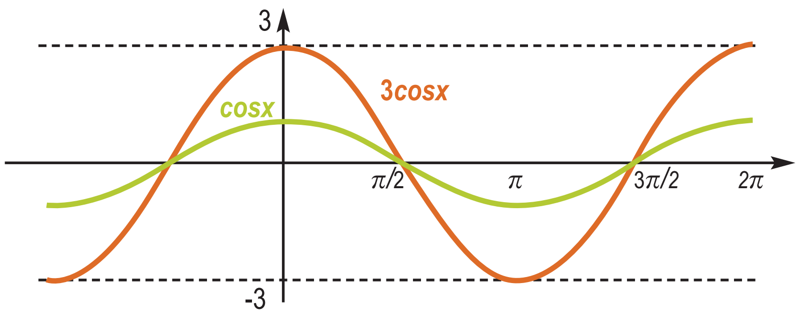
- El dominio de las funciones seno y coseno es R, y el de la tangente $R-\left\{\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}\right\}$, pues hay que excluir los puntos cuya abscisa sea múltiplo impar de $\pi/2$. Por ello, las tres son continuas en sus respectivos dominios.

- $sen^2 x + cos^2 x = 1 \Rightarrow -1 \leq sen\,\alpha \leq 1,\ -1 \leq cos\,\alpha \leq 1 \Rightarrow$ Las funciones seno y coseno están acotadas superiormente por 1 e inferiormente por –1, mientras que la función tangente no está acotada. Se dice que la amplitud del seno y del coseno vale 1.

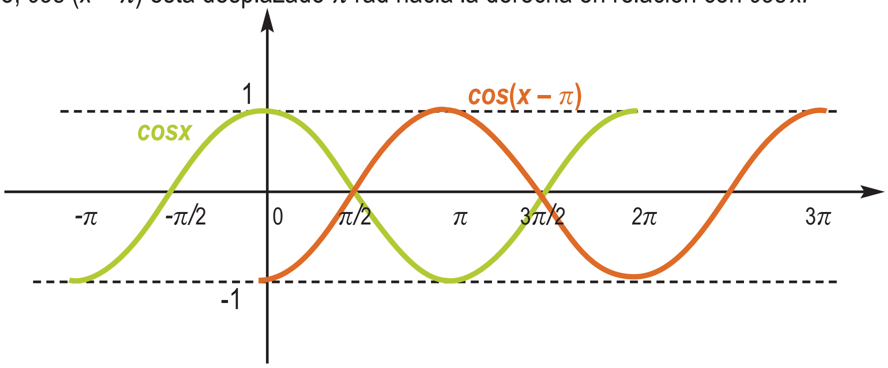
- Las tres funciones son periódicas; seno y coseno tienen de período 2π rad y la tangente π rad:
  $sen\,(x + 2\pi) = sen\,x$; $cos\,(x + 2\pi) = cos\,x$, $tg\,(x + \pi) = tg\,x$.

Estas funciones se usan para la descripción de fenómenos periódicos debido a sus propiedades.

- Podemos cambiar la amplitud si multiplicamos seno y coseno por algún número distinto de 1 y de –1. Por ejemplo, la amplitud de $3cos\,x$ es 3, pues verificará que $-3 \leq 3cos\,x \leq 3$.



- Podemos desplazarlas a izquierda y a derecha sin más que sumar o restar una cantidad en el argumento. Por ejemplo, $cos\,(x - \pi)$ está desplazado π rad hacia la derecha en relación con $cos\,x$.



- Podemos modularla (cambiarle el período T) multiplicando o dividiendo el argumento por un número. Por ejemplo, $sen\,2x$ tiene un período de $\pi = \left(\frac{2\pi}{2}\right)$ rad, ya que $2x$ crece el doble de lo que lo hace x, por lo que $sen\,2x$ tardará la mitad en repetirse; $cos\,\frac{x}{3}$ tiene un período de $6\pi = (3\cdot 2\pi)$ rad, pues $\frac{x}{3}$ crece la tercera parte de lo que lo hace x, por lo que $cos\,\frac{x}{3}$ tardará tres veces más en repetirse. En general, el $sen\,kx$ o $cos\,kx$ tienen por período $T = \frac{2\pi}{k}$ rad.

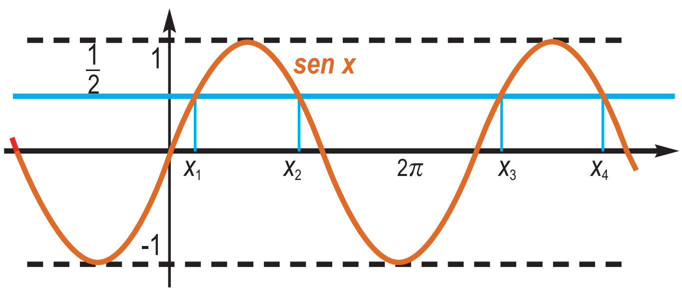
¿Cómo podremos despejar *x* en la ecuación sen $x = \frac{1}{2}$?

Para hacerlo necesitamos definir las **funciones inversas de las funciones circulares**. Tenemos tres, una para cada función, que son:

- arc *sen* *x*, habitualmente $\boxed{\sin^{-1}}$ en la calculadora, es la inversa del seno; se lee *arco cuyo seno vale x* o, abreviadamente, *arco seno de x*. Como el seno está acotado por 1 y –1, no admite que *x* sea mayor que 1 o menor que –1.
- arc *cos* *x*, en la calculadora $\boxed{\cos^{-1}}$, es la inversa del coseno; se lee *arco cuyo coseno vale x* o, abreviadamente, *arco coseno de x*. Tampoco en este caso *x* puede ser mayor que 1 o menor que –1.
- arc *tg* *x*, en la calculadora $\boxed{\tan^{-1}}$, inversa de la tangente; se lee *arco cuya tangente vale x* o, abreviadamente, *arco tangente de x*. Como la tangente no está acotada, tampoco lo estarán los valores que podemos poner en el arco tangente.

Para saber más...

Las funciones inversas $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$, $\boxed{\tan^{-1}}$, operan directamente en algunas calculadoras científicas, aunque generalmente lo hacen presionando la tecla $\boxed{INV}$ o $\boxed{Shift}$ y a continuación la función directa correspondiente.



Al introducir un valor, estas tres funciones devuelven un ángulo. El problema es que no devuelven uno sino infinitos, porque las funciones de las que son inversas son periódicas y, por lo tanto, se repiten indefinidamente. Aunque evitemos la repetición periódica restringiéndonos al intervalo $[0, 2\pi]$, estas funciones inversas nos devuelven más de un valor, lo que en rigor les quitaría el título de funciones. Por ejemplo, en la ecuación del principio $sen\, x = \frac{1}{2}$ sabemos que existen dos ángulos *x* que tienen ese valor del seno, uno en el primer cuadrante (30º) y otro en el segundo cuadrante (150º), aunque la calculadora sólo nos dará una: la del primer cuadrante (fíjate en el gráfico adjunto).

Lo mismo le ocurre a la ecuación *cos x* = 0,75: la calculadora nos dará una única solución (la del primer cuadrante) y omitirá la que hay en el 4º cuadrante (prueba con la gráfica del coseno para comprobarlo).

La forma de despejar *x* en $sen\ x = \frac{1}{2}$ es la siguiente: $x = arc\ sen\ \frac{1}{2}$, que como sabemos tiene dos valores; $x = 30º = \frac{\pi}{6}$ rad o bien $x = 150º = \frac{5\pi}{6}$ rad.

Con la calculadora se consigue *x* mediante las secuencias siguientes en grados o radianes:

a) 1 $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{Shift}$ $\boxed{\sin}$ y aparece en pantalla | DEG 30º |

b) 1 $\boxed{:}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{Shift}$ $\boxed{\sin}$ y aparece en pantalla | RAD 0.523598775 |

Las pantallas indican respectivamente 30º y 0,523598775 rad (que son $\frac{\pi}{6}$ rad), pues la calculadora sólo aporta un valor para *x*, el del primer cuadrante.

De la misma forma se despeja x en $\cos x = 0{,}75 \Rightarrow x = \text{arc}\cos 0{,}75$.

Con la calculadora se consigue x mediante las secuencias siguientes en grados o radianes:

a) 0.75 Shift cos y aparece en pantalla DEG 41.40962211

b) 0.75 Shift cos y aparece en pantalla RAD 0.722734247

Las pantallas indican respectivamente 41,40962211º y 0,72274247 rad, la solución del primer cuadrante; la del cuarto cuadrante se determina a partir de las secuencias siguientes:

DEG 41.40962211 Min 360 – MR = DEG 318.5903779

RAD 0.722734247 Min 2 x π = – MR = RAD 5.560451059

Las pantallas aportan las soluciones 318,5903779º = 5,560451059 rad.

Gráficas de las funciones inversas

Se construyen las funciones inversas de las funciones circulares a partir de las restricciones impuestas, que son necesarias para que la función circular asocie un solo ángulo a cada número. A continuación aparecen las restricciones que se imponen a cada función circular para definir su inversa y su gráfica.

Función arco seno: Se restringe la función seno al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donde es creciente, tiene por recorrido el intervalo [–1, 1] y sus valores no se repiten (ver la gráfica adjunta). Su inversa es la función $y = \text{arc } sen\ x$.

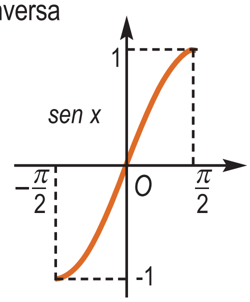


Tabla de valores para *sen x*:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = sen\ x$	–1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

La función $y = \text{arc } sen\ x$ tiene como dominio [–1, 1] y por recorrido $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

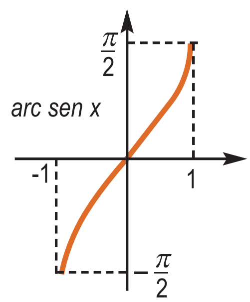


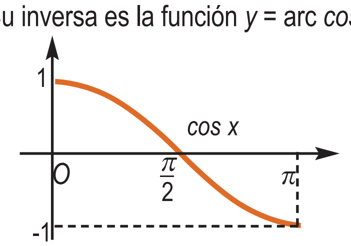
Tabla de valores para $y = \text{arc } sen\ x$:

x	–1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$y = \text{arc } sen\ x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

Función arco coseno: Se restringe la función coseno al intervalo $[0, \pi]$ donde es decreciente, tiene por recorrido el intervalo [–1, 1] y sus valores no se repiten (ver la gráfica adjunta). Su inversa es la función $y = \text{arc } \cos x$.

Tabla de valores para *cos x*:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1



La función y = arc cos x tiene como dominio [–1, 1] y por recorrido [0,π].

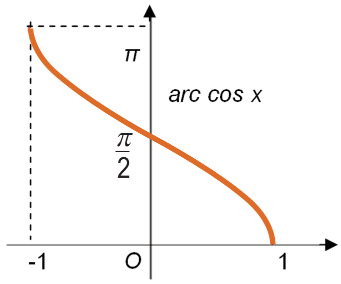


Tabla de valores para y = arc cos x:

x	–1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
y = arc cos x	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0

Función arco tangente: Se restringe la función tangente al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ donde es creciente, tiene por recorrido el intervalo [–∞, ∞] y sus valores no se repiten (ver gráfica adjunta).
Su inversa es la función y = arc tg x.

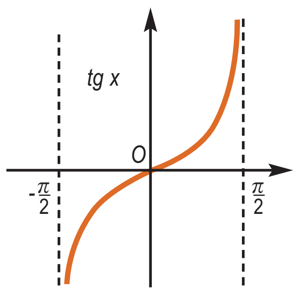


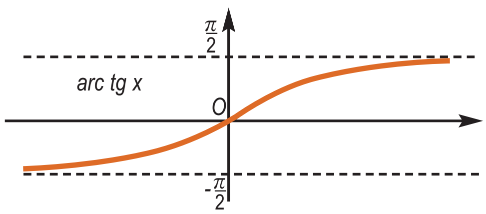
Tabla de valores para tg x:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y = tg x	$\to -\infty$	–1	0	1	$\to \infty$

La función y = arc tg x tiene como dominio [–∞, ∞] y por recorrido $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Tabla de valores para y = arc tg x:

x	$-\sqrt{3}$	–1	0	1	$\sqrt{3}$
y = arc tg x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$



Ejemplos

1. Indica la amplitud, el período y el desplazamiento lateral, si lo hubiera, de las siguientes funciones:

a) $y = sen\,(x+\pi)$; **b)** $y = 5\cos x$; **c)** $y = 2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Solución:

a) El seno no está multiplicado por ningún número, por lo que su amplitud no cambia y vale 1. En el argumento x está multiplicada por 1, por lo que no cambia el período, valiendo $T = 2\pi$ rad; como tenemos $+\pi$, la función está desplazada π radianes hacia la izquierda, porque al resolver la ecuación $x + \pi = 0 \Rightarrow x = -\pi$.

b) Como el coseno está multiplicado por 5, su amplitud valdrá 5; en el argumento sólo aparece x, lo que indica que ni se modifica el período, que sigue valiendo 2π rad, ni hay desplazamiento lateral.

c) La amplitud vale 2; el período valdrá $T=\frac{2\pi}{3}$ rad y habrá un desplazamiento lateral que se obtiene de resolver la ecuación $3x-\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow 3x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$ rad.

2. Calcula la inversa de la función $y = 4\,sen\,(3x - \pi)$.

Solución :

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = 4\,sen\,(3y - \pi) \Rightarrow sen\,(3y - \pi) = \frac{x}{4} \Rightarrow (3y - \pi) = arc\ sen\,\frac{x}{4} \Rightarrow 3y = \pi + arc\ sen\,\frac{x}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{\pi + arc\ sen\,\frac{x}{4}}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} arc\ sen\,\frac{x}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} arc\ sen\,\frac{x}{4}.$$

3. Halla la inversa de la función $y = 5\,tg\left(\frac{x}{3} + 1\right)$.

Solución :

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = 5\,tg\left(\frac{y}{3} + 1\right) \Rightarrow tg\left(\frac{y}{3} + 1\right) = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{y}{3} + 1 = arc\ tg\,\frac{x}{5} \Rightarrow \frac{y}{3} = arc\ tg\,\frac{x}{5} - 1 \Rightarrow y = 3\left(arc\ tg\,\frac{x}{5} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 3 \cdot arc\ tg\,\frac{x}{5} - 3.$$

4. Indica la amplitud, el período y el desplazamiento lateral, si lo hubiera, de las funciones:

a) $y = 7\cos 4x$; **b)** $y = \frac{1}{5} sen\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$; **c)** $y = -6\,sen\,\frac{x}{2}$.

Solución :

a) La amplitud es 7; no hay desplazamiento lateral, pues no hay ninguna cantidad sumando o restando en el argumento; el período será $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ rad.

b) La amplitud es $\frac{1}{5}$; el período no cambia porque el número que multiplica a x es 1 y hay un desplazamiento lateral de $\frac{3\pi}{2}$ rad hacia la izquierda, que se obtiene al resolver la ecuación $x + \frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$ rad.

c) La amplitud vale 6, porque el signo $-$ lo único que hace es dar la vuelta a la función respecto al eje X (pasa lo positivo a negativo y lo negativo a positivo); no hay desplazamiento lateral y el período valdrá $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$ rad.

Actividades

1. Calcula la inversa de $y = 5\,sen\,(x - \pi) + 1$

2. Indica la amplitud, el período y el desplazamiento lateral de las funciones siguientes:

a) $y = -\frac{1}{2}\cos(4x + \pi)$; **b)** $y = sen\left(\frac{x+1}{5}\right)$; **c)** $y = 4\,sen\,(8x - 7)$.

3. Averigua las soluciones que tienen en el primer cuadrante las ecuaciones siguientes, tanto en radianes como en sexagesimal: **a)** $sen\ x = 0{,}1$; **b)** $tg\ x = 4$; **c)** $3\cos x + 2 = 4$.

2. Ecuaciones trigonométricas

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece en el argumento de una razón trigonométrica. La solución se puede dar en grados o radianes, aunque es preferible usar radianes, que es la unidad de medida de ángulos del Sistema Internacional.

Existe una enorme variedad de **ecuaciones trigonométricas** y para resolverlas es preciso recurrir a todo el conjunto de fórmulas que se obtuvieron en la **Unidad 4**, empleando la más adecuada en cada problema. Es especialmente importante la comprobación de las soluciones, pues no es raro que aparezcan soluciones anómalas al resolver este tipo de ecuaciones.

Ejemplos

5. Resuelve la ecuación $sen\ x = \frac{1}{2}$.

Solución :

Conforme vimos en el apartado anterior, lo primero es buscar el ángulo del primer cuadrante que cumple la ecuación:

$x = arc\ sen\frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^o$, en radianes $x = \frac{\pi}{6}$ rad.

Pero el seno es positivo en el primero y segundo cuadrante, recordando la Unidad anterior tenemos que:

$x = 180^o - 30^o = 150^o$; en radianes, $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ son: $\begin{cases} x = 30^o, \text{ o en radianes, } x = \frac{\pi}{6} \\ x = 150^o, \text{ o en radianes, } x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$.

Como la función seno tiene por período 2π la solución general será:

$$sen\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^o + 360^o \cdot n \text{ o, en radianes, } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n \\ x = 150^o + 360^o \cdot n \text{ o, en radianes, } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n \end{cases}$$, donde n es un número entero.

A partir de este ejemplo las soluciones se darán únicamente en radianes.

6. Resuelve $cos\,2x + sen^2\,x = 0$.

Solución :

En el ángulo aparecen x y $2x$. Para que sólo aparezca x se usa la relación: $cos\,2x = cos^2\,x - sen^2\,x$

Se sustituye cos $2x$ en la ecuación:

$cos^2\,x - sen^2\,x + sen^2\,x = 0 \Rightarrow cos^2\,x = 0 \Rightarrow cos\,x = 0$.

Las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ son: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} rad \\ x = \frac{3\pi}{2} rad \end{cases}$. La solución general será: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\ rad \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\ rad \end{cases}$, $n \in Z$.

(En este caso particular la solución general se puede escribir en una sola expresión: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi\ rad, n \in Z$)

7. Resuelve $sen\,x = cos\,2x$.

Solución :

Se procede como en el ejemplo anterior para dejar el ángulo solo en función de *x*.

$sen\,x = (cos^2 x - sen^2 x) \Rightarrow sen\,x = (1 - sen^2 x) - sen^2 x \Rightarrow 2\,sen^2 x + sen\,x - 1 = 0$. Se trata de una ecuación de segundo grado en $sen\ x$, cuyas soluciones son: $sen\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2(-1)}}{2\cdot 2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$.

Si $sen\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi\ rad \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi\ rad \end{cases}$, $n \in Z$; si $sen\ x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi\ rad, n \in Z$.

Actividades

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) 2 *sen x* +1 = 0; **b)** *cos* 2*x* + *sen x* = 1; **c)** *tg x* – *sen* 2*x* = 0; **d)** $2\cdot cos^3 x = cos\ x$.

5. Resuelve la ecuación $sen\ x\cdot cos x + cos^2 x = 1$.

6. Resuelve la ecuación *cos* x + *cos* 2x = –1.

Para saber más...

Identidades trigonométricas

Llamamos identidades trigonométricas a las igualdades entre expresiones trigonométricas que se cumplen para cualquier valor de la variable.

Para demostrar que dos expresiones son iguales se recurre al conjunto de fórmulas que se han estudiado en la **Unidad 4**, empleando la más adecuada en cada caso. Como muestra vamos a demostrar la identidad

$$\frac{(cos\,x + sen\,x)\,cos\,2x}{cos\,x - sen\,x} = 1 + sen\,2x.$$

Solución:

El método consiste en trasformar la primera expresión, que es más compleja, en la segunda. Como esta última es más sencilla, podemos decir que simplificamos.

Recordamos la fórmula del coseno del ángulo doble: $cos\ 2x = cos^2 x - sen^2 x = (cos\ x + sen x)(\ cos x - sen\ x)$.

Sustituimos y simplificamos $\dfrac{(cos\,x + sen\,x)\,cos\,2x}{cos\,x - sen\,x} = \dfrac{(cos\,x + sen\,x)(cos\,x + sen\,x)(cos\,x - sen\,x)}{cos\,x - sen\,x} = (cos\,x + sen\,x)^2 =$

$$= cos^2 x + sen^2 x + 2\,cos\,x\,sen\,x \overset{\text{fórmula fundamental}}{\underset{\text{ángulo doble}}{=}} 1 + sen\,2x.$$

Otras veces el problema consiste directamente en la simplificación. Por ejemplo, simplifica la expresión $sen\ 3x\cdot cos\ 2x + sen\ 2x\cdot cos\ 3x$.

Solución:

Recordamos la fórmula del seno de una suma:

$$sen\,3x\cdot cos\,2x + sen\,2x\cdot cos\,3x = sen\,3x\cdot cos\,2x + cos\,3x\cdot sen\,2x = sen\left(3x + 2x\right) = sen\,5x.$$

3. Definición de número complejo

Al intentar resolver la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$, la aplicación de la fórmula da como soluciones:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}.$$

En la **Unidad 3** decíamos que la ecuación no tenía solución porque los números negativos no tienen raíz cuadrada real. Para dar solución a este tipo de problemas se introduce la llamada **unidad imaginaria** $i = \sqrt{-1}$. De este modo se puede continuar con la resolución de la ecuación de la siguiente manera:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36(-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}i}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Se amplían así los números conocidos hasta el momento, creando los llamados **números complejos** en la forma $a + bi$. Estos números los denotaremos por la letra C: $C = \{z = a + bi \mid a, b \in R\}$.

La expresión $z = a + bi$ de los complejos se llama **forma binómica**, porque tiene dos componentes: ***a*** es la **componente** o **parte real** ($Re(z)$) y ***b*** es la **componente** o **parte imaginaria** ($Im(z)$).

Los números reales son complejos con la parte imaginaria nula $z = a + 0i$: $R \subset C$.

Los **números imaginarios** tienen la parte imaginaria distinta de cero; por lo tanto, un número complejo es real o imaginario.

Los **números imaginarios puros** tienen la parte real nula $z = 0 + bi$.

Dado un número complejo $z = a + bi$ se llama **opuesto** del mismo al complejo $-z = -a - bi$.

Dado un número complejo $z = a + bi$ se llama **conjugado** del mismo al complejo $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplos

8. Calcula las soluciones de las ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$; **b)** $x^2 - 6x + 10 = 0$; **c)** $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$.

Solución:

a) $x^2 + 4 = 0$; $x^2 = -4$; $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$; son dos soluciones imaginarias puras y conjugadas.

b) $$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 10}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i.$$

Soluciones: $x_1 = 3 + i$, $x_2 = 3 - i$, complejos conjugados.

Las soluciones de las ecuaciones de segundo grado, que no son números reales, son números complejos conjugados.

c) Se realiza el cambio: $x^2 = y$, $x^4 = y^2$.

Se obtiene la ecuación de segundo grado: $y^2 + 5y + 4 = 0$.

Se resuelve esta ecuación en y : $$y = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-5+3}{2} = -1 \\ \frac{-3-5}{2} = -4 \end{cases}.$$

De $y = x^2 = -1$, se obtienen las soluciones, $x_1 = i$ y $x_2 = -i$.

De $y = x^2 = -4$, se obtienen las soluciones, $x_3 = 2i$ y $x_4 = -2i$.

La ecuación propuesta tiene cuatro soluciones complejas conjugadas dos a dos.

9. Escribir los opuestos y los conjugados de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 2 + 5\,i$; **b)** $z_2 = 3 - 4\,i$; **c)** $z_3 = -3$; **d)** $z_4 = 6\,i$.

Solución:

a) El opuesto de $z_1 = 2 + 5\,i$ es $-z_1 = -2 - 5\,i$. Su conjugado es $\overline{z}_1 = 2 - 5i$.

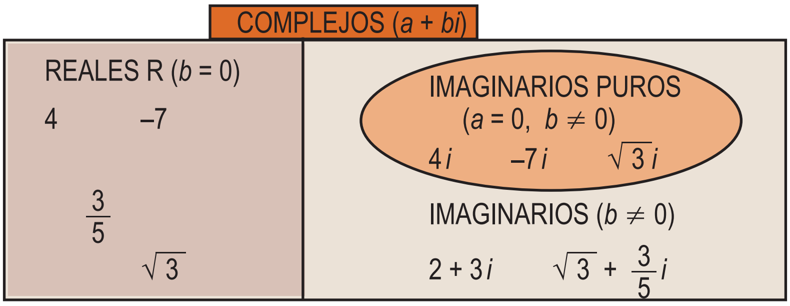
b) El opuesto de $z_2 = 3 - 4\,i$ es $-z_2 = -3 + 4\,i$. Su conjugado es $\overline{z}_2 = 3 + 4i$.

c) El opuesto de $z_3 = -3$ es $-z_3 = 3$. Su conjugado es $\overline{z}_3 = -3$.

d) El opuesto de $z_4 = 6\,i$ es $-z_4 = -6\,i$. Su conjugado es $\overline{z}_4 = -6i$.

Para saber más...

El conjunto *C* de los números complejos contiene al conjunto *R*, ya que todo número real es un complejo con la parte imaginaria nula "$b = 0$"; los imaginarios puros tienen la parte real nula "$a = 0$"; el resto de los números complejos son imaginarios; estos resultados se expresan mediante el diagrama siguiente:

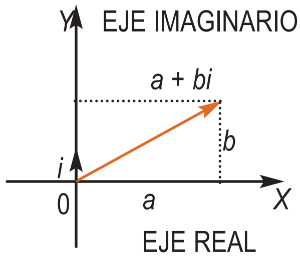


Representación gráfica

Los números estudiados hasta ahora (naturales, enteros, racionales y reales) se representan sobre una recta. Los números reales llenan la recta, ya que a cada número real se le asigna un punto de la recta y viceversa.

Al tener los números complejos dos componentes, necesitaremos una recta para representar cada una de las componentes; estas dos rectas o ejes determinan el **plano complejo**.

El complejo $a + bi$ se puede expresar por la pareja de números reales (a, b), que representan los puntos del plano en el que se han situado unos ejes cartesianos. El eje *X* es el **eje real** y el *Y*, el **eje imaginario**; el punto que representa al número $a + bi$ se llama **afijo**.

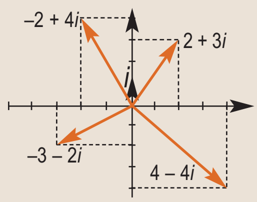


Ejemplo

10. Representa gráficamente los números:

a) $2 + 3i$; **b)** $-2 + 4i$; **c)** $-3 - 2i$; **d)** $4 - 4i$.

Solución:



Actividades

7. Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 8 = 0$; **b)** $x^2 - 4x + 5 = 0$; **c)** $x^2 - 2x + 10 = 0$; **d)** $x^4 - 16x^2 - 225 = 0$.

8. Escribe los opuestos y los conjugados de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 5 - 6i$; **b)** $z_2 = 9i$, **c)** $z_3 = -5 -4i$, **d)** $z_4 = -2$.

9. Representa el afijo del complejo $4 + 3i$, su opuesto, su conjugado y el opuesto de su conjugado.

10. Comprueba que el opuesto del conjugado del número complejo de la actividad anterior coincide con el conjugado del opuesto.

4. Operaciones con números complejos en forma binómica

Suma y resta

La suma o resta de dos números complejos es otro número complejo que tiene por parte real la suma o la resta de las partes reales de los sumandos y por parte imaginaria la suma o la resta de las partes imaginarias de los sumandos.

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

Ejemplo

11. Realiza las siguiente operaciones con números complejos:

a) $(2 - 5i) + (3 + 2i)$; **b)** $(7 - 4i) - (1 + 2i)$.

Solución:

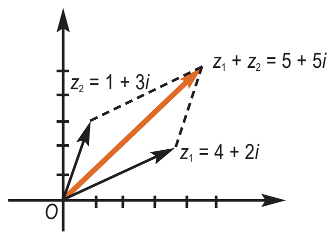
a) $(2 - 5i) + (3 + 2i) = (2 + 3) + (-5 + 2)i = 5 - 3i$,

b) $(7 - 4i) - (1 + 2i) = (7 - 1) + (-4 - 2)i = 6 - 6i$.

Para saber más...

El número complejo que resulta de sumar dos números complejos es la diagonal del paralelogramo que se forma con los sumandos y las rectas trazadas por los extremos y paralelas al otro sumando. Es idéntico a la suma de vectores usando la regla del paralelogramo.

Para restar hay que tener en cuenta que se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.



Producto

El producto de dos números complejos es otro número complejo que se obtiene al multiplicar los complejos como binomios y tener en cuenta que $i^2 = -1$:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

El producto de un número complejo por su conjugado es un número real:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - a \cdot bi + bi \cdot a - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

Ejemplo

12. Calcula con números complejos: **a)** $(3 - 2i) \cdot (1 + 4i)$; **b)** $(\sqrt{3} + 2i) \cdot (5 - \sqrt{3}\,i)$; **c)** $(4 + 5i) \cdot (4 - 5i)$.

Solución:

a) $(3 - 2i) \cdot (1 + 4i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4i - 2i \cdot 1 - 2i \cdot 4i = 3 + 12i - 2i + 8 = 11 + 10i$.

b) $(\sqrt{3} + 2i) \cdot (5 - \sqrt{3}\,i) = \sqrt{3} \cdot 5 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\,i + 2i \cdot 5 + 2i \cdot \sqrt{3}\,i = (5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) + (-3 + 10)i = 3\sqrt{3} + 7i$.

c) Se trata del producto de un número complejo por su conjugado: $(4 + 5i) \cdot (4 - 5i) = 16 - 4 \cdot 5i + 5i \cdot 4 - 25i^2 = 16 + 25 = 41$.

Propiedades de la suma de números complejos

- Es asociativa: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + z_2 + z_3$.
- Es conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- El elemento neutro es el cero "0": $z + 0 = 0 + z = z$.
- Todo número complejo z tiene opuesto $-z$: $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

Propiedades de la multiplicación de números complejos

- Es asociativa: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.
- Es conmutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
- El elemento neutro es el uno, "1": $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.
- Todo complejo $z = a + bi$, salvo el cero, tiene inverso $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$.

Los complejos también tienen la propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Gracias a estas propiedades, los complejos se pueden operar de la misma forma que los reales.

Ejemplos

13. Calcula el polinomio de segundo grado que tiene por raíces $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

Solución:

$[x - (3 + 2i)]\cdot[x - (3 - 2i)] = [(x - 3) - 2i]\cdot[(x - 3) + 2i]_{\text{suma por diferencia}} =$

$=_{\text{diferencia de cuadrados}} (x - 3)^2 - (2i)^2 = x^2 - 6x + 9 + 4 = x^2 - 6x + 13$.

14. Calcula el valor de x para que $(2 - xi)(8 - xi)$ sea imaginario puro.

Solución:

$(2 - xi)(8 - xi) = 16 - 2xi - 8xi + (xi)^2 = (16 - x^2) - 10xi$

Para que este complejo sea imaginario puro, la parte real será nula.

$16 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$.

División

El cociente de dos números complejos es otro número complejo que resulta de multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por el conjugado del denominador. Se trata de una racionalización (recuerda que $i = \sqrt{-1}$).

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo

15. Dividir $3 - 2i$ entre $4 - i$.

Solución:

$$\frac{3-2i}{4-i} = \frac{(3-2i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{12+3i-8i+2}{4^2+1^2} = \frac{12+2}{17} + \frac{(3-8)i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i$$

Potencias de *i*

Calculemos las potencias sucesivas del número i:

$i = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$…

Como $i^4 = 1$, las potencias de *i* repiten su valor en bloques de 4. Por lo tanto, para calcular el valor de cualquier potencia de *i* basta dividir el exponente entre cuatro y el valor de la potencia será *i* elevado al resto obtenido.

Ejemplo

16. Calcula: **a)** i^{27} , **b)** $(i^3 - 3i^2)^2$.

Solución:

a) $27 = 6·4 + 3$; $i^{27} = i^{6.4+3} = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1·i^3 = i^3 = -i$

b) $(i^3 - 3i^2)^2 = (-i + 3)^2 = (-i)^2 + 2(-i)·3 + 9 = -1 + 9 - 6i = 8 - 6i$.

Actividades

11. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(6 - 4i) + (3 + 2i) - (7 - 5i)$; **b)** $(5 + 7i) - (4 + 9i) + (2 - 3i)$; **c)** $(3 - i)(2 - 6i)$; **d)** $(\sqrt{5} - 4i)(1 - i)$.

12. Obtén los siguientes productos:

a) $(3 - 2i)·(3 + 2i)$; **b)** $(2 + i)·(3 - 2i)$.

13. Halla *a* para que $(a + 5i)·(4 - 2i)$ sea:

a) un número real; **b)** un imaginario puro.

14. Efectúa y simplifica las operaciones siguientes:

a) $\dfrac{5+i}{3+2i}$; **b)** $\dfrac{4-2i}{1+5i}$; **c)** $\dfrac{6+3i}{4+i}$; **d)** $\dfrac{(2-3i)(4-i)}{1-2i}$.

15. Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{8+i}{5-6i}$; **b)** $\dfrac{1+3i}{2+i}$; **c)** $\dfrac{1+i}{1-i}$; **d)** $\dfrac{1+2i}{1-3i}$.

16. Halla *b* para que $\dfrac{2+bi}{3-i}$ sea:

a) un número real; **b)** un imaginario puro.

17. Halla *m* y *n* para que $\dfrac{m+19i}{-5+ni}$ sea igual a $3 - 2i$.

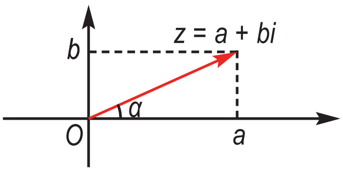
18. Calcula las siguientes potencias: **a)** $(2i)^5$, **b)** $(2 - 3i)^3$.

19. Obtén el valor de las siguientes potencias de *i*: **a)** i^{24} ; **b)** i^{45} ; **c)** i^{403}; **d)** i^{1002}.

20. Obtén las siguientes potencias: **a)** $(2 - i)^3$, **b)** $(1 + i)^2$, **c)** $(5 + 2i)^3$, **d)** $(1 - 2i)^4$.

5. Números complejos en forma polar y trigonométrica

5. 1. Notación polar de un número complejo



La representación gráfica de los números complejos en forma binómica nos sugiere otra forma de escribirlos que llamaremos **forma polar de un número complejo**.

La longitud del vector que representa al número complejo $z = a + bi = (a, b)$ es, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

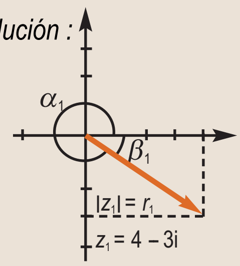
Esta longitud recibe el nombre de **módulo del número complejo** y se representa por r. El ángulo α que forma el vector que determina el número complejo z con el eje real se llama **argumento del número complejo** y su tangente vale $tg\ \alpha = \frac{b}{a}$.

Usando el módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el ángulo $\alpha = arc\ tg\ \frac{b}{a}$, escribimos el número complejo $z = a + bi$ en forma polar $z = r_\alpha$.

Ejemplo

17. Representa y pasa a forma polar los complejos $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 2i$ y $z_3 = -3$.

Solución :



El complejo $z = 4 - 3i$ se encuentra en el cuarto cuadrante.

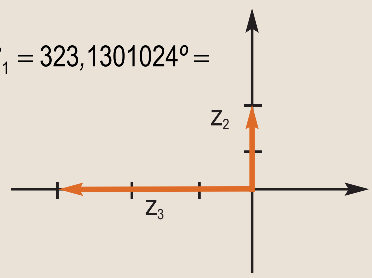
$|z| = r_1 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5;$

$tg\ \beta_1 = \frac{-3}{4} \Rightarrow \beta_1 = -36{,}86989765^o \Rightarrow \alpha_1 = 360^o + \beta_1 = 323{,}1301024^o =$

$= 323^o 7' 48{,}37'' \Rightarrow z = 5_{323^o 7' 48''}$.

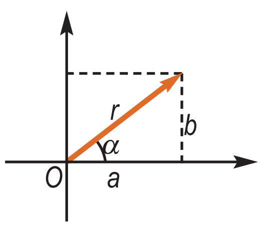
Los cálculos de los otros dos son inmediatos.

$z_2 = 2i = 2_{90^o}$; $z_3 = -3 = 3_{180^o}$



5.2. Notación trigonométrica de un número complejo

En la gráfica observamos que: $\left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cdot\cos\alpha \\ sen\alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\cdot sen\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow z = a + bi = r\cdot\cos\alpha + ir\cdot sen\alpha \Rightarrow$



podemos escribir $z = r(\cos\alpha + i\ sen\alpha)$, que es la **forma trigonométrica** de un número complejo. Esta forma nos permite hacer el paso de polar a binómica de modo sencillo y averiguar fórmulas para las operaciones entre números complejos.

Ejemplo

18. Obtén la forma binómica de los complejos: **a)** $z_1 = 2_{90°}$; **b)** $z_2 = 3_{180°}$; **c)** $z_3 = 8_{150°}$; **d)** $z_4 = 6_{210°}$.

Solución:

Pasamos por la forma trigonométrica, sustituimos el valor de las razones trigonométricas y operamos:

a) $z_1 = 2_{90°} = 2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = 3(0 + i) = 3i$.

b) $z_2 = 3_{180°} = 3(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = 3(-1 + i\cdot 0) = -3$.

c) $z_3 = 8_{150°} = 8(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -4\sqrt{3} + 4i$.

d) $z_4 = 6_{210°} = 6(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°) = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -3\sqrt{3} - 3i$.

5.3. Operaciones

El módulo y el argumento de la suma o la resta de dos números complejos no se relacionan con facilidad con el módulo y el argumento de los sumandos; por eso, no se usan las formas polar y trigonométrica para sumar y restar. Sin embargo, estas formas presentan grandes ventajas para efectuar el producto, el cociente, la potenciación y la radicación de complejos.

Producto

El producto de dos números complejos en forma polar es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.

Dados $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = r'_\beta$, su producto es $z_1 \cdot z_2 = r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$.

Demostración:

$z = z_1 \cdot z_2 = r_\alpha \cdot r'_\beta = r(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)\cdot r'(\cos\beta + i \cdot \operatorname{sen}\beta) = r \cdot r'[(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta) + i(\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta +$
$+ \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta)] = r \cdot r'[\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)] = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$.

Se aplican las fórmulas del coseno y seno de la suma estudiadas en la **Unidad 4**.

Ejemplo

19. Calcula los productos $z_1 \cdot z_2$, con: **a)** $z_1 = 3_{15°}$, $z_2 = 8_{35°}$; **b)** $z_1 = 5_{230°}$, $z_2 = 6_{260°}$.

Solución:

a) $z_1 \cdot z_2 = 3_{15°} \cdot 8_{35°} = (3 \cdot 8)_{15°+35°} = 24_{50°}$.

b) $z_1 \cdot z_2 = 5_{230°} \cdot 6_{260°} = (5 \cdot 6)_{230°+260°} = 30_{490°} = 30_{360°+130°} = 30_{130°}$.

Si el argumento resultante sobrepasa los 360º grados, se reduce a un ángulo menor de 360º mediante división.

Producto por un complejo de módulo uno

Al multiplicar el número complejo $z = r_\alpha$ por 1_β, z gira el ángulo β en torno al origen: $z \cdot 1_\beta = r_\alpha \cdot 1_\beta = r_{\alpha+\beta}$

Potenciación

Puesto que la potencia de exponente natural n de un número es el producto de dicho número por sí mismo n veces, al elevar un número complejo z a n se obtiene otro complejo cuyo módulo es el módulo de z elevado a n (pues se multiplica por sí mismo n veces) y cuyo argumento es el argumento de z multiplicado por n (pues se suma n veces consigo mismo).

Dado $z = r_\alpha$,su potencia enésima será $(z)^n = (r_\alpha)^n = r^n{}_{n\cdot\alpha}$.

En el caso de $r = 1$ la potencia enésima de 1_α nos da la **fórmula de Moivre**:

$$\begin{array}{ccc} (1_\alpha)^n & = & 1_{n\cdot\alpha} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^n & = & \cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha \end{array}$$

Ejemplo

20. Calcula: **a)** $(2_{20^\circ})^4$; **b)** $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$

Solución :

a) $(2_{20^\circ})^4 = 2^4{}_{4\cdot 20^\circ} = 16_{80^\circ}$.

b) En forma binómica hay que usar el binomio de Newton y calcular cada potencia:

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^3 = \binom{3}{0}\left(\sqrt{3}\right)^3(-i)^0 + \binom{3}{1}\left(\sqrt{3}\right)^2(-i) + \binom{3}{2}\sqrt{3}(-i)^2 + \binom{3}{3}\left(\sqrt{3}\right)^0(-i)^3 =$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^3 + 3\cdot 3\cdot(-i) + 3\cdot\sqrt{3}\cdot(-1) + i = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i.$$

En forma polar: $z = \sqrt{3} - i \Rightarrow r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2, \alpha = arc\,tg\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) \overset{4^\circ\,cuad}{=} 330^\circ \Rightarrow z = 2_{330^\circ}$;

$$z^3 = \left(2_{330^\circ}\right)^3 = 2^3_{3\cdot 330^\circ} = 8_{990^\circ} = 8_{270^\circ} = -8i.$$

División

El cociente de dos números complejos en forma polar es otro complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia de argumentos.

Dados $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = r'_\beta$, su cociente es $z_1 : z_2 = r_\alpha : r'_\beta = (r : r')_{\alpha-\beta}$.

Demostración:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \frac{r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)}{r'(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)} = \frac{r}{r'}\cdot\frac{(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta - i\,\mathrm{sen}\,\beta)}{(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)(\cos\beta - i\,\mathrm{sen}\,\beta)} =$$

$$= \frac{r}{r'}\cdot\frac{(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\beta) + i(\mathrm{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\beta)}{\cos^2\beta + \mathrm{sen}^2\beta} \underset{\text{seno de la diferencia}}{\overset{\text{coseno de la diferencia}}{=}}$$

$$= \frac{r}{r'}\left[\cos(\alpha-\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)\right] = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

Si el argumento resultase negativo, lo transformaremos en un ángulo positivo sumándole 360º grados.

Ejemplo

21. Calcula: **a)** $\dfrac{12_{65°}}{3_{35°}}$; **b)** $\dfrac{4_{180°}\cdot 5_{20°}}{10_{90°}}$; **c)** $\dfrac{30_{75°}}{6_{125°}}$; **d)** $\dfrac{(3_{25°})^3\, 8_{20°}}{6_{150°}}$.

Solución :

a) $\dfrac{12_{65°}}{3_{35°}} = \left(\dfrac{12}{3}\right)_{65°-35°} = 4_{30°}$; **b)** $\dfrac{4_{180°}\cdot 5_{20°}}{10_{90°}} = \dfrac{20_{200°}}{10_{90°}} = 2_{110°}$; **c)** $\dfrac{30_{75°}}{6_{125°}} = 5_{75°-125°} = 5_{(-50°)} = 5_{-50°+360°} = 5_{310°}$;

d) $\dfrac{(3_{25°})^3\, 8_{20°}}{6_{150°}} = \dfrac{27_{75°}\cdot 8_{20°}}{6_{150°}} = \dfrac{216_{95°}}{6_{150°}} = \left(\dfrac{216}{6}\right)_{(-55°)} = 36_{-55°+360°} = 36_{305°}$.

Actividades

21. Escribe en forma polar los números complejos:
a) -2; **b)** $1 + 2i$; **c)** $-1 + 2i$; **d)** $1 - 2i$.

22. Expresa en forma polar los siguientes complejos:

a) 7; **b)** $-6i$; **c)** $3 + 3i$; **d)** $3 - 3i$.

23. Expresa en forma binómica:

a) $4_{180°}$; **b)** $9_{270°}$; **c)** $5_{30°}$; **d)** $\sqrt{3}_{\,135°}$; **e)** $3_{180°}$.

24. Efectúa:

a) $4_{30°}\cdot 6_{30°}$; **b)** $7_{60°}\cdot 6_{30°}$; **c)** $2_{40°}\cdot 3_{70°}$; **d)** $2_{250°}\cdot 7_{150°}$.

25. Calcula los siguientes cocientes:

a) $15_{60°} : 3_{30°}$; **b)** $15_{160°} : 3_{90°}$; **c)** $(15_{190°}\cdot 4_{230°}) : 6_{40°}$.

26. Calcula las siguientes potencias:

a) $(1_{20°})^5$; **b)** $(2_{130°})^6$; **c)** $(3_{220°})^4$.

Para saber más...

La fórmula de Moivre puede usarse para demostrar algunas de las fórmulas trigonométricas ya conocidas. Por ejemplo, el seno y el coseno del ángulo doble:

$$(\cos x + i\,\text{sen}\, x)^2 = (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + i\,2\cos x\cdot \text{sen}\, x \text{ (desarrollo del binomio)}$$

$$(\cos x + i\,\text{sen}\, x)^2 = \cos 2x + i\,\text{sen}\, 2x \text{ (fórmula de Moivre)}$$

Ambos resultados deben coincidir, por lo que, igualando las partes reales e imaginarias de los segundos miembros se obtiene:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x; \qquad \text{sen}\, 2x = 2\cos x\cdot \text{sen}\, x$$

El método utilizado puede generalizarse para obtener los senos y cosenos de los múltiplos de x en función del seno y coseno de x. Intenta expresar *cos* $3x$ y *sen* $3x$ en función de *sen* x y *cos* x.

6. Radicación

La radicación es la operación inversa a la potenciación, es decir, $\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b$. Aplicamos esta relación para el cálculo de $\sqrt[n]{M_\alpha}$, siendo M_α un número complejo. Tenemos que

$$\sqrt[n]{M_\alpha} = m_\beta \Rightarrow \left(m_\beta\right)^n = M_\alpha \Rightarrow m^n_{n\beta} = M_\alpha \Rightarrow \begin{cases} m^n = M \rightarrow m = \sqrt[n]{M} \\ n\beta = \alpha \rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{n} \end{cases}$$

Así, la raíz *n*-sima de un número complejo tiene por módulo $m = \sqrt[n]{M}$ y por argumento $\beta = \dfrac{\alpha}{n}$. Sin embargo, teniendo en cuenta que los argumentos que definen el mismo número complejo M_α son de la forma $\alpha + k\cdot 360^\circ$, tendremos que los posibles valores para β serán $\beta_k = \dfrac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n}$, con $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Si $k = n$, $\beta_n = \dfrac{\alpha}{n} + 360^\circ \cong \dfrac{\alpha}{n}$, que es el primer ángulo que tomamos.

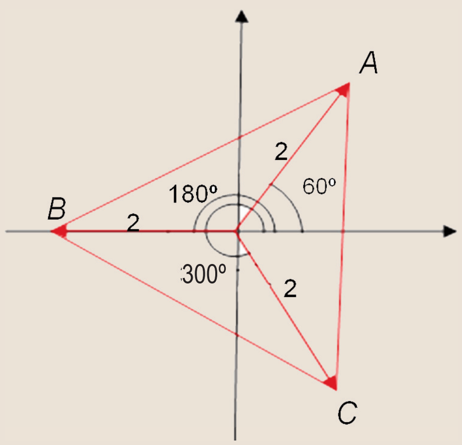
Un número complejo $z = M_\alpha$ tiene n raíces $n-$simas con módulo $m = \sqrt[n]{M}$ y argumento $\beta_k = \dfrac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n}$, siendo $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

En los ejemplos siguientes calcularemos las raíces de un número complejo y las representaremos gráficamente. En dichas representaciones veremos que los afijos de las raíces *n*–sima (*n* >2) de un número complejo forman los vértices de un polígono regular de *n* lados con centro en el origen de coordenadas.

Ejemplos

22. Obtén las raíces cúbicas de $z = -8$ y represéntalas.

Solución :



Se pasa el número a forma polar $z = -8 = 8_{180^\circ}$.

Módulo de las raíces: $m = \sqrt[3]{8} = 2$.

Argumentos de las raíces:

$$\beta_k = \frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} = 60^\circ + k\cdot 120^\circ; k = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

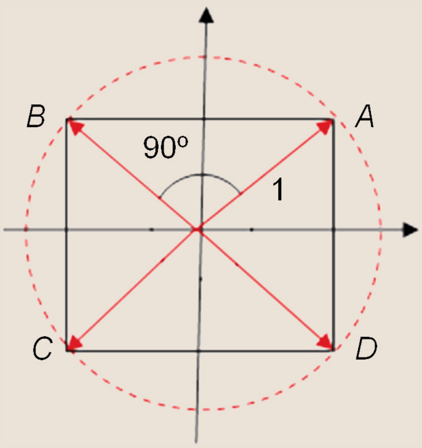
$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \rightarrow \beta_0 = 60^\circ \\ k = 1 \rightarrow \beta_1 = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \\ k = 2 \rightarrow \beta_2 = 60^\circ + 2\cdot 120^\circ = 300^\circ \end{cases}$$

Soluciones: $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = 2_{60^\circ}, 2_{180^\circ}, 2_{300^\circ}$.

23. Obtén las raíces cuartas de $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y represéntalas.

Solución :

Se pasa z a forma polar, teniendo en cuenta que su afijo está en el segundo cuadrante.



$$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} M=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1 \\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}=-\sqrt{3}\overset{2^{\circ}\ cuad}{\Rightarrow}\alpha=120^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow z=1_{120^{\circ}}.$$

Módulo de las raíces: $m=\sqrt[4]{1}=1$.

Argumentos de las raíces:

$$\beta_k=\frac{120^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}}{4}=30^{\circ}+k\cdot 90^{\circ};k=0,1,2,3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} k=0\rightarrow\beta_0=30^{\circ} \\ k=1\rightarrow\beta_1=30^{\circ}+90^{\circ}=120^{\circ} \\ k=2\rightarrow\beta_2=30^{\circ}+180^{\circ}=210^{\circ} \\ k=3\rightarrow\beta_3=30^{\circ}+270^{\circ}=300^{\circ}\end{array}\right.$$

Soluciones: $\sqrt[4]{1_{120^{\circ}}}=1_{30^{\circ}},1_{120^{\circ}},1_{210^{\circ}},1_{300^{\circ}}$.

Los afijos se encuentran en los vértices de un cuadrado.

Actividades

27. Calcula $\sqrt[3]{-64i}$ y exprésalas en forma binómica.

28. Halla $\sqrt[4]{-81}$ y exprésalas en forma binómica.

29. Dibuja las soluciones de la actividad anterior y comprueba que los afijos de las raíces son los vértices de un polígono regular con centro en el origen y con tantos lados como el índice de la raíz.

30. Calcula las raíces cuartas de $z = 1 - \sqrt{3}\,i$ y represéntalas.

Recuerda

- **Funciones trigonométricas o circulares**. Son funciones definidas a partir de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Asignan a cada ángulo en radianes el valor de la correspondiente razón trigonométrica. Se simbolizan así: $y = sen\ x$; $y = cos\ x$; $y = tg\ x$.

- **Funciones trigonométricas definidas en *R***. Las funciones conservan las propiedades que tienen las razones:
  - El dominio de las funciones seno y coseno es todo *R* y el de la tangente $R - \left\{ \pm \frac{(2n+1)\pi}{2} \right\}$.
  - Seno y coseno están acotadas: $-1 \leq sen\ x \leq 1$; $-1 \leq cos\ x \leq 1$, pero no la tangente.
  - Son funciones periódicas: seno y coseno de período 2π rad, y tangente de período π rad:

    $sen\ (x + 2\pi) = sen\ x$, $cos\ (x + 2\pi) = cos\ x$, $tg\ (x + \pi) = tg\ x$.

- **Funciones inversas de las funciones circulares**. Son $y = \text{arc}\,sen\ x$, $y = \text{arc}\,cos\ x$ e $y = \text{arc}\,tg\ x$.

- **Ecuaciones trigonométricas**. Son ecuaciones en las que la incógnita aparece como argumento de alguna razón trigonométrica.

- **Números complejos**. Para conseguir que los números reales negativos tengan raíz cuadrada se define la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$. De este modo se crean los números complejos que se representan por la letra *C*:
  $C = \{a + bi \,/\, a, b \in R\}$.

- **Forma binómica de un número complejo**. Es la expresión $z = a + bi$, donde *a* es la parte o componente real y *b* es la parte o componente imaginaria. Los *números reales* son de la forma $z = a + 0i$. Los *números imaginarios* tienen la parte imaginaria distinta de cero. Los *números imaginarios puros* son $z = 0 + bi$. El opuesto de $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$. El conjugado de $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$.

- **Representación gráfica.** Los *números complejos* $z = a + bi$ se pueden expresar mediante la pareja (a, b) y se representan en el llamado *plano complejo*. El eje *X* se llama *eje real*, el *Y eje imaginario* y el punto que representa al número $a + bi$ se llama *afijo*.

- **Operaciones con números complejos en forma binómica.**
  - **Suma y resta**. $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$.
  - **Producto**. $(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + bi \cdot c + b \cdot di^2 = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c)$.
  - **División**. $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$.
  - **Potencias de *i*.** $i = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$… Las potencias de *i* repiten su valor en bloques de 4.

- **Forma polar de un número complejo**. Es la expresión $z = r_\alpha$, donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el módulo y $\alpha = arc\ tg\ \frac{b}{a}$ el argumento.

- **Forma trigonométrica de un número complejo.** Es la expresión $z = r\,(cos\alpha + i sen\alpha)$, donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el módulo y $\alpha = arc\ tg\ \frac{b}{a}$ el argumento.

- **Operaciones en forma polar.**
  - **Producto.** Dados $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = r'_\beta$, su producto es $z_1 \cdot z_2 = r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$.
  - **Potencia.** Dado $z = r_\alpha$, su potencia *n*–sima será $(z)^n = (r_\alpha)^n = r^n_{n \cdot \alpha}$. Con $r = 1$ la potencia *n*–sima nos proporciona la fórmula de Moivre: $(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^n = (cos\ n\alpha + i\ sen\ n\alpha)$
  - **División.** Dados: $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = r'_\beta$, su cociente $z_1 : z_2 = r_\alpha : r'_\beta = (r : r')_{\alpha-\beta}$.
  - **Radicación.** $\sqrt[n]{M_\alpha}$ tiene *n* soluciones con módulo $m = \sqrt[n]{M}$ y argumentos $\beta_k = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n}$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.