4 Trigonometría

En muchas ocasiones la medición directa de las distancias conlleva bastantes problemas y a veces resulta imposible. Así pues, ¿cómo podemos localizar la posición relativa de un cierto número de puntos de la superficie terrestre? ¿De qué manera se puede establecer el trazado de una carretera o medir una extensión de terreno para poder dibujar un mapa? Es más, ¿podemos llegar a saber con exactitud la posición de los cuerpos celestes?

Afortunadamente, gracias a la geometría, las preguntas anteriores tienen respuesta. Decimos gracias a la geometría, pues para esta parte de las matemáticas se dispone de instrumentos muy precisos, tales como el astrolabio o el teodolito, mediante los cuales se miden los ángulos, para posteriormente hallar las distancias desconocidas de las que hablábamos antes.

François Viète. (Wikimedia Commons)

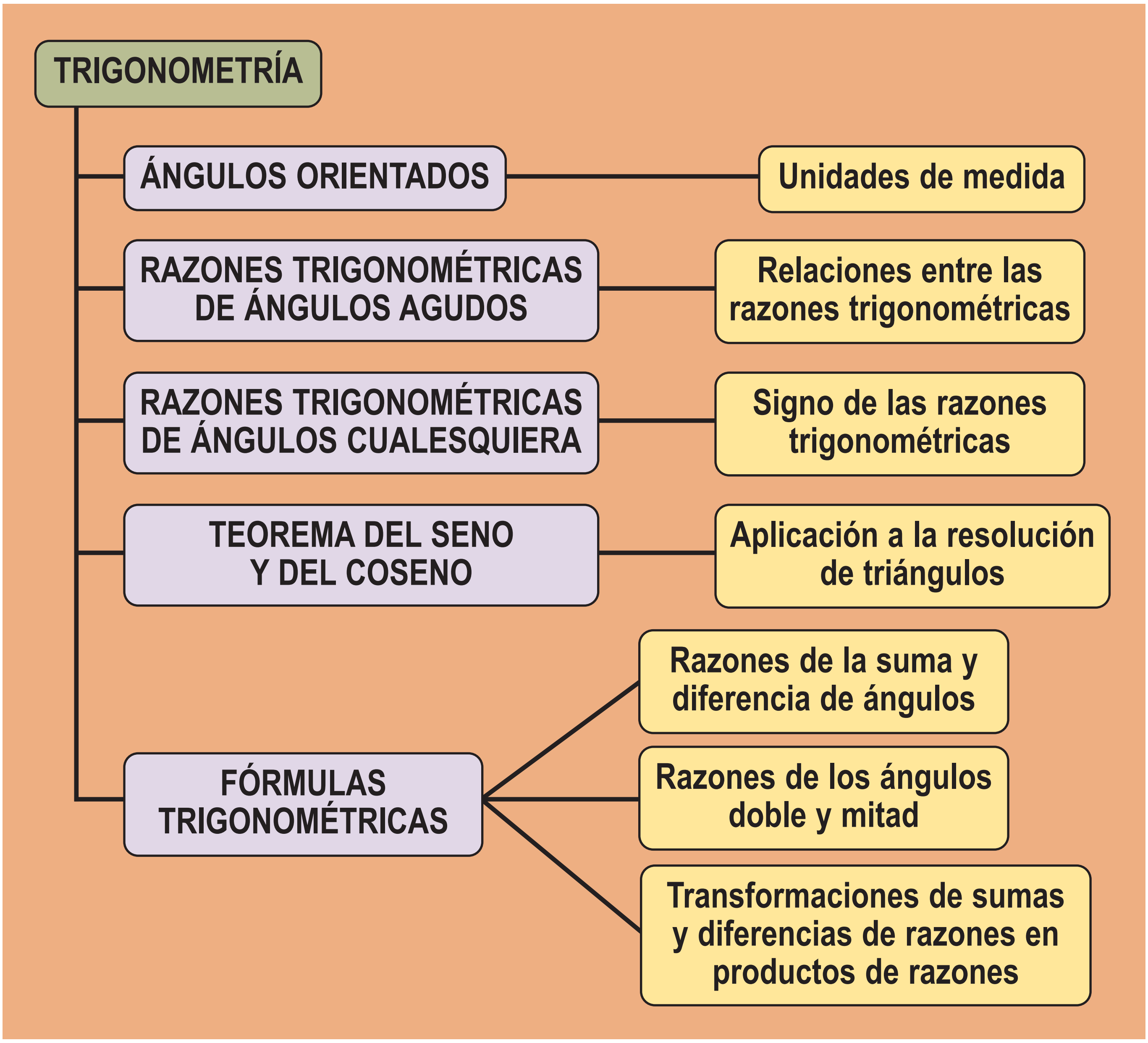
Este es precisamente el objetivo de la trigonometría, rama de la matemática que se ocupa del estudio de las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos. Figura relevante de esta rama es el matemático francés François Viète (1540 – 1603), quien en el siglo XVI sistematizó y amplió conocimientos mediante la aportación de importantes teoremas.

La Unidad comienza estudiando el radián como unidad de medida de ángulos; a continuación profundiza en el estudio de las razones trigonométricas de un ángulo agudo, ya estudiadas en la etapa de Educación Secundaria. Se generalizan las razones trigonométricas a ángulos cualesquiera y se establecen relaciones entre ángulos situados en diferentes cuadrantes.

Continúa con el estudio de los teoremas del seno y del coseno, sin olvidar su aplicación a la resolución de triángulos cualesquiera, triángulos que aparecen en las mediciones indirectas que se precise en astronomía, geodesia o topografía. También se incluye la información necesaria sobre la calculadora científica para el estudio de esta Unidad.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

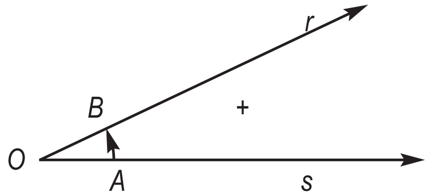
1. Resolver con soltura el paso de unidades sexagesimales a radianes y viceversa.
2. Manejar con soltura las relaciones entre razones trigonométricas de ángulos agudos y asignar los signos que correspondan a cada razón trigonométrica según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo.
3. Relacionar valores de las razones que corresponden a ángulos complementarios, suplementarios, entre ángulos cualesquiera y ángulos del primer cuadrante.
4. Aplicar con soltura los teoremas del seno y del coseno para la resolución de triángulos cualesquiera.
5. Manejar las fórmulas trigonométricas de suma y resta de razones trigonométricas de ángulos, así como las razones de ángulos doble y mitad.
6. Utilizar los conocimientos trigonométricos en la resolución de problemas que se plantean en la vida actual.

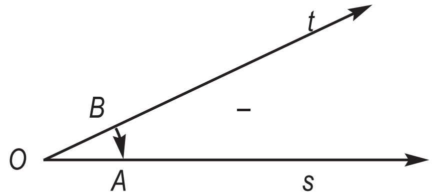


ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Ángulos orientados

Un ángulo es la porción de plano limitado por dos semirrectas que se cortan; es un **ángulo orientado** cuando se tiene en cuenta el sentido en el que debe moverse una de ellas para que coincida con la otra semirrecta.

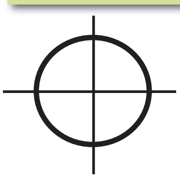




Si la semirrecta *s* gira de *A* hacia *B*, en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, se dice que genera un ángulo positivo. Si la semirrecta *t* gira de *B* hacia *A*, en sentido del movimiento de las agujas del reloj, se dice que genera un ángulo negativo. Por ejemplo, el giro del destornillador para aflojar un tornillo (movimiento de giro contrario al de las agujas del reloj) es positivo; para apretarlo (movimiento de giro de las agujas del reloj), es negativo.

1.1. Sistema sexagesimal

El **sistema sexagesimal** es uno de los sistemas que se emplean para la medida de ángulos; parte de la propiedad de que dos rectas perpendiculares dividen al plano en cuatro ángulos iguales llamados ángulos rectos, como indica la figura adjunta.



Cada ángulo recto mide 90º, por lo que, si lo dividimos en 90 partes, cada uno de los ángulos que resultan es de un **grado sexagesimal** (1º).

A su vez, si dividimos un grado en 60 parte iguales, cada una de estas partes es de un **minuto sexagesimal** ('). Se escribe 1º = 60'.

Cada minuto dividido en 60 partes iguales es un **segundo sexagesimal** ("), por consiguiente 1' = 60".

La expresión de la medida de un ángulo en el **sistema sexagesimal** podría ser por ejemplo 23º 37' 48", que se lee 23 grados 37 minutos y 48 segundos.

Un giro completo positivo (cuando la semirrecta que gira coincide con la de partida) genera un ángulo de 360º; los ángulos de giro mayores que 360º se pueden reducir a uno menor de 360º mediante división. Por ejemplo, el ángulo de 400º es igual a un giro de 360º más un ángulo de 40º.

Cualquier ángulo de giro β se expresa así: $\beta = a + k \cdot 360^\circ$, siendo k un número natural. En el caso de ángulos negativos, por ejemplo −60º, se puede entender como equivalente a 360º − 60º = 300º. Un ángulo negativo se convierte en positivo sumándole $k \cdot 360^\circ$.

Los ángulos sexagesimales en la calculadora

Para trabajar con una calculadora científica en grados sexagesimales hay que ponerla en el modo **DEG,** lo que se consigue pulsando la tecla MODE y un número indicado en la calculadora. La pantalla aparecerá así:

DEG 0.

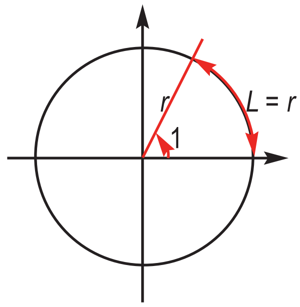
Para introducir un ángulo expresado en grados, minutos y segundos es necesario utilizar la tecla º ' ". La calculadora transforma la medida de un ángulo expresada mediante un número incomplejo (grados, minutos y segundos) en un número complejo (medida en expresión decimal de grados).

Por ejemplo, para introducir el ángulo de 23º 30' 42" en la calculadora se sigue la secuencia:

23 º ' " 30 º ' " 42 º ' " ; en pantalla aparece DEG **23.5116667**

El ángulo introducido tiene una medida de 23,5116667º; para transformar este complejo en incomplejo se pulsan las teclas INV º ' " (Algunas calculadoras disponen de la tecla SHIFT en lugar de INV) y se obtiene en pantalla DEG 23º30º42, que significa 23º 30' 42".

1.2. Radianes



En la figura siguiente aparece una circunferencia de radio *r* con centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas. A cada ángulo central le corresponde un arco sobre la circunferencia; existe un ángulo central al que le corresponde un arco cuya longitud coincide con el radio *r* de la circunferencia. Este ángulo es una unidad de medida de ángulos llamada **radián**.

> Un ángulo central mide un radián cuando el arco que abarca tiene el mismo valor que el radio de la circunferencia con la que se traza dicho arco.

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, al ángulo de 360º le corresponden la medida de 2π radianes; de donde al ángulo de 180º le corresponden π radianes.

El valor de un radián en grados es $\dfrac{180^o}{\pi} \approx 57^o\, 17'\, 45''$, algo menor que 60º.

Paso de radianes a grado. Se parte de la igualdad 180º = π radianes y obtenemos: n radianes $= \dfrac{180^0}{\pi} \cdot n$ grados.

Paso de grados a radianes: α grados $= \dfrac{\pi}{180^0} \cdot \alpha$ radianes.

En la siguiente tabla aparecen las **equivalencias entre grados y radianes** para los ángulos más usuales.

Equivalencias entre grados y radianes entre los ángulos más usuales								
Grados	0º	30º	45º	60º	90º	**180º**	270º	360º
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Para trabajar en radianes con calculadora científica hay que ponerla en modo **RAD**. Lo mismo que en el modo **DEG,** se consigue pulsando la tecla MODE y el número que indique la calculadora. La pantalla de la calculadora en la que se introduce el ángulo de 1,4567 radianes aparecerá así: RAD **1.4567**

Para saber más...

En los problemas de trigonometría, astronomía, geodesia y resolución de triángulos en general, se utiliza como medida de ángulos el grado. En el estudio de las funciones trigonométricas, *y = sen x*, *y = cos x*, *y = tg x,* los ángulos *x* se miden en radianes.

Actividades

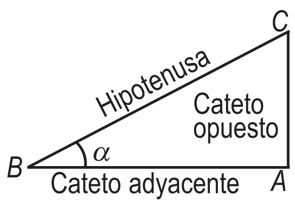
1. Pasa a radianes los siguientes ángulos: **a)** 40º; **b)** 78º; **c)** 120º; **d)** 230º.
2. Pasa a grados los siguientes ángulos: **a)** 0,82 rad; **b)** 1,5 rad; **c)** 2,3 rad; **d)** 5 rad.
3. Completa la tabla siguiente:

Grados		135º		210º		300º	
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$

4. Calcula en grados sexagesimales los siguientes ángulos medidos en radianes: **a)** 2 rad; **b)** $\frac{3\pi}{5}$ rad; **c)** $\frac{\pi}{6}$ rad; **d)** $\frac{3\pi}{7}$ rad.
5. Expresa los ángulos siguientes mediante el número de vueltas y un ángulo menor de 360º : **a)** 769º; **b)** 987º; **c)** 1020º; **d)** 2456º.

2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Recordemos las razones trigonométricas del ángulo agudo α, que se definen a partir del triángulo rectángulo *BAC* de la figura, llamadas **seno** (*sen*), **coseno** (*cos*), **tangente** (*tg*), **cosecante** (*cosec*), **secante** (*sec*) y **cotangente** (*cotg*):



$$sen\,\alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \qquad cosec\,\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{sen\,\alpha}$$

$$cos\,\alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \qquad sec\,\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{1}{cos\,\alpha}$$

$$tg\,\alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} \qquad cotg\,\alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{1}{tg\,\alpha}$$

Las tres primeras seno, coseno y tangente son las más importantes y serán las que se calculen en las actividades o ejemplos como razones trigonométricas de un ángulo, salvo que se indique "calcular todas las razones"; las tres restantes cosecante, secante y cotangente son, como se indica en el recuadro anterior, los valores inversos respectivos de las tres primeras.

Ejemplo

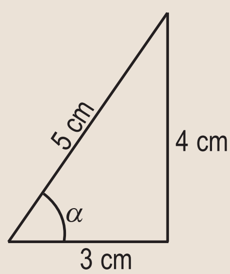
1. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α en el triangulo de la figura siguiente:

Solución:

$$sen\,\alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{4}{5} = 0,8; \qquad cosec\,\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto} = \frac{5}{4} = 1,25;$$

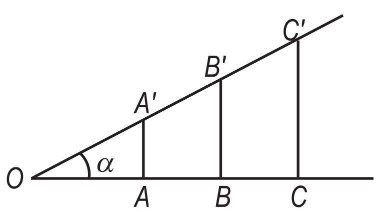
$$cos\,\alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} = \frac{3}{5} = 0,6; \qquad sec\,\alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente} = \frac{5}{3} = 1,\widehat{6};$$

$$tg\,\alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \frac{4}{3} = 1,\widehat{3}; \qquad cot\,g\,\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto} = \frac{3}{4} = 0,75.$$



2.1. Independencia de las razones trigonométricas

Las razones trigonométricas definidas para un ángulo agudo caracterizan a dicho ángulo, es decir, su valor depende del ángulo y no del triángulo sobre el que se calculan. En efecto, los triángulos rectángulos *OAA*', *OBB*' y *OCC*' de la figura son semejantes ya que tienen un ángulo recto y el ángulo *AOA*' = α común; en virtud de la semejanza de triángulos se puede escribir:



$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{OC'}} = sen\,\alpha\,;$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{0B}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = cos\,\alpha\,;$$

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{OC}} = tg\,\alpha\,.$$

Como las razones trigonométricas caracterizan a los ángulos, sus valores para algunos ángulos sencillos de dibujar como los de 60º, 45º y 30º se calculan con facilidad como veremos en los ejemplos siguientes.

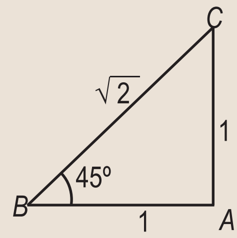
Ejemplos

2. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 45°.

Solución:

Para obtener las razones del ángulo de 45° se dibuja un triángulo rectángulo isósceles *ABC* con los catetos $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ como el de la figura. La hipotenusa es $\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y los ángulos son $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$ y $\hat{A} = 90^\circ$. Por lo tanto, $sen\ 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$cos\ 45^\circ = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\ 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{1}{1} = 1.$



3. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°.

Solución:

Para calcular las razones de 30° y 60° se dibuja un triángulo equilátero *ABC* de lados $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 1$. Al trazar la altura $\overline{CH}$ se forma el triángulo rectángulo *AHC* de hipotenusa $\overline{AC} = 1$, catetos $\overline{AH} = \frac{1}{2}$ y $\overline{CH} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

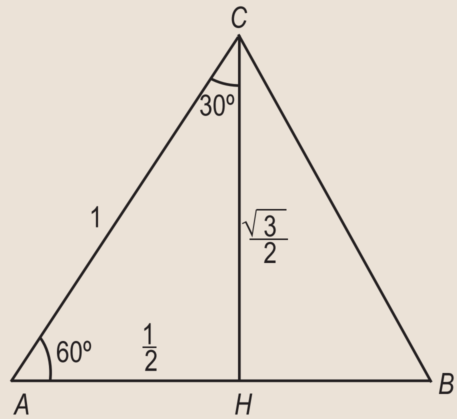
Los ángulos son $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$ y $\hat{H} = 90^\circ$.

Razones trigonométricas del ángulo de 30°:

$$sen\ 30^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2};\quad cos\ 30^\circ = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad tg\ 30^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Razones trigonométricas del ángulo de 60°:

$$sen\ 60^\circ = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad cos\ 60^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2};\quad tg\ 60^\circ = \frac{\overline{CH}}{\overline{AH}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$



Recuerda

Conviene que aprendas y recuerdes las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60° para poder utilizarlas con rapidez en las actividades. Para ello, te escribimos una tabla, elaborada mediante la siguiente regla mnemotécnica:

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

El valor del seno de estos ángulos es una fracción de numerador la raíz cuadrada de 1 al 3, mientras que el denominador es 2.

El valor del coseno es también una fracción de numerador la raíz cuadrada de los números 3 a 1, y el denominador es 2.

La tangente se calcula mediante el cociente entre el seno y el coseno del mismo ángulo.

Observa que *sen* 30° = *cos*60°, *cos*30° = *sen*60° y *sen*45° = *cos*45°. Esto se debe a que ambos ángulos son complementarios, como veremos en los apartados siguientes.

2.2. Razones trigonométricas con calculadora

Actualmente, en lugar de las tablas trigonométricas donde vienen tabulados los valores de las razones trigonométricas, se utilizan las calculadoras científicas para determinar tanto las razones trigonométricas de los ángulos como los ángulos que corresponden a las distintas razones trigonométricas.

Cálculo de las razones trigonométricas de los ángulos.

En las calculadoras científicas las teclas *sin* , *cos* y *tan* corresponden a las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, respectivamente. Para obtener *sen* 42º la calculadora debe encontrarse en el modo **DEG** y seguir la secuencia: 42 *sin* . En pantalla aparece DEG **0.669130606**, luego *sen* 42º = 0,669130606.

Halla con tu calculadora el coseno y la tangente de 42º. Debes conseguir los resultados siguientes:
cos 42º = 0,743144825 y *tg* 42º = 0,900404044.

Si se trata de calcular la razón trigonométrica de un ángulo expresado en complejo, primero se convierte en incomplejo y a continuación se calcula la razón correspondiente. Por ejemplo, para calcular *cos* 64º 41' 23'' se sigue la secuencia siguiente: 6 4 º ' '' 4 1 º ' '' 2 3 º ' '' DEG **64.6897222** *cos* DEG **0.427520031**

Luego *cos* 64º 41' 23'' = *cos* 64,6897222º = 0,42750031.

Halla con tu calculadora el seno y la tangente de 64º 41' 23''. Debes conseguir los resultados siguientes:
sen 64º 41' 23'' =0,904005875 y *tg* 64º 41' 23'' = 2,114534543.

Cálculo de un ángulo, conocida una razón trigonométrica.

Para hallar los ángulos que corresponden a razones trigonométricas se utiliza la tecla INV combinada con la razón trigonométrica conocida. Por ejemplo, si se sabe que *tg* α = 0,5532321 y queremos calcular α, se sigue la secuencia siguiente: 0.5532321 INV *tan* DEG **28.95277679** INV º ' '' DEG **28º 57º 10**
De donde α = 28,95277679º = 28º 57' 10''.

De forma análoga se procede en el caso de conocer las razones seno y coseno del ángulo.

Halla α y β con tu calculadora sabiendo que *sen* α = 0,3458 y que *tg* β = 3,6057. Debes conseguir los resultados siguientes:

α = 20,2330633838º = 20º 13' 50,3'' ; β = 74,49924907º = 74º 29' 57,3''.

Cálculo de una razón trigonométrica, conocida otra.

Se utilizan las dos situaciones anteriores para resolver el problema.

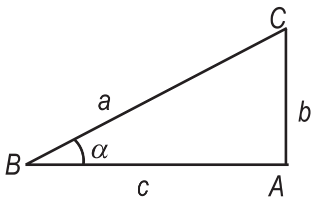
Por ejemplo, si se conoce *sen* α = 0,3456 y se desea calcular *cos* α, se sigue la secuencia siguiente:

0.3456 INV *sin* DEG **20.21842629** *cos* DEG **0.938381926**

Es decir, *cos* α = *cos* 20,21842629º = 0,938381926.

2.3. Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas

Las razones trigonométricas se relacionan mediante fórmulas que se obtienen a partir del triangulo rectángulo *ABC* de la figura siguiente:



Dividiendo el $sen\alpha$ por $cos\alpha$ se tiene: $\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\dfrac{b}{c}$, que es $tg\alpha$ para $cos\,\alpha \neq 0$. Luego, $tg\,\alpha=\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$. Usando el teorema de Pitágoras tenemos que: $b^2+c^2=(a\,sen\alpha)^2+(a\,cos\alpha)^2=a^2\,sen^2\alpha+a^2\,cos^2\alpha=a^2 \underset{por\ a^2}{\overset{dividiendo}{\Longrightarrow}} sen^2\alpha+cos^2\alpha=1$.

Es decir: $sen^2\,\alpha + cos^2\alpha = 1$

Esta relación se conoce como la **fórmula fundamental de la trigonometría.**

Si en la fórmula fundamental se dividen ambos miembros por $cos^2\,\alpha$, se obtiene:

$$\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}+\frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{1}{cos^2\alpha};\quad \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}+1=\frac{1}{cos^2\alpha}.$$

De aquí se deducen las relaciones trigonométricas siguientes:

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{cos^2\alpha};\quad cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha};\quad tg^2\alpha+1=sec^2\alpha.$$

Estas relaciones permiten determinar todas las razones trigonométricas de un ángulo conocida una de ellas.

Ejemplos

4. Calcula $sen\alpha$ y $tg\alpha$ sabiendo que $cos\,\alpha=\dfrac{3}{5}$ y que α es agudo.

Solución :

Como $sen^2\alpha=1-cos^2\alpha \Rightarrow sen^2\alpha=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow sen\,\alpha=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5}$, $tg\,\alpha=\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\dfrac{3}{5}:\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{4}$.

5. Calcula $sen\,\beta$ sabiendo que $tg\,\beta=\dfrac{3}{2}$ y que β es agudo.

Solución :

$cos^2\beta=\dfrac{1}{tg^2\beta+1}=\dfrac{1}{{}^{9}\!/_{4}+1}=\dfrac{4}{13}\Rightarrow cos\,\beta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ y como $tg\,\beta=\dfrac{sen\,\beta}{cos\,\beta}\Rightarrow sen\,\beta=cos\,\beta\cdot tg\,\beta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Estas fórmulas tienen aplicación en la **resolución de triángulos rectángulos**, problemas que consisten en determinar los valores de todos los lados y ángulos de triángulos de los que se conocen algunos elementos. Para resolver un triángulo se precisan tres datos y al menos uno de ellos debe ser un lado. Como los triángulos que vamos a tratar son rectángulos, uno de los ángulos será recto; los otros dos datos que se precisan para su resolución dan lugar a los casos siguientes:

ELEMENTOS CONOCIDOS	CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DESCONOCIDOS
I. Dos lados	● El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras. ● El ángulo que forman los lados conocidos se determina por la razón trigonométrica que los relaciona. ● El tercer ángulo es el complementario del calculado.
II. Un lado y un ángulo agudo	● Otro lado se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y ángulo agudo conocidos. ● El otro ángulo es el complementario del ángulo conocido.

Ejemplos

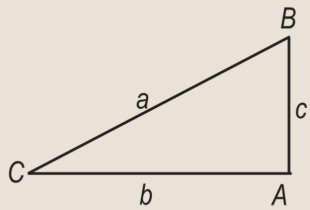
6. En un triángulo rectángulo se conocen un cateto b = 16 cm y la hipotenusa a = 20 cm. Calcula los demás elementos del triángulo.

Solución:

El otro cateto: $c=\sqrt{20^2-16^2}=12$ cm.

Un ángulo agudo: $sen\ \hat{B}=\dfrac{16}{20}=\dfrac{4}{5}=0{,}8\Rightarrow \hat{B}=53{,}13010235^o=53^o\ 7'\ 48''$.

El otro ángulo agudo: $\hat{C}=90^o-53{,}13010235^o=36{,}86989765^o=36^o\ 52'\ 12''$.



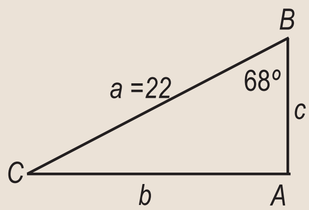
7. En un triángulo rectángulo se conocen el ángulo agudo $\hat{B}$ = 68º 15' y la hipotenusa a = 22 cm. Calcula los demás elementos del triángulo.

Solución:

$b=a\cdot sen\hat{B}=22\cdot sen\ \ 68^o\ \ 15'\approx 20{,}43\ cm.$

$c=a\cdot cos\hat{B}=22\cdot cos\ \ 68^o\ \ 15'\approx 8{,}15\ cm.$

$\hat{C}=90^o-68{,}25^o=21{,}75^o=21^o\ \ 45'.$



Las razones trigonométricas estudiadas y sus relaciones permiten resolver algunas necesidades de la vida cotidiana, como veremos en los ejemplos siguientes.

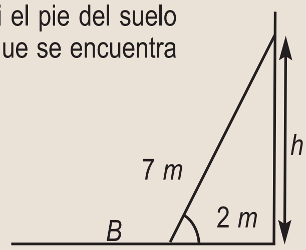
Ejemplos

8. Una escalera de mano de 7 m de largo se apoya por un extremo en una pared. Si el pie del suelo dista 2 metros de la mencionada pared, calcula: **a)** La altura h sobre el suelo a la que se encuentra el extremo de la escalera. **b)** El ángulo que forma la escalera con el suelo.

Solución:

a) Por el teorema de Pitágoras: $h=\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}\approx 6{,}7$ m.

b) $cos\ \hat{B}=\dfrac{2}{7}\Rightarrow \hat{B}=73{,}33984504^o=73^o\ \ 23'\ \ 54''.$



9. Calcula la altura de un árbol si desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 25º y si nos acercamos 15 metros lo observamos bajo un ángulo de 40º.

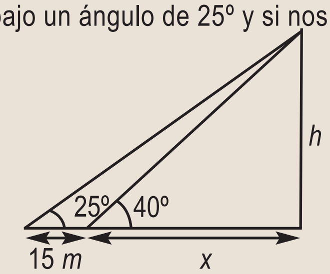
Solución:

De la figura se deduce: $tg\ 40^o=\dfrac{h}{x}\Rightarrow h=tg\ 40^o\cdot x\Rightarrow h\approx 0{,}84x;\ \ tg\ 25^o=\dfrac{h}{15+x}\Rightarrow$

$\Rightarrow h=tg\ 25^o(15+x)\Rightarrow h\approx 0{,}46(15+x)$. Igualando $0{,}84x=0{,}46(15+x)\Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}38x=6{,}9\Rightarrow x\approx 18{,}15\ m.$

Se sustituye x en la primera igualdad: $h=0{,}84\cdot 18{,}15\approx 15{,}25$ m, altura del árbol.



Actividades

6. En un triángulo rectángulo se conocen los catetos b = 12 cm y c = 5 cm. Calcula el seno, coseno y tangente de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

7. Halla con tu calculadora:
a) *cos* 35º 12' 15''; **b)** *tg* 28º 32' 42''; **c)** *sen* 34º 34' 56''; **d)** *cos* 56º 23' 45''.

8. Calcula los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ y $\hat{D}$ si:
a) $sen\,\hat{A} = 0,36489$; **b)** $cos\,\hat{B} = 0,2923717$; **c)** $tg\,\hat{C} = 5,1153697$; **d)** $sec\,\hat{D} = 2,345$.

9. Calcula las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los ángulos siguientes:
a) 18º 15' 28''; **b)** 27º 12' 36''; **c)** 42º 35' 18''; **d)** 67º 27' 54''.

10. Pasa a grados, minutos y segundos los ángulos:
a) 32,2345º; **b)** 45,4571º; **c)** 56,7654º; **d)** 78,7693º.

11. Halla en grados, minutos y segundos los ángulos agudos que corresponden a las razones trigonométricas:
a) $cos\,\hat{A} = 0,645$; **b)** $sen\,\hat{B} = 0,321$; **c)** $tg\,\hat{C} = 1,734$; **d)** $cosec\,\hat{D} = 5,347$.

12. Calcula $sen\hat{A}$, sabiendo que $tg\hat{A}$ = 4 y que $\hat{A}$ es un ángulo agudo.

13. Calcula *cos* $\hat{C}$ y *tg* $\hat{C}$, sabiendo que *sen* $\hat{C} = \frac{2}{3}$, y que $\hat{C}$ es un ángulo agudo.

14. Si $cos\,\alpha = \frac{3}{5}$, calcula todas las razones trigonométricas del ángulo agudo α.

15. Si $tg\,\alpha = \frac{9}{5}$ y α es agudo, calcula todas las razones trigonométricas de α.

16. Calcula los restantes elementos de un triángulo rectángulo, si se conocen la hipotenusa a = 8 cm y el ángulo $\hat{C}$ = 47º 16' 34''.

17. Resuelve los triángulos rectángulos siguientes, si se conocen:

a) Los catetos b = 9,3 cm y c = 4,1 cm.

b) La hipotenusa a = 6,4 cm y el cateto c = 3,8 cm.

c) Un cateto b = 10,5 cm y el ángulo = 60º.

d) Un cateto c = 6,2 cm y el ángulo = 47 º.

18. Para medir la anchura de un río se mide el ángulo bajo el que se ve un árbol en la otra orilla, con el resultado de 58º. Al separarnos 24 m de la orilla en dirección perpendicular a ella, el nuevo ángulo bajo el que vemos el árbol es de 36º. Calcula: **a)** la anchura del río; **b)** la altura del árbol.

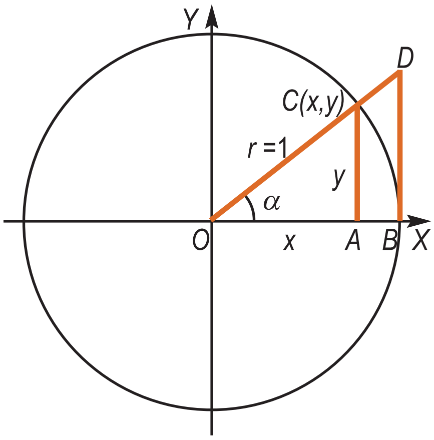
19. Dos observadores, separados entre sí 1 500 m, están situados en el mismo plano respecto a una montaña, a la que ven bajo ángulos de 15º y 42º, respectivamente. Calcula la altura de la montaña y la distancia a la que se encuentran los observadores al pie de la perpendicular de la montaña al suelo.

3. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

En este apartado trataremos de extender la definición de razones trigonométricas ya conocidas para un ángulo agudo a un ángulo cualquiera. Para ello, los ángulos serán los ángulos centrales de una circunferencia centrada en un sistema de coordenadas.

3.1. Razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica

En la circunferencia de radio unidad de la figura siguiente el centro está en el origen de un sistema de coordenadas, los ángulos centrales α se sitúan de forma que su primer lado coincide con el eje positivo de abscisas X y su segundo lado donde corresponde a un giro positivo; esta circunferencia se llama **circunferencia goniométrica**. Sobre esta circunferencia algunos segmentos coinciden con los valores de las razones trigonométricas de los ángulos agudos.



En el triángulo rectángulo OAC se tiene:

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC} = y$$

$$cos\,\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA} = x$$

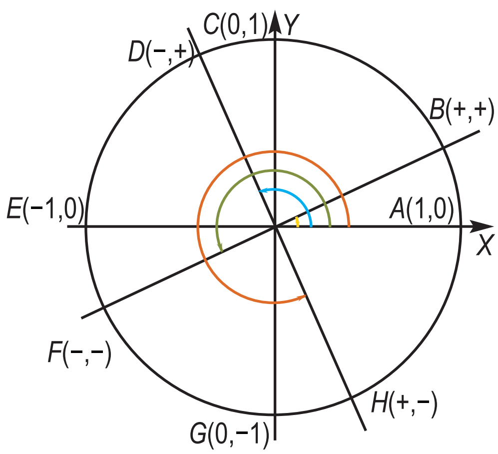
Como vemos, $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$ son, respectivamente, la ordenada y la abscisa del punto C que está sobre la circunferencia goniométrica. Para calcular la tangente del ángulo α tendremos en cuenta que los triángulos OAC y OBD son semejantes. $tg\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{y}{x} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}$.

La tangente del ángulo α es el segmento determinado por el punto de corte del primer lado con la circunferencia y el punto de corte de la tangente a la circunferencia en el punto anterior con el segundo lado del ángulo.

3.2. Signo de las razones trigonométricas

La idea anterior se puede generalizar a un ángulo de cualquier cuadrante. Por ejemplo, de un ángulo del segundo cuadrante, su seno será la ordenada y del punto D de la figura siguiente y su coseno la abscisa x. Como el punto D es del segundo cuadrante, resulta que el seno será positivo y el coseno negativo.

En la figura se pueden ver los signos de las razones trigonométricas seno y coseno de cualquier ángulo y se reflejan en la tabla siguiente junto a los signos de la tangente:



Ángulo	x	y	Seno	Coseno	Tangente
1er cuadrante	+	+	+	+	+
2º cuadrante	−	+	+	−	−
3er cuadrante	−	−	−	−	+
4º cuadrante	+	−	−	+	−

A partir de la representación de las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica vemos que $-1 \le sen\,\alpha \le 1$ y que $-1 \le cos\,\alpha \le 1$ (sus valores están acotados por −1 y 1, ya que son las ordenadas y abscisas del punto *P*(*x*, *y*) que va recorriendo la circunferencia de radio uno).

Sobre la figura se pueden observar las coordenadas de los puntos *A*, *C*, *E*, *G* y de nuevo *A*; sus abscisas y ordenadas corresponden respectivamente a los valores de las razones coseno y seno de los ángulos de 0º, 90º, 180º, 270º y 360º grados, y que se reflejan en la tabla siguiente junto a los valores de la tangente:

	0º	90º	180º	270º	360º
sen	0	1	0	−1	0
cos	1	0	−1	0	1
tg	0	No existe	0	No existe	0

Hemos visto cómo a partir de una razón trigonométrica se calculaban las demás razones asociadas a un ángulo agudo, ahora podemos resolver el mismo problema para un ángulo cualquiera como veremos a continuación.

Ejemplo

10. Si $sen\,\alpha = \frac{3}{7}$, con α situado en el segundo cuadrante, calcula las demás razones trigonométricas de α.

Solución :

Por la fórmula fundamental de la trigonometría: $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\,\alpha = -\sqrt{1-\frac{9}{49}} = -\sqrt{\frac{40}{49}} = -\frac{\sqrt{40}}{7}$, puesto que es negativo en el segundo cuadrante.

Cálculo de la tangente: $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{\frac{3}{7}}{-\frac{\sqrt{40}}{7}} = -\dfrac{3}{\sqrt{40}} = -\dfrac{3\sqrt{40}}{40}$.

Para saber más...

Las calculadoras científicas dan el signo de las razones trigonométricas directamente. Por ejemplo, si se desea conocer las razones trigonométricas del ángulo de 234º, que pertenece al tercer cuadrante, la calculadora da los resultados siguientes: *sen* 234º = − 0,809016994; *cos* 234º = − 0,587785252; *tg* 234º = 1,37638192.

Actividades

20. Si la $tg\,\alpha = \sqrt{2}$, con α situado en el tercer cuadrante, calcula las demás razones trigonométricas de α.

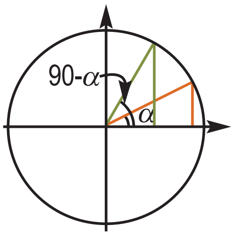
21. Si el $cos\,\alpha = \frac{2}{5}$, con α situado en el cuarto cuadrante, calcula las demás razones trigonométricas de α.

22. Indica el signo y a continuación halla con calculadora las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos: **a)** 56º; **b)** 130º; **c)** 240º; **d)** 320º.

23. Indica el signo y a continuación halla con calculadora las razones trigonométricas siguientes: **a)** *sen* 546º; **b)** *cos* (−37º); **c)** *tg* (−130º); **d)** *cos* (−23º).

4. Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos

Es muy útil obtener relaciones entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos. Estas relaciones las obtendremos gráficamente.



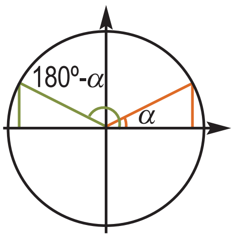
Ángulos complementarios: α y 90º − α

De los triángulos rectángulos situados en la figura adjunta es fácil deducir que:

$sen\ (90º - \alpha) = cos\ \alpha$.

$cos\ (90º - \alpha) = sen\ \alpha$.

Relaciones entre las tangentes: $tg\ (90º - \alpha) = \dfrac{sen(90º - \alpha)}{cos(90º - \alpha)} = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = cotg\ \alpha$.



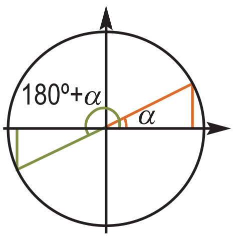
Ángulos suplementarios: α y 180º – α

En la figura se observa que:

$sen\ (180º - \alpha) = sen\ \alpha$.

$cos\ (180º - \alpha) = -\ cos\ \alpha$.

Relaciones entre las tangentes: $tg\ (180º - \alpha) = \dfrac{sen(180º - \alpha)}{cos(180º - \alpha)} = \dfrac{sen\ \alpha}{-cos\ \alpha} = -tg\ \alpha$.



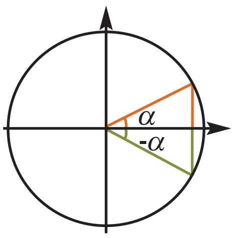
Ángulos que difieren en 180º: α y 180º + α

En la figura se observa que:

$sen\ (180° + \alpha) = -\ sen\ \alpha$.

$cos\ (180° + \alpha) = -\ cos\ \alpha$.

Relaciones entre las tangentes: $tg\ (180º + \alpha) = \dfrac{sen(180º + \alpha)}{cos(180º + \alpha)} = \dfrac{-sen\ \alpha}{-cos\ \alpha} = tg\ \alpha$.



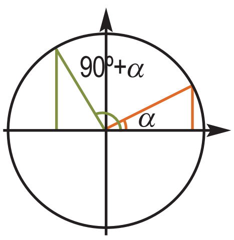
Ángulos opuestos: α y – α

En la figura se observa que:

$sen\ (-\alpha) = -\ sen\ \alpha$.

$cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha$.

Relaciones entre las tangentes: $tg\ (-\alpha) = -\ tg\ \alpha$.



Ángulos que difieren en 90º: α y 90º + α

En la figura se observa que:

$sen\ (90º + \alpha) = cos\ \alpha$.

$cos\ (90º + \alpha) = -sen\ \alpha$.

Relaciones entre las tangentes: $tg\ (90º + \alpha) = \dfrac{sen(90º + \alpha)}{cos(90º + \alpha)} = \dfrac{cos\ \alpha}{-sen\ \alpha} = -\dfrac{1}{tg\ \alpha} = -cotg\ \alpha$.

Mediante estas relaciones y la ayuda de la calculadora se pueden hallar las razones trigonométricas de cualquier ángulo, previa asignación del ángulo que corresponda a la razón conocida, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

11. Sabiendo que *tg* α = 2,3456789, y que 0º < α < 90º (0º < α < $\frac{\pi}{2}$), calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α.

Solución:

Se calcula α, mediante la secuencia conocida: 2.3456789 INV *tan* DEG 66.91068194

El ángulo, en grados, es 66,91068194º.

A partir del ángulo se calculan las demás razones.

sen α: 66.91068194 *sin* DEG 0.919894626

El valor del seno será: *sen* 66.91068194º = 0,91989426.

cos α: 66.91068194 *cos* DEG 0.392165622

El valor del coseno será: *cos* 66.91068194º = 0,392165622.

12. Sabiendo que *sen* α = 0,546329, y que 90º < α < 180º ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α.

Solución:

Se calcula α, mediante la conocida secuencia: 0.546329 INV *sin* DEG 33.11552971

El resultado de la pantalla es α_1 = 33,11552971º.

Las calculadoras para las funciones inversas aportan el ángulo principal comprendido entre −90º y 90º. Como el ángulo que nos piden es del segundo cuadrante, se debe calcular dicho ángulo de forma que tenga por seno el valor dado por la calculadora: este ángulo es el suplementario de α_1.
α = 180º − α_1 = 180º − 33,11552971º = 146,8844703º.

Con este dato se calculan el coseno y la tangente como en el ejemplo anterior.
cos 146,8844703º = −0,837570667; *tg* 146,8844703º = − 0,652278095.

Actividades

24. A partir de las razones trigonométricas del ángulo de 30º, calcula las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los ángulos de: **a)** 60º; **b)** 120º; **c)** 150º; **d)** 210º; **e)** −30º.

Recuerda: $sen\ 30^o = \frac{1}{2}$, $cos\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

25. A partir de las razones trigonométricas del ángulo de 45º, calcula las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los ángulos de: **a)** 135º; **b)** 225º; **c)** −45º.

Recuerda: $sen\ 45^o = cos\ 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\ 45^o = 1$.

26. A partir de las razones trigonométricas de 25º (*sen* 25º = 0,42; *cos* 25º =0,90; *tg* 25º = 0,46), calcula las razones trigonométricas de: **a)** 65º; **b)** 115º; **c)** 155º; **d)** 205º; **e)** 245º; **f)** 295º; **g)** 335º.

27. Halla β y *sen* β, sabiendo que *tg* β = −3,175 y que β es un ángulo del segundo cuadrante.

28. Sabiendo que $sen\,\alpha = -\frac{1}{5}$ y que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcula α y $tg\,\alpha$.

29. Halla β y $cos\,\beta$, sabiendo que $sen\,\beta = \frac{1}{3}$ y que $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

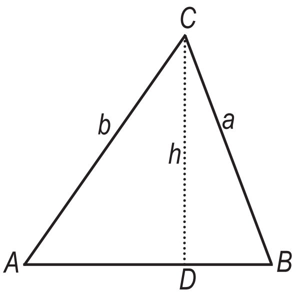
5. Resolución de triángulos cualesquiera

Hasta ahora hemos trabajado con triángulos rectángulos. En este apartado resolveremos triángulos cualesquiera. Los problemas consisten en determinar todos los elementos de un triángulo a partir de tres elementos conocidos, de los que, al menos uno, es un lado.

Para abordar este tipo de problemas se precisan el **teorema del seno** y el **teorema del coseno**, que se demuestran a continuación.

5.1. Teorema del seno

En todo triángulo *ABC* los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$.



Demostración: Si en el triángulo acutángulo *ABC* de la figura se traza la altura correspondiente al vértice *C*, el triángulo *ABC* se divide en dos triángulos rectángulos *ADC* y *CDB*. Se cumple que: $\operatorname{sen}\hat{A} = \dfrac{h}{b}$ y $\operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{h}{a}$. Por lo tanto: $h = b\operatorname{sen}\hat{A}$ y $h = a\operatorname{sen}\hat{B}$; luego, $b\operatorname{sen}\hat{A} = a\operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$. Comprueba que al trazar la altura correspondiente al vértice *B* se obtiene: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$. Así, podemos escribir el **teorema del seno**: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$.

La demostración en el caso de un triángulo obtusángulo es análoga.

Mediante el teorema del seno se puede calcular un lado cuando se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, o un ángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Esto se resume en la siguiente tabla:

DATOS	INCÓGNITAS
I. Un lado y dos ángulos.	Un ángulo, dos lados.
II. Dos lados y un ángulo.	Dos ángulos, un lado.

Si al aplicar el **teorema del seno** una de las incógnitas es un ángulo, pueden resultar dos soluciones, una con ángulo agudo y la otra con ángulo obtuso, ya que entre 0º y 180º hay dos ángulos que tienen el mismo seno.

Ejemplos

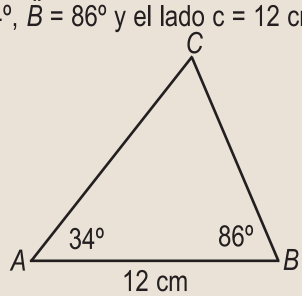
13. Calcula los elementos de un triángulo del que se conocen los ángulos $\hat{A}$ = 34º, $\hat{B}$ = 86º y el lado c = 12 cm.

Solución:

Ángulo $\hat{C}$ = 180º – (34º + 86º) = 180º − 120º = 60º.

Lado *a*: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}34^o} = \dfrac{12}{\operatorname{sen}60^o} \Rightarrow a = \dfrac{12\cdot\operatorname{sen}34^o}{\operatorname{sen}60^o} \approx 7{,}75\ cm.$

Lado *b*: $\dfrac{b}{\operatorname{sen}86^o} = \dfrac{12}{\operatorname{sen}60^o} \Rightarrow b = \dfrac{12\cdot\operatorname{sen}86^o}{\operatorname{sen}60^o} \approx 13{,}82\ cm.$



14. Calcula los elementos de un triángulo del que se conocen el lado a = 3 cm, $\hat{B}$ = 30º y b = 4 cm.

Solución:

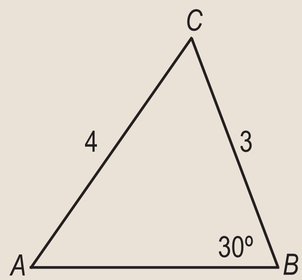
Cálculo de $\hat{A}$: $\dfrac{3}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{4}{sen\ 30^o} \Rightarrow sen\ \hat{A} = \dfrac{3 \cdot sen\ 30^o}{4} = 0,375.$

Posibles soluciones de $\hat{A}$:

$\hat{A}_1 = 22,02431284^o = 22^o\ 1'\ 28''$ y $\hat{A}_2 = 157,97756872^o = 157^o\ 58'\ 32''$; en este caso $\hat{A}_2 + \hat{B} > 180^o$. Por tanto sólo sirve la primera solución.

Ángulo $\hat{C} = 180^o - (\hat{B} + \hat{A}) = 127,97566669^o = 127^o\ 58'\ 32''$.

Lado c: $\dfrac{4}{sen\ 30^o} = \dfrac{c}{sen\ 127^o\ 58'\ 32''} \Rightarrow c = \dfrac{4 \cdot sen 127^o\ 58'\ 32'}{sen\ 30^o} \approx 6,30\ cm.$



15. Calcula los elementos de un triángulo que tiene a = 5 cm, c = 8 cm y $\hat{A}$ = 30º.

Solución:

Cálculo de $\hat{C}$:

$\dfrac{5}{sen\ 30^o} = \dfrac{8}{sen\ \hat{C}} \Rightarrow sen\ \hat{C} = \dfrac{8 \cdot sen\ 30^o}{5} = 0,8.$

Al aplicar el teorema del seno se tienen dos soluciones para $\hat{C}$:

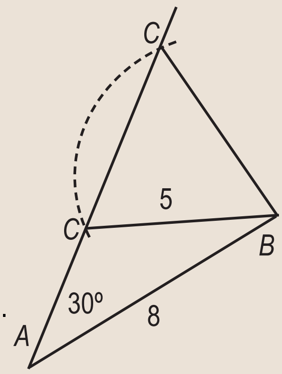
$\hat{C}_1 = 53,13010235^o = 53^o\ 7'\ 48''$ y $\hat{C}_2 = 126,8698976^o = 126^o\ 52'\ 12''$.

Ambas son válidas, pues $\hat{A} + \hat{C} < 180^o$ para los dos valores. Soluciones de $\hat{B}$:

$$\hat{B}: \begin{cases} \hat{B}_1 = 180^o - (\hat{A} + \hat{C}_1) = 96,86989765^o = 96^o\ 52'\ 12'' \\ \hat{B}_2 = 180^o - (\hat{A} + \hat{C}_2) = 23,1301024^o = 23^o\ 7'\ 48'' \end{cases}.$$

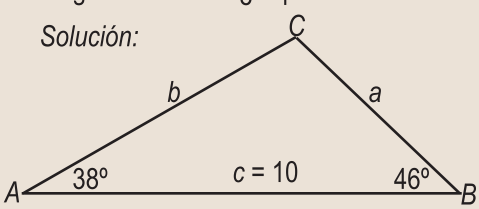
Soluciones de b: $\dfrac{5}{sen\ 30^o} = \dfrac{b_1}{sen\ 96,86989765^o} \Rightarrow b_1 = \dfrac{5 \cdot sen\ 96,86989765^o}{sen\ 30^o} \approx 9,92$ cm.

$\dfrac{5}{sen\ 30^o} = \dfrac{b_2}{sen\ 23,1301024^o} \Rightarrow b_2 = \dfrac{5 \cdot sen\ 23,1301024^o}{sen\ 30^o} \approx 3,92$ cm.



16. Desde dos ciudades A y B, situadas a 10 km, se observan bajo ángulos de 38º y 46º, respectivamente, unos fuegos artificiales. ¿A qué distancia están viendo los habitantes de cada ciudad los fuegos artificiales?

Solución:

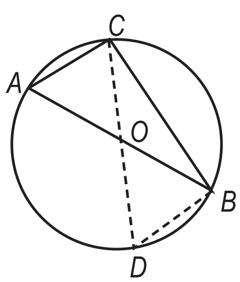


La figura nos aclara la situación: ángulo $\hat{C} = 180^o - (38^o + 46^o) = 96^o$.

Aplicando el teorema del seno se tiene: $\dfrac{a}{sen\ 38^o} = \dfrac{b}{sen\ 46^o} = \dfrac{10}{sen\ 96^o}$.

Por lo que $a = \dfrac{10 \cdot sen\ 38^o}{sen\ 96^o} \approx 6,19\ km$ y $b = \dfrac{10 \cdot sen\ 46^o}{sen\ 96^o} \approx 7,23\ km$.

Para saber más...



La constante de proporcionalidad entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Para demostrar esta afirmación construimos la circunferencia de radio r circunscrita al triángulo ABC y trazamos el diámetros $\overline{CD}$.

En el triángulo ABC se cumple el teorema del seno: $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$. El triángulo CDB tiene el lado $\overline{CD} = 2r$ y es el diámetro de la circunferencia luego el ángulo $\hat{B} = 90^o$.

Aplicamos el teorema del seno: $\dfrac{a}{sen\ \hat{D}} = \dfrac{2r}{sen\ 90^o} = 2r$. Se cumple que $\hat{A} = \hat{D}$, por abarcar el mismo arco; al sustituir en la primera expresión se obtiene: $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}} = 2r$.

5.2. Teorema del coseno

En un triángulo cualquiera de lados *a*, *b* y *c*, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\hat{C}$$

Demostración:

En el triángulo obtusángulo *ABC* de la figura adjunta, se ha trazado la altura sobre el lado $\overline{AB}$.

Se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo *CDB*: $a^2 = h^2 + (c + d)^2$.

Si aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo *CDA*, obtenemos: $h^2 = b^2 - d^2$.

Se sustituye el valor de *h* en la igualdad anterior y se tiene que: $a^2 = b^2 - d^2 + c^2 + d^2 + 2cd$.

En el triángulo *CDA*: $\cos\beta = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b\cos\beta$.

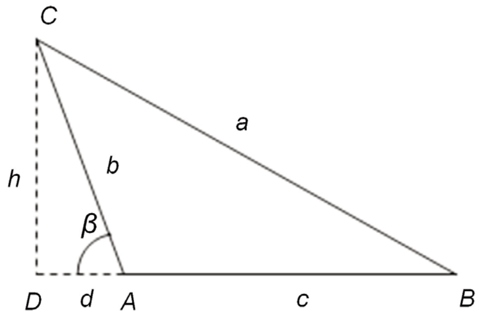
Como $\beta + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \cos\beta = -\cos\hat{A}$.

Finalmente: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

De forma análoga se obtienen las otras dos igualdades:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\hat{C}$.



La demostración para el caso de triángulos acutángulos es análoga.

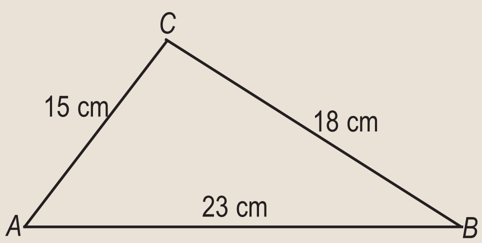
Mediante el **teorema del coseno** se averiguan los ángulos de un triángulo conocidos los tres lados, se hallan el lado y los dos ángulos cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos o cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido. Estos hechos se resumen en la siguiente tabla:

DATOS	INCÓGNITAS
III. Los tres lados.	Los tres ángulos.
IV. Dos lados y un ángulo opuesto.	Dos ángulos. Un lado.
V. Dos lados y el ángulo que forman.	El otro lado. Dos ángulos.

Ejemplos

17. Resuelve un triángulo en el que se conocen: *a* = 23 cm, *b* = 15 cm y *c* = 18 cm.

Solución:



Se calculan $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ mediante el teorema del coseno.

$$23^2 = 15^2 + 18^2 - 2\cdot 15\cdot 18\cdot\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{15^2 + 18^2 - 23^2}{2\cdot 15\cdot 18} =$$

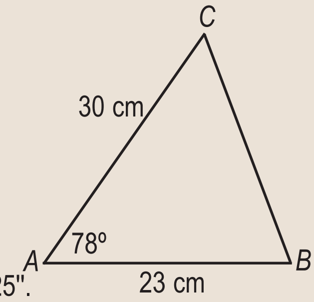
$$= \frac{20}{540} = \frac{1}{27} \Rightarrow \hat{A} = 87^\circ\ 52'\ 39''.$$

$$15^2 = 23^2 + 18^2 - 2\cdot 23\cdot 18\cdot\cos\hat{B} \Rightarrow \hat{B} = 40^\circ\ 40'\ 19''.$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 51^\circ\ 27'\ 2''.$$

18. Resuelve un triángulo en el que se conocen: $\hat{A} = 78º$, b = 30 cm y c = 23 cm.

Solución:



Mediante el teorema del coseno se determina el lado a:

$a^2 = 30^2 + 23^2 - 2·30·23·cos\ 78º = 1142,08 \Rightarrow a = \sqrt{1142,08} \approx 33,78$ cm.

Al conocer los tres lados la solución es única.

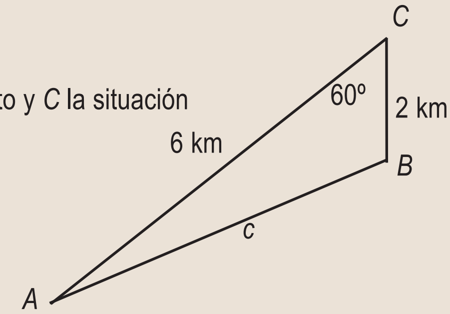
Se calcula $\hat{B}$ mediante el teorema del seno:

$$\frac{33,78}{sen\ 78º} = \frac{30}{sen\ \hat{B}} \Rightarrow sen\ \hat{B} = \frac{30 sen\ 78º}{33,78} \approx 0,868692363 \Rightarrow \hat{B} = 60,3070374º = 60º18'\ 25''.$$

$\hat{C} = 180º - (\hat{A} + \hat{B}) = 41,6929626º = 41º\ 41'\ 35''$.

19. Un montañero queda atrapado por culpa de la nieve. La radio que lleva sólo alcanza a comunicarse con el campamento más próximo, que está a 2 km de distancia, pero no con la ciudad más próxima, que está a 6 km de distancia. Por los aparatos que lleva en su mochila, después de hacer cálculos, comunica a sus compañeros que está formando un ángulo de 60º entre la ciudad y el campamento. Calcula la distancia que deben recorrer sus compañeros desde el campamento a la ciudad para que puedan ir en su auxilio.

Solución:



La figura adjunta, siendo A la ciudad más próxima, B el campamento y C la situación del montañero, nos da una idea de la situación.

Aplicando el teorema del coseno, tenemos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \hat{C}$.

Se sustituyen los valores de a, b y $cos\ \hat{C}$:

$c^2 = 4 + 36 - 24\ cos\ 60º = 28 \Rightarrow c = \sqrt{28} \approx 5,29$ km.

Actividades

30. Calcula los lados b y c de un triángulo conocido el lado a = 5 m y los ángulos $\hat{B} = 60º$ y $\hat{C} = 11º$.

31. En el triángulo ABC se conocen los lados a = 5 m, b = 6 m y el ángulo $\hat{B} = 45º$. Calcula los restantes elementos del triángulo.

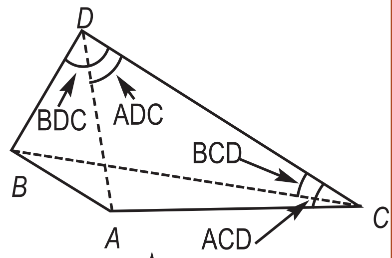
32. En el triángulo ABC se conocen los lados a = 8 m y b = 5 m, y el ángulo comprendido entre ellos $\hat{C} = 45º$. Calcula los restantes elementos del triángulo.

33. En el triángulo ABC se conocen a = 50 m, b = 20 m y $\hat{B} = 38º$. Calcula el valor del ángulo $\hat{A}$.

34. Si en el triángulo ABC se conocen a = 80 cm, b = 110 cm y $\hat{A} = 27º$, calcula los demás elementos del triángulo.

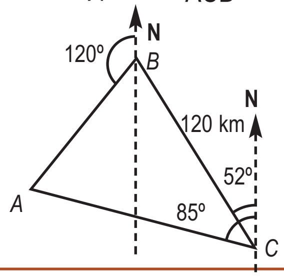
35. ¿Cuánto miden los tres ángulos de un triángulo ABC, sabiendo que a =16 m, b = 25 m y c = 20 m?

36. Dos observadores se encuentran a una distancia de 4 km. En el plano vertical que pasa por ellos hay un globo, que cada uno de ellos ve bajo ángulos de 40º y 30º. Halla la distancia del globo a cada uno de los observadores.



37. Un día de excursión un grupo de amigos divisan desde dos posiciones C y D, separadas entre sí 64,8 m, dos puntos inaccesibles A y B de una montaña. Después de muchos cálculos saben que ACD = 76º 26', BCD = 31º 36', BDC = 28º 9' y ADC = 18º 55'. Calcula la distancia entre los puntos A y B. La figura te ayudará a resolver el problema.

38. Un barco A, en serio peligro de hundimiento, pide ayuda por radio a dos centrales B y C, distantes entre sí 120 km. La recta que une B con C forma un ángulo de 52º con la dirección norte. En la central B se recibe la señal formando un ángulo de 120º con la dirección norte, y en la C, de 85º en la dirección norte−sur. Calcula la distancia a la que se encuentra la estación más próxima al barco para salir en su ayuda. La figura te ayudará a resolver el problema.

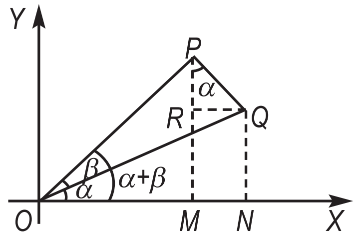


6. Fórmulas trigonométricas

En este apartado se deducen **fórmulas trigonométricas** que permiten obtener las razones trigonométricas de ciertos ángulos a partir de las razones trigonométricas conocidas de otros.

Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos

Tratamos de calcular las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + \beta$ conocidas las razones trigonométricas de los ángulos α y β. Para ello nos fijamos en la figura adjunta en la que aparecen representados los ángulos α, β y $\alpha + \beta$.



En el triángulo *OPM* se tiene que: $sen\,(\alpha+\beta)=\frac{\overline{MP}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{MR}+\overline{RP}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{MR}}{\overline{OP}}+\frac{\overline{RP}}{\overline{OP}}$ (1). Teniendo en cuenta que

$\overline{MR}=\overline{NQ}$ y que los ángulos *RPQ* y *NOQ* son iguales por tener los lados perpendiculares dos a dos,

$sen\,\alpha=\frac{\overline{NQ}}{\overline{OQ}}\Rightarrow \overline{NQ}=\overline{OQ}\cdot sen\,\alpha \Rightarrow \overline{MR}=\overline{OQ}\cdot sen\,\alpha$. Por otro lado, $\cos\alpha=\frac{\overline{RP}}{\overline{PQ}}\Rightarrow$. Sustituyendo en (1):

$$sen(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OQ}\cdot sen\,\alpha}{\overline{OP}}+\frac{\overline{PQ}\cdot\cos\alpha}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}\cdot sen\,\alpha+\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}\cdot\cos\alpha \Rightarrow sen(\alpha+\beta)=\cos\beta\cdot sen\alpha+sen\,\beta\cdot\cos\alpha.$$

Esta expresión se suele ordenar así: $sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\,\beta$.

A partir de esta fórmula se pueden obtener las demás **fórmulas trigonométricas**.

Coseno de la suma de dos ángulos

$\cos(\alpha+\beta)=sen\,[90^\circ+(\alpha+\beta)]=sen\,[(90^\circ+\alpha)+\beta]$

Se aplica el seno de la suma:

$\cos(\alpha+\beta)=sen\,(90^\circ+\alpha)\cdot\cos\beta+\cos(90^\circ+\alpha)\cdot sen\,\beta=\cos\alpha\cdot\cos\beta+(-sen\,\alpha)\cdot sen\,\beta$.

Se simplifica: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta$.

Tangente de la suma de dos ángulos

$$tg\,(\alpha+\beta)=\frac{sen\,(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta}$$

Dividiendo el numerador y denominador por $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ queda:

$$tg\,(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{sen\,\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{sen\,\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{sen\,\alpha\cdot sen\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$ y simplificado $tg\,(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$.

Ejemplo

20. A partir de las razones de 30º y 45º calcula el valor exacto de las razones de 75º.

Solución:

$$sen\,75º = sen(45º + 30º) = sen\,45º \cdot cos\,30º + cos\,45º \cdot sen\,30º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$cos\,75º = cos(45º + 30º) = cos\,45º \cdot cos\,30º - sen\,45º \cdot sen\,30º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$tg\ 75º = tg\ (45º\ +\ 30º) = \frac{tg\,45º + tg\,30º}{1 - tg\,45º \cdot tg\,30º} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = 2+\sqrt{3}.$$

Razones trigonométricas de la diferencia de ángulos

Como $\alpha - \beta$ se puede expresar como $\alpha + (-\beta)$, aplicando las relaciones entre las razones de un ángulo y su opuesto se encuentra fácilmente que:

$$sen(\alpha - \beta) = sen[\alpha + (-\beta)] = sen\,\alpha \cdot cos(-\beta) + cos\,\alpha \cdot sen(-\beta)$$

Como $cos\,(-\beta) = cos\,\beta$ y $sen\,(-\beta) = -\,sen\,\beta$, se obtiene:

$$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sen\,\beta$$

De forma análoga se procede para determinar $cos\,(\alpha - \beta)$ y $tg\,(\alpha - \beta)$, obteniéndose:

$$cos(\alpha - \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$$

$$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

Ejemplo

21. A partir de las razones de 60º y 45º calcula las tazones trigonométricas de 15º.

Solución:

$$sen\,15º = sen(60º - 45º) = sen\,60º \cdot cos\,45º - cos\,60º \cdot sen\,45º = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$cos\,15º = cos(60º - 45º) = cos\,60º \cdot cos\,45º + sen\,60º \cdot sen\,45º = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

$$tg\,15º = tg(60º - 45º) = \frac{tg\,60º - tg\,45º}{1 + tg\,60º \cdot tg\,45º} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

Teniendo en cuenta que $2\alpha = \alpha + \alpha$ y aplicando las primeras fórmulas que hemos obtenido, se llega fácilmente a que:

$$sen\,2\alpha = 2sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha$$

$$cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$tg\ 2\alpha = \frac{2 \cdot tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$$

Ejemplo

22. Calcula las razones trigonométricas de 120º a partir de las de 60º.

Solución:

$$sen\,120^o = 2\cdot sen\;60^o\cdot cos\;60^o = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$cos\,120^o = cos^2\,60^o - sen^2\,60^o = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-1}{2}.$$

$$tg\;120^o = \frac{2\,tg\;60^o}{1 - tg^2\;60^o} = \frac{2\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}.$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

Vamos a calcular las razones trigonométricas del ángulo $\frac{\alpha}{2}$ a partir de $\cos\alpha$.

Como $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$ se puede escribir: $cos\,\alpha = cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}$ (1).

Además $cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - sen^2\frac{\alpha}{2}$, por lo que $cos\,\alpha = 1 - 2\cdot sen^2\frac{\alpha}{2}$.

Despejando queda: $sen\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}$.

Como $sen^2\frac{\alpha}{2} = 1 - cos^2\frac{\alpha}{2}$, sustituyendo en (1) queda que $cos\,\alpha = -1 + 2\cdot cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Despejando obtenemos: $cos\;\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\;\alpha}{2}}$.

Finalmente, usando las dos fórmulas anteriores: $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}$.

Ejemplo

23. Calcula las razones trigonométricas de 15º a partir de las de 30º.

Solución:

$$sen\;15^o = \sqrt{\frac{1-cos\;30^o}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$cos\;15^o = \sqrt{\frac{1+cos\;30^o}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

$$tg\;15^o = \sqrt{\frac{1-cos\;30^o}{1+cos\;30^o}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

Transformación en producto de las sumas y diferencias de razones trigonométricas

A veces interesa tener una suma o una diferencia como producto de razones trigonométricas.

Partimos de las razones trigonométricas suma y diferencia de senos de dos ángulos:

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta$$
$$sen(\alpha-\beta) = sen\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sen\beta$$

Sumamos: $sen(\alpha+\beta) + sen\,(\alpha-\beta) = 2\,sen\alpha \cdot cos\beta$

Cambiamos de notación: $\alpha + \beta = A$; $\alpha - \beta = B$; de donde $\alpha = \frac{A+B}{2}$ y $\beta = \frac{A-B}{2}$

Se sustituye en la fórmula anterior: $sen\,A + sen\,B = 2\,sen\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2}$

Si restamos en lugar de sumar obtenemos: $sen\,A - sen\,B = 2\,cos\,\frac{A+B}{2}\,sen\,\frac{A-B}{2}$

Partiendo de la suma y diferencia de cosenos de dos ángulos y operando de forma similar, se llega a que:

$$cos\,A + cos\,B = 2\,cos\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2}$$
$$cos\,A - cos\,B = -2\,sen\,\frac{A+B}{2}\,sen\,\frac{A-B}{2}$$

Ejemplo

24. Transforma en producto y calcula: **a)** *sen* 75º + *sen* 15º; **b)** *cos* 75º − *cos* 15º.

Solución:

a) $sen\ 75^o + sen\ 15^o = 2\,sen\,\frac{75^o+15^o}{2}\,cos\,\frac{75^o-15^o}{2} = 2\,sen\,45^o\,cos\,30^o = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

b) $cos\ 75^o - cos\ 15^o = -2\,sen\,\frac{75^o+15^o}{2}\,sen\,\frac{75^o-15^o}{2} = -2\,sen\,45^o\,sen\,30^o = -2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Actividades

39. Demuestra la fórmula: $cos(\alpha-\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sen\alpha \cdot sen\beta$.

40. Demuestra la fórmula: $tg\,(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$.

41. Si *sen* 18º = 0,31 y *sen* 38º = 0,61, calcula *cos* 18º, *tg* 18º, *cos* 38º y *tg* 38º. A partir de los valores obtenidos calcula las razones trigonométricas de 56º y de 20º.

42. Si $cos\,\alpha = -\frac{1}{2}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante, calcula las razones trigonométricas de 2α.

43. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 15º a partir de las de 30º.

44. Sabiendo que *cos* 68º = 0,37, calcula *sen* 68º y *tg* 68º. A partir de los datos obtenidos, calcula las razones trigonométricas de 34º aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

45. Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 45º a partir de las de 90º.

46. Demuestra que $\frac{tg\,\alpha \cdot cosec^2\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha} = cotg\,\alpha$.

47. Demuestra la fórmula $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

48. Demuestra la fórmula $\cos A - \cos B = -2\,\text{sen}\,\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}$

49. Transforma en producto y a continuación calcula:

a) $\text{sen}\ 75^\circ - \text{sen}\ 15^\circ$; **b)** $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$.

50. Convierte en producto:

a) $\text{sen}\ 3\alpha + \text{sen}\ \alpha$; **b)** $\text{sen}\ 3\alpha - \text{sen}\ \alpha$; **c)** $\cos 3\alpha + \cos \alpha$; **d)** $\cos 3\alpha - \cos \alpha$.

Recuerda

✓ **Ángulos orientados.**
Región del plano que barre una semirrecta al girar en torno a su origen. Un radián es un ángulo central al que le corresponde un arco cuya longitud coincide con el radio *r* de la circunferencia.

✓ **Razones trigonométricas de un ángulo agudo.**

- Las razones trigonométricas de un ángulo son: seno (*sen*), coseno (*cos*), tangente (*tg*), cosecante (cosec), secante (sec) y cotangente (cotg).
- La tres primeras son las principales y se definen así:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}};\quad \cos\alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}};\quad tg\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}.$$

- Las tres restantes toman valores inversos.

✓ **Independencia de las razones trigonométricas:** Las razones trigonométricas definidas para un ángulo caracterizan a los ángulos agudos.

✓ **Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas.** Las razones trigonométricas se relacionan de forma que, conocida una de ellas, se puede calcular el resto. Estas relaciones son:
$tg\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$; $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Estas fórmulas tienen aplicación en la resolución de triángulos rectángulos.

✓ **Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.**

- Para generalizar las razones trigonométricas a un ángulo cualquiera se usa la circunferencia goniométrica o de radio unidad. Sobre ella el seno y el coseno del ángulo agudo α son respectivamente la ordenada y la abscisa del punto en el que el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia goniomética. Con esta idea los signos de las razones trigonométricas se reflejan en la tabla adyacente.

	$\text{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$
1er cuadrante	+	+	+
2^{o} cuadrante	+	–	–
3er cuadrante	–	–	+
4^{o} cuadrante	–	+	–

- A partir de la representación de las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica se puede obtener la siguiente propiedad: $-1 \le sen\alpha \le 1$; $-1 \le cos\alpha \le 1$.

✓ **Resolución de triángulos cualesquiera.**
Resolver un triángulo cualquiera es determinar todos sus elementos. Para ello es necesario conocer tres elementos de los que, al menos, uno es un lado. Para abordar este problema se precisan los teoremas del seno y del coseno.

- **Teorema del seno.** En todo triángulo *ABC* los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos: $\dfrac{a}{sen\,A} = \dfrac{b}{sen\,B} = \dfrac{c}{sen\,C}$.

  Al aplicar el teorema del seno si una de las incógnitas es un ángulo, se debe estudiar la posibilidad de dos soluciones, una con ángulo agudo y la otra con ángulo obtuso.

- **Teorema del coseno.** En un triángulo cualquiera de lados *a*, *b* y *c*, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}.$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\hat{C}.$$

✓ **Fórmulas trigonométricas.**
Permiten obtener las razones trigonométricas de ciertos ángulos a partir de otras razones.

- **Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos:**

$$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos\,\alpha \cdot sen\,\beta; \quad cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta.$$

- **Razones trigonométricas de la diferencia de ángulos:**

$$sen\,(\alpha-\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - cos\,\alpha \cdot sen\,\beta; \; cos\,(\alpha-\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta.$$

- **Razones trigonométricas del ángulo doble y mitad:**

$$sen\,2\alpha = 2\,sen\alpha\,cos\alpha; \quad cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha; \quad sen\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}; \quad cos\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}.$$

✓ **Transformación en producto de razones trigonométricas:**

$$sen\,A + sen\,B = 2\,sen\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2}; \quad sen\,A - sen\,B = 2\,cos\,\frac{A+B}{2}\,sen\,\frac{A-B}{2};$$
$$cos\,A + cos\,B = 2\,cos\,\frac{A+B}{2}\,cos\,\frac{A-B}{2}; \quad cos\,A - cos\,B = -2\,sen\,\frac{A+B}{2}\,sen\,\frac{A-B}{2}.$$