3 Ecuaciones, sistemas e inecuaciones

En esta Unidad se desarrollan algunos contenidos que pertenecen al Álgebra, parte de las matemáticas que se vale de la Aritmética y es a la vez su auxiliar. Comienza recordando la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita estudiadas en Educación Secundaria; se muestran métodos para encontrar las soluciones de algunas ecuaciones de grado superior, así como el estudio de ecuaciones irracionales. Mención aparte merece el estudio de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Carl Friedrich Gauss. (Wikimedia Commons)

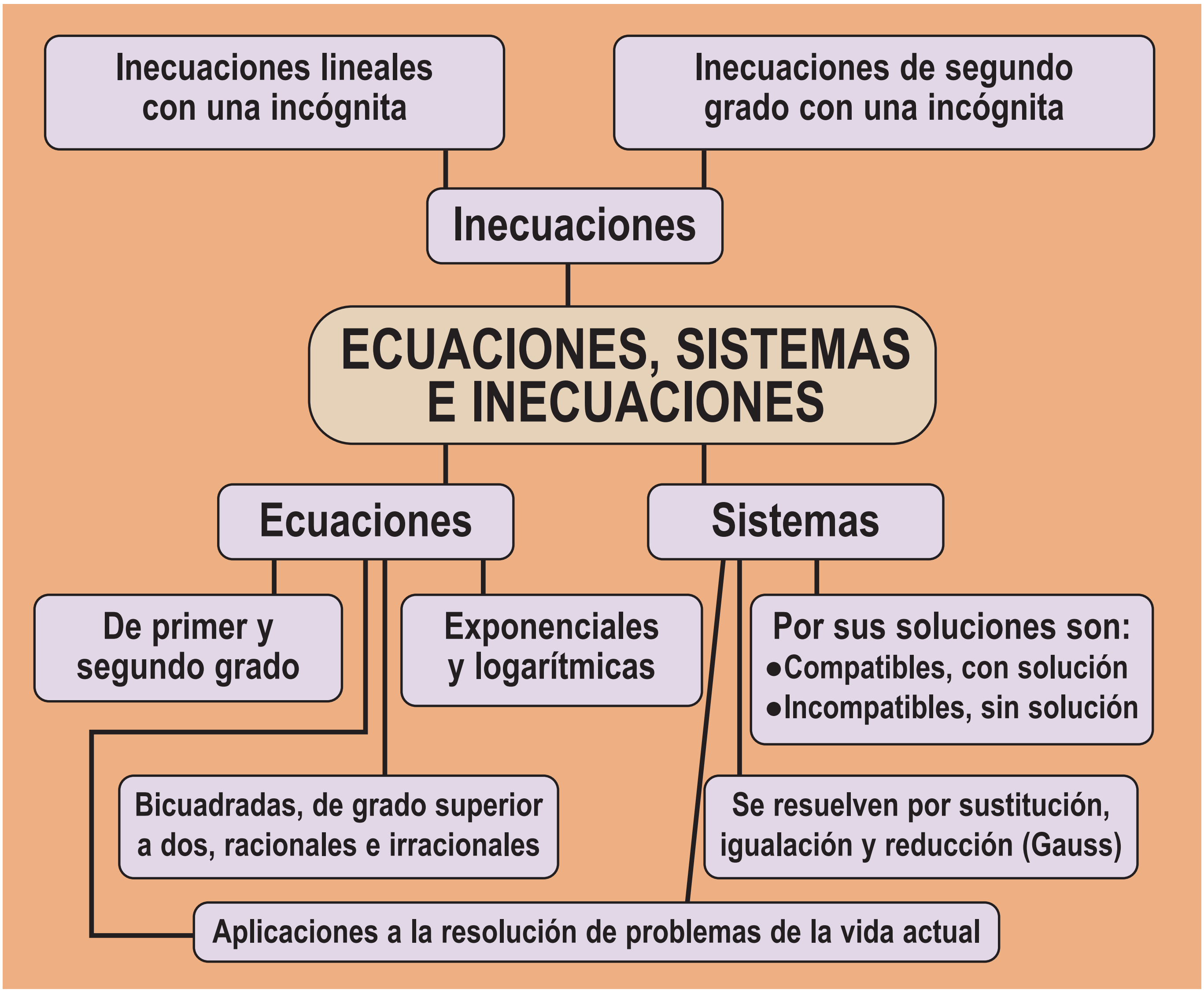
Se continúa con el estudio de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. A partir de las posiciones relativas de dos rectas en el plano se establece una clasificación de los sistemas. Esta clasificación se generaliza a los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, que se resuelven aplicando el método de Gauss, llamado así en honor del matemático, astrónomo y físico alemán Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

La Unidad sigue con la introducción de inecuaciones lineales, sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita e inecuaciones cuadráticas de una incógnita.

Estos conocimientos sobre ecuaciones, sistemas e inecuaciones encuentran abundante aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Resolver con soltura todo tipo de ecuaciones de primer y segundo grado.
2. Resolver ecuaciones bicuadradas y de grado superior al segundo con una incógnita.
3. Transformar ecuaciones irracionales en racionales para su resolución.
4. Conocer los tres tipos de sistemas que existen atendiendo al tipo de soluciones.
5. Dominar el método de Gauss para resolver y discutir sistemas de ecuaciones.
6. Aplicar las técnicas adecuadas para encontrar las soluciones de inecuaciones lineales cuadráticas de una incógnita.
7. Utilizar los conocimientos de resolución de ecuaciones, sistemas e inecuaciones para resolver problemas que se plantean en la vida actual.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Ecuaciones de primer y segundo grado

Recuerda que una ecuación es una igualdad que es verdadera para algunos valores de las variables. En este apartado estudiaremos ecuaciones de primer y segundo grado.

1.1. Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** con una incógnita es toda ecuación que mediante transformaciones de equivalencia se convierte en otra de la forma $a\,x + b = 0$, con $a \neq 0$; a y b son número reales y se llaman coeficientes de la ecuación.

Ejemplo

1. Resuelve $\frac{3x+8}{10} = 3 - \frac{5x-8}{12}$.

Solución:

Se calcula el M. C. M. de los denominadores 10 y 12, que es 60, y se multiplican los dos miembros de la ecuación por 60: $60 \cdot \frac{3x+8}{10} = 60 \cdot \left(3 - \frac{5x-8}{12}\right)$;

Se quitan paréntesis y se simplifica: $18x + 48 = 180 - 25x + 40$;

Se trasponen términos: $18x + 25x = 180 + 40 - 48$;

Se simplifica: $43x = 172$;

Se despeja la incógnita: $x = \frac{172}{43} = 4$.

Comprobación: $\frac{3 \cdot 4 + 8}{10} = 3 - \frac{5 \cdot 4 - 8}{12}$; $2 = 3 - 1$; $2 = 2$; esta identidad nos informa de que $x = 4$ es solución.

1.2. Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado** es aquella que reducida tiene la forma $a\,x^2 + b\,x + c = 0$; donde a, b y c son números reales llamados coeficientes de la ecuación, con $a \neq 0$.

Existen varios métodos para encontrar las soluciones de la ecuación de segundo grado pero en general se aplica la fórmula siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

2. Resuelve la ecuación $2x^2 - x - 6 = 0$.

Solución:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \dfrac{1+7}{4} = 2 \\ \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

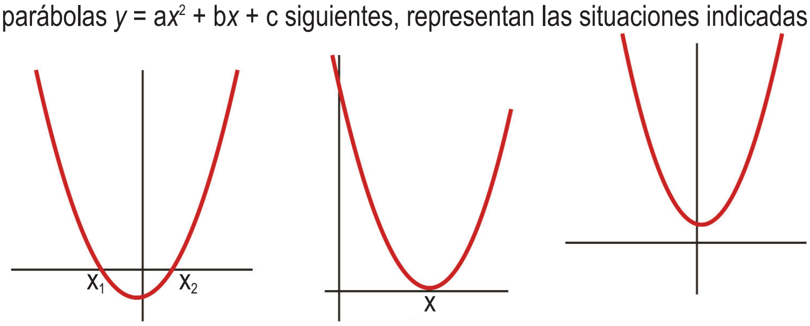
Las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -\dfrac{3}{2}$.

A partir de la fórmula y sin necesidad de resolver la ecuación de segundo grado se puede conocer el número de soluciones de la ecuación de segundo grado. Todo depende del signo de la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, llamada **discriminante de la ecuación**, que se encuentra bajo el signo radical y que puede tomar los valores siguientes:

- $b^2 - 4ac > 0$, el doble signo de la fórmula proporciona dos soluciones diferentes para la ecuación.
- $b^2 - 4ac = 0$, la raíz cuadrada de cero es cero y la ecuación tiene una solución doble.
- $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales porque la raíz cuadrada es un número imaginario.

Para saber más...

Las gráficas de las parábolas $y = ax^2 + bx + c$ siguientes, representan las situaciones indicadas anteriormente:



Dos soluciones — Una solución — No tiene soluciones reales

Actividades

1. Resuelve las ecuaciones:

a) $5 + 4x + 5(1 + 3x) = -4(3 - 2x)$; **b)** $5x - 2(x - 1) + 5(2 + 3x) = 3(x - 1)$;

c) $6(x - 10) = -3(2x - 7) - 34$; **d)** $8(6 + 2x) = 4(2 - 3x) - 72$.

2. Encuentra las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{x}{4} + 8 = \dfrac{3x-2}{8}$; **b)** $\dfrac{20-x}{8} - \dfrac{10x+3}{16} = \dfrac{10-10x}{4}$; **c)** $\dfrac{2x-3}{2} + 17 = \dfrac{4x+3}{3} + \dfrac{x+3}{6}$;

d) $\dfrac{3x+17}{8} - \dfrac{1-4x}{3} = \dfrac{1-x}{4} - \dfrac{9+x}{6}$; **e)** $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{x+1}{2}$.

3. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; **b)** $x^2 + 3x - 28 = 0$; **c)** $2x^2 + 7x = 15$; **d)** $12x^2 - 7x + 1 = 0$; **e)** $x^2 + x = 42$.

4. Resuelve y factoriza si es posible las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 4x - 12 = 0$; **b)** $3x^2 - 18x + 15 = 0$; **c)** $3x^2 - 6x + 3 = 0$; **d)** $x^2 - 5x + 9 = 0$.

5. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 4)(x - 2) = 0$; **b)** $(x + 3)(x - 2) = 0$; **c)** $(x - 5)(x + 6) = 0$; **d)** $(x - 7)(x + 9) = 0$.

6. Calcula las raíces de las ecuaciones:

a) $-3x + x^2 = 0$; **b)** $-5x = x^2$; **c)** $x^2 + 10 = 19$; **d)** $x^2 + 3x = 17x$.

2. Otras ecuaciones algebraicas

En este apartado estudiaremos diversos tipos de ecuaciones más complejas a las ya estudiadas, pero que se resuelven aplicando métodos algebraicos.

2. 1. Ecuaciones bicuadradas

Las ecuaciones de cuarto grado $ax^4 + bx^2 + c = 0$ con $a \neq 0$ que no tienen los grados uno y tres, se llaman **ecuaciones bicuadradas**. Se reducen a ecuaciones de segundo grado mediante el siguiente cambio de variable $x^2 = y$, ya que al sustituir en la ecuación dada se obtiene $ay^2 + by + c = 0$ (ecuación de segundo grado en la variable y).

Ejemplos

3. Resuelve la ecuación: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Solución:

Se realiza el cambio: $x^2 = y$, $x^4 = y^2$.

Se obtiene la ecuación de segundo grado: $y^2 - 10y + 9 = 0$.

Se resuelve esta ecuación en y: $y = \dfrac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2} = \dfrac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{10+8}{2} = 9 \\ \dfrac{10-8}{2} = 1 \end{cases}$.

De $y = x^2 = 9$, se obtienen las soluciones, $x = 3$ y $x = -3$.

De $y = x^2 = 1$, se obtienen las soluciones, $x = 1$ y $x = -1$.

La ecuación propuesta tiene cuatro soluciones reales.

4. Resuelve la ecuación: $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Solución:

Se realiza el cambio: $x^2 = y$, $x^4 = y^2$.

Se obtiene la ecuación de segundo grado: $y^2 + 3y - 4 = 0$.

Se resuelve esta ecuación en y: $y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1(-4)}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3+5}{2} = 1 \\ \dfrac{-3-5}{2} = -4 \end{cases}$.

De $y = x^2 = 1$, se obtienen las soluciones $x = 1$ y $x = -1$.

De $y = x^2 = -4$, no se obtienen soluciones reales para x.

La ecuación propuesta tiene dos soluciones reales.

¿Sabías que...?

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las raíces de la ecuación $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0 = 0$, entonces dicha ecuación se factoriza y puede escribirse así:

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0.$$

2. 2. Ecuaciones de grado superior a dos

Algunas **ecuaciones de grado superior al segundo** se resuelven aplicando técnicas de factorización, ya que se transforman en otras equivalentes con factores de primer y segundo grado.

Ejemplos

5. Resuelve la ecuación $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$.

Solución:

Se saca factor común x: $x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = 0$.

Se igualan a cero los dos factores: $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$.

La ecuación de segundo grado tiene por soluciones $x = 1$ y $x = -3$.

La ecuación tiene tres soluciones: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -3$.

6. Resuelve la ecuación $4x^4 - 21x^3 + 29x^2 - 6x = 0$.

Solución:

Se saca factor común x: $4x^4 - 21x^3 + 29x^2 - 6x = x(4x^3 - 21x^2 + 29x - 6) = 0$.

Se aplica la Regla de Ruffini al segundo factor:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -21 & 29 & -6 \\ 2 & & 8 & -26 & 6 \\ \hline & 4 & -13 & 3 & 0 \end{array}$$

Se descompone en factores: $x(x - 2)(4x^2 - 13x + 3) = 0$.

La ecuación de segundo grado tiene por soluciones $x = 3$ y $x = \frac{1}{4}$.

La ecuación tiene cuatro soluciones: $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = \frac{1}{4}$.

¿Sabías que...?

La comprobación de las soluciones obtenidas al resolver ciertas ecuaciones es necesaria, pues en el proceso de resolución pueden introducirse razonamientos falsos; a continuación aparece uno en el que debes intentar descubrir el fallo.

Supongamos que $a = b$.
Se suma a a los dos miembros: $2a = a + b$.
Se resta $2b$ a los dos miembros: $2a - 2b = a - b$.
Se saca factor común dos: $2(a - b) = a - b$.
Se simplifica: $2 = 1$.

2. 3. Ecuaciones racionales

Las ecuaciones en las que aparece alguna fracción algebraica se llaman **ecuaciones racionales**. Para suprimir los denominadores en estas ecuaciones se usa el mínimo común múltiplo de los denominadores; al simplificar se obtienen ecuaciones que probablemente se puedan resolver.

Como hay que multiplicar por expresiones algebraicas, pueden aparecer soluciones falsas; por tanto, se debe comprobar si las soluciones obtenidas son válidas para la ecuación propuesta.

Ejemplos

7. Resuelve la ecuación $\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x-1}=-1$.

Solución:
Para suprimir los denominadores se multiplican los dos miembros por: $(x+1)(x-1)$.
$2(x-1)-x(x+1)=-1(x-1)(x+1) \Rightarrow 2x-2-x^2-x=-x^2+1 \Rightarrow x=3$.

Comprobación: $\frac{2}{3+1}-\frac{3}{3-1}=-1 \Rightarrow \frac{2}{4}-\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow -\frac{2}{2}=-1$.

La solución x = 3 es válida.

8. Resuelve la ecuación $\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{10}$.

Solución:
Para suprimir los denominadores multiplicamos los dos miembros por: $10\cdot(x+7)\cdot(x+2)$.
$10(x+2)+10(x+7)=3(x+7)(x+2) \Rightarrow 20x+90=3x^2+27x+42 \Rightarrow 3x^2+7x-48=0$.

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2+4\cdot3\cdot48}}{6}=\frac{-7\pm\sqrt{625}}{6}=\frac{-7\pm25}{6}=\begin{cases}\frac{-7+25}{6}=3\\ \frac{-7-25}{6}=-\frac{32}{6}=-\frac{16}{3}\end{cases}.$$

Comprueba que las dos soluciones son válidas.

2. 4. Ecuaciones irracionales

Son aquellas ecuaciones en las que la variable aparece bajo el signo radical.

Estudiaremos aquellas en las que aparecen raíces cuadradas.

Para resolver las **ecuaciones irracionales** se aísla la raíz en uno de los miembros, después se elevan ambos miembros al cuadrado y se resuelven las ecuaciones obtenidas (ecuaciones de primer o segundo grado).

Al igual que en las ecuaciones racionales, se debe comprobar si las soluciones obtenidas lo son de la ecuación de partida.

Ejemplos

9. Resuelve la ecuación $\sqrt{x+3}-1=x$.

Solución :

Se aísla el radical: $\sqrt{x+3}=1+x$;

Se eleva el cuadrado: $(\sqrt{x+3})^2=(1+x)^2$;

Se desarrolla: $x+3\ =1+2x+x^2$;

Se simplifica: $x^2+x-2=0$.

Las soluciones de la ecuación de segundo grado son $x=1$ y $x=-2$.

Comprobación: $x=1$; $\sqrt{1+3}-1=1$; $1=1$, identidad $x=1$ es solución.

$x=-2$; $\sqrt{-2+3}-1=-2$; $0=-2$, falso $x=-2$ no es solución.

10. Resuelve la ecuación $\sqrt{x^2-3}+x-3=0$.

Solución :

Se aísla el radical: $\sqrt{x^2-3}=3-x$;

Se eleva al cuadrado: $\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2=(3-x)^2$;

Se desarrolla: $x^2-3=9-6x+x^2$;

Se simplificar y despeja x: $6x=12$; $x=2$.

Comprobación: $\sqrt{2^2-3}+2-3=0$; $0=0$, $x=2$ es solución.

Actividades

7. Resuelve las ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4-5x^2+4=0$; **b)** $x^4-10x^2=-9$;

c) $x^4-16x^2-225=0$; **d)** $64x^4-244x^2+225=0$.

8. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4-16=0$; **b)** $81x^4-x^2=0$; **c)** $4x^4-x^2=0$; **d)** $x^4-9x^2=0$.

9. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4-x^3-6x^2=0$; **b)** $x^3+5x^2-x-5=0$;

c) $16x^3-16x^2-9x+9=0$; **d)** $x^3-x^2-14x+24=0$.

10. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{4}{x}-\frac{2x+1}{5}=1$; **b)** $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{3x-1}=\frac{4}{(x+2)(3x-1)}$.

11. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{2}{x-4}+\frac{5}{x-3}=\frac{9}{x^2-7x+12}$; **b)** $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$; **c)** $\frac{15}{x-2}-\frac{18}{x+2}=\frac{12x+6}{2x^2-8}$; **d)** $\frac{30}{x-1}-\frac{200}{x^2+3x-4}=\frac{20}{x+4}$.

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2-5}+x-5=0$; **b)** $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=5$; **c)** $\sqrt{1+x}+\sqrt{7+x}=\sqrt{16+2x}$; **d)** $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$.

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En este apartado estudiaremos ecuaciones en las que la variable se encuentra como exponente o en una expresión afectada por un logaritmo.

3.1. Ecuaciones exponenciales

En las **ecuaciones exponenciales** la incógnita aparece como exponente.

Para la resolución de las ecuaciones exponenciales debemos expresar, si es posible, el término independiente como una potencia de la misma base que la de la incógnita. Luego se utiliza la propiedad siguiente: si $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$.

Ejemplo

11. Resuelve la ecuación $8 \cdot 2^{4x} = 2048$.

Solución:

$8 \cdot 2^{4x} = 2048 \Rightarrow 2^{4x} = 256 \Rightarrow 2^{4x} = 2^8$; por lo tanto, como la igualdad de dos potencias de la misma base obliga a que los exponentes sean iguales, tenemos que: $4x = 8 \Rightarrow x = 2$.

En otras ocasiones, para llegar a la igualdad de dos potencias de la misma base tendremos que hacer un cambio de variable. Una vez resuelta la ecuación en la nueva variable debemos deshacer el cambio para obtener las soluciones.

Ejemplo

12. Resuelve la ecuación $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$.

Solución:

La ecuación $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$, se puede expresar como:

$$4 \cdot 4^x + 2^3 \cdot 2^x - 320 = 0 \Rightarrow 4 \cdot 2^{2x} + 2^3 \cdot 2^x - 320 = 0.$$

Se hace el cambio de variable $2^x = y$, por lo que $2^{2x} = y^2$:

$$4y^2 + 8y - 320 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y - 80 = 0.$$

Ecuación de segundo grado cuyas soluciones son 8 y –10.

Deshaciendo el cambio, $2^x = 8$, luego $2^x = 2^3$ y por consiguiente $x = 3$.

No tomamos el valor –10, porque la función exponencial sólo toma valores positivos.

3.2. Ecuaciones logarítmicas

Se llaman **ecuaciones logarítmicas** a aquellas en las que la incógnita aparece bajo un logaritmo.

En la mayoría de los casos se pueden resolver sin más que emplear las propiedades de los logaritmos para obtener una igualdad del tipo $\log_a x_1 = \log_a x_2$, y de aquí deducir una igualdad $x_1 = x_2$.

Ejemplo

13. Resuelve la ecuación logarítmica $(x^2 - 5x + 9)\cdot\log 2 + \log 125 = 3$.

Solución:

$$(x^2 - 5x + 9)\cdot\log 2 + \log 125 = \log 1000 \Rightarrow \log 2^{x^2-5x+9} = \log 1000 - \log 125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 2^{x^2-5x+9} = \log\frac{1000}{125} = \log 8 \Rightarrow \log 2^{x^2-5x+9} = \log 2^3.$$

De donde obtenemos la ecuación exponencial $2^{x^2-5x+9} = 2^3$, y de aquí a la ecuación de segundo grado, $x^2 - 5x + 9 = 3$, cuyas soluciones son, $x = 2$ y $x = 3$.

Es importante comprobar los resultados obtenidos, para ver si las soluciones son válidas.

Comprobación:

Para $x = 2$: $(2^2 - 5\cdot 2 + 9)\cdot \log 2 + \log 125 = 3 \Rightarrow 3\cdot\log 2 + \log 5^3 = 3 \Rightarrow \log 2^3 + \log 5^3 = \log (2\cdot 5)^3 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 10^3 = 3 \Rightarrow 3 = 3$.

Para $x = 3$: $(3^2 - 5\cdot 3 + 9)\cdot \log 2 + \log 125 = 3 \Rightarrow 3\cdot\log 2 + \log 5^3 = 3 \Rightarrow 3 = 3$.

Las dos soluciones son válidas.

Actividades

13. Resuelve las ecuaciones:

a) $4^{3x} = 8^x + 12$; **b)** $9^x - 2\cdot 3^{x+2} + 81 = 0$;

c) $2^{-x} = 8^{3-x}$; **d)** $3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.

14. Resuelve las ecuaciones:

a) $2^{x+3} + 2^{2x+2} = 320$; **b)** $10^{3-x} = 1$; **c)** $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$.

15. Resuelve las ecuaciones:

a) $4\log\left(\frac{x}{2}\right) + 3\log\left(\frac{x}{3}\right) + \log 12 = 5\log x$; **b)** $\log(3x-1) - \log(2x+3) = 1 - \log 25$; **c)** $\log(x-2)^2 + \log(x+1)^2 = 2$;

d) $\log x = 1 + \log(22 - x)$; **e)** $(x^2 - 4x + 7)\log 5 + \log 16 = 4$; **f)** $\frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$.

4. Problemas que se resuelven mediante ecuaciones

Recuerda que para **resolver problemas** mediante ecuaciones se deben seguir los pasos siguientes:

Planteo: Consiste en traducir el enunciado escrito en una ecuación.

Resolución: Parte en la que se resuelve la ecuación.

Discusión: Se comprueba que la solución obtenida es solución de la ecuación y que cumple las condiciones impuestas en el enunciado.

Para plantear una ecuación a partir de un enunciado se debe:

- Realizar lecturas comprensivas para identificar el dato que se debe calcular y representarlo mediante una variable.
- Trazar un plan para traducir el lenguaje escrito a lenguaje algebraico. Planificar la información en resúmenes. Comparar el problema con otros conocidos.
- Llevar a cabo el plan trazado y, si éste no funciona, cambiar de plan.

Ejemplo

14. La cantidad de euros que un chico lleva en el bolsillo es tal que si gasta la tercera parte más su séptima parte, aún le quedarían 2,5 euros más la mitad de lo que llevaba. ¿Qué cantidad de euros llevaba en el bolsillo?

Solución:

Planteo:

Sea x el dinero que llevaba.

Gastos: $\frac{x}{3}+\frac{x}{7}$

Le quedan: $2{,}5+\frac{x}{2}$

Ecuación: $2{,}5+\frac{x}{2}=x-\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{7}\right)$

Resolver la ecuación: x = 105 euros.

Discusión: La solución cumple las condiciones del enunciado; veamos si cumple la ecuación:

$$2{,}5+\frac{105}{2}=105-\left(\frac{105}{3}+\frac{105}{7}\right) \Rightarrow 2{,}5 + 52{,}5 = 105 - (35 + 15) \Rightarrow 55 = 55.$$

El valor *x* = 105 convierte la ecuación en una igualdad numérica verdadera.

Actividades

16. Un ganadero vende los 3/5 de los corderos que posee. A continuación compra 50, con lo que se queda con 40 corderos menos que los que tenía al principio. ¿Cuántos tenía?

17. Un trayecto se ha realizado en tres etapas: en la primera se recorre 3/5 del trayecto, en la segunda 1/4 del resto y en la última los 12 km restantes. ¿Cuál es la longitud total del trayecto?

18. Una persona dispone de dos horas para dar un paseo en coche. ¿Qué distancia podrá recorrer sabiendo que a la ida la velocidad del coche es de 80 km/h y que, sin detenerse, regresa a 120 km/h?

19. La distancia entre dos estaciones A y B es 480 km. Un tren sale de A en dirección a B con una velocidad constante de 100 km/h. Al mismo tiempo, otro tren sale de B en dirección a A con una velocidad de 140 km/h. ¿Cuánto tardan en encontrarse? ¿A qué distancia de A y B se encuentran?

20. La base de un rectángulo es 6 cm mayor que su altura. Si la base crece 4 cm y la altura disminuye en 2 cm, el área crece 8 cm^2. Calcula sus dimensiones.

21. La suma de dos números es 24 y su producto 135. Calcula dichos números.

22. Calcula las dimensiones de un rectángulo que tiene de perímetro 24 cm y de área 35 cm^2.

23. El perímetro de un rectángulo es de 98 m. Su área es de 570 m^2. Halla sus dimensiones.

24. Los tres lados de un triángulo miden 18, 16 y 9 m. Determina qué misma cantidad se debe restar a cada lado para que resulte un triángulo rectángulo.

25. Determina un número que sumado con su raíz cuadrada es 132.

26. Dos números suman 62 y sus cuadrados 1954. Hállalos.

27. El área de un triángulo rectángulo es 60 m^2 y la suma de sus catetos es 23 m. Halla sus tres lados.

28. Un cuadrado tiene 33 m^2 más que otro y éste un metro más de lado que el primero. Halla los lados de los dos cuadrados.

Para saber más...

Descubrir que algunas soluciones numéricas no cumplen las condiciones impuestas por el enunciado de un problema es parte fundamental en la resolución de problemas. Por ejemplo, calcula la edad de un joven si hace siete años el cuadrado de su edad coincidía con la edad actual de su padre, que es de 64 años.

Llamando x a la edad actual del joven, llegamos a la ecuación $(x-7)^2 = 64 \Rightarrow x-7 = \pm 8 \Rightarrow \begin{cases} x-7=8 \Rightarrow x=15 \text{ años} \\ x-7=-8 \Rightarrow x=-1 \text{ año} \end{cases}$

Evidentemente, la solución -1 año no es válida pues no existen edades negativas; sin embargo, es solución de la ecuación planteada a partir del enunciado.

5. Sistemas de ecuaciones

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones que deben satisfacerse simultáneamente.

Los ejemplos siguientes son sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ x+y-z=4 \\ 3x-2y-2z=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x-y=-3 \\ x^2+y=5 \end{cases}$$

El primero es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (todas las incógnitas son lineales); el segundo es un sistema no lineal (algunas incógnitas no son lineales).

Se llaman **soluciones** de un sistema a los valores de las incógnitas que hacen verdaderas todas las ecuaciones que forman el sistema.

Resolver un sistema es o bien encontrar los valores de las incógnitas o variables que hacen verdaderas todas las ecuaciones del sistema o bien demostrar que no tiene solución.

En este curso estudiaremos sistemas con dos y tres incógnitas.

5.1. Métodos de resolución de sistemas

Entre los métodos algebraicos que existen para resolver sistemas se encuentran los siguientes:

- **Método de sustitución**: Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye la expresión obtenida en las otras ecuaciones.
- **Método de igualación**: Se despeja la misma incógnita en todas las ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.
- **Método de reducción**: Se multiplican las ecuaciones por números adecuados de forma que al sumar los resultados se elimina una de las incógnitas.

Con estos tres métodos y las técnicas estudiadas para resolver ecuaciones se pueden resolver muchos sistemas de ecuaciones, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

15. Resuelve el sistema lineal: $\begin{cases} 2x-3y+z=-5 \\ x+y-z=4 \\ 3x-2y-2z=1 \end{cases}$

Solución:

Se resuelve por **sustitución**.

Se despeja x en la segunda ecuación (su coeficiente es uno): $x = 4 - y + z$.

La expresión obtenida para x se sustituye en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2(4-y+z)-3y+z=-5 \\ 3(4-y+z)-2y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5y+3z=-13 \\ -5y+z=-11 \end{cases}.$$

Se consigue un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Se despeja z en la segunda ecuación: $z = -11 + 5y$.

Se sustituye z en la primera ecuación: $-5y + 3(-11 + 5y) = -13 \Rightarrow 10y = 20 \Rightarrow y = 2$.

Se sustituye este valor en la incógnita despejada z: $z = -11 + 10 = -1$.

Se sustituyen los valores obtenidos para y y z en la incógnita x despejada: $x = 4 - 2 - 1 = 1$.

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 2$ y $z = -1$.

16. Resuelve el sistema no lineal: $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y=2 \end{cases}$

Solución:

Se resuelve por **sustitución**.

Se despeja y en la ecuación lineal: $y = 2 - x$.

Se sustituye en la ecuación no lineal: $x^2 + (2 - x)^2 = 10$.

Se opera y simplifica: $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Se resuelve la ecuación: $x = \dfrac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 3}}{2} = \dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \dfrac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2}=3 \\ \dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases}$

Se sustituyen estos valores en la incógnita y despejada: para $x = 3$, $y = -1$ y para $x = -1$, $y = 3$.

El sistema tiene dos soluciones.

17. Resuelve el sistema no lineal: $\begin{cases} x+y=8 \\ y=x^2-4x-2 \end{cases}$

Solución:

Se resuelve por **igualación.**

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan, con lo que se obtiene una ecuación con una incógnita: $y = 8 - x$; $x^2 - 4x - 2 = 8 - x \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$.

Se resuelve la ecuación obtenida: $x = \dfrac{3\pm\sqrt{9+4\cdot 10}}{2} = \dfrac{3\pm\sqrt{49}}{2} = \dfrac{3\pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+7}{2}=5 \\ \dfrac{3-7}{2}=-2 \end{cases}$

Se sustituyen estos valores en una de las incógnitas despejadas: para $x = 5$, $y = 3$ y para $x = -2$, $y = 10$.

El sistema tiene dos soluciones.

18. Resuelve el sistema lineal: $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

Solución:

Se resuelve por **reducción.**

Consiste en conseguir que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos en las dos ecuaciones y a continuación sumarlas.

Se sustituye la segunda ecuación por el resultado de sumar la primera con la segunda multiplicada por –2, número con el que se consigue que las dos ecuaciones tengan los coeficientes de x iguales y opuestos:

$$\begin{array}{r} 4x+3y=\ 10 \\ -4x-2y=-8 \\ \hline 0x+\ y=\ \ 2 \end{array}$$

El sistema de partida es equivalente al **sistema escalonado:** $\begin{cases} 4x \quad +3y \quad =10 \\ \qquad\quad y \quad =2 \end{cases}$

En este sistema $y = 2$; se sustituye este valor en la primera ecuación para calcular x: $4x + 3\cdot 2 = 10$; $4x = 4$; $x = 1$. La solución del sistema es $x = 1$ e $y = 2$.

Para saber más...

Los siguientes sistemas tienen ecuaciones exponenciales o logarítmicas:

a) $\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 64 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y = 13 \\ \log x + \log y = 2\log 6 \end{cases}$

Para resolver estos sistemas manipulamos las ecuaciones para transformarlas en ecuaciones algebraicas sencillas.

a) Expresamos el sistema así: $\begin{cases} \dfrac{5^x}{5^y} = 5^4 \\ 2^x \cdot 2^y = 2^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x-y} = 5^4 \\ 2^{x+y} = 2^6 \end{cases}$

La igualdad de potencias de la misma base conduce a la igualdad de exponentes: $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=6 \end{cases}$. Este último sistema de ecuaciones tiene como solución $x = 5$ e $y = 1$.

b) Aplicando las propiedades de los logaritmos: $\begin{cases} x+y = 13 \\ \log\left(x\cdot y\right) = \log 6^2 \end{cases}$

La segunda de las ecuaciones conduce al sistema: $\begin{cases} x+y=13 \\ x \cdot y = 36 \end{cases}$

La solución de este sistema es $x = 9$ e $y = 4$.

Es importante, en la resolución de sistemas y ecuaciones logarítmicas, comprobar las soluciones negativas que aparezcan, por si resultan logaritmos de número negativo o el logaritmo de cero. Estas soluciones no serían válidas.

5.2. Clasificación de los sistemas lineales

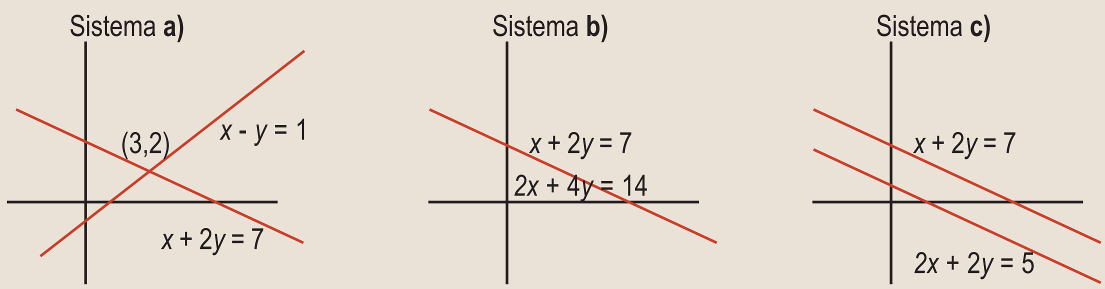
Cada ecuación $ax + by = c$ del sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas representa un recta del plano; los puntos (α, β) de dicha recta son las soluciones de su ecuación. La existencia o carencia de puntos comunes a las dos rectas que forman el sistema determina la existencia o no de solución para este tipo de sistemas. Gráficamente tenemos las siguientes situaciones:

Ejemplos

19. Resuelve gráficamente los sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y=7 \\ x-\ \ y=1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+4y=14 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$

Solución:



A partir de las gráficas vemos que:

a) Las dos recta se cortan en (3, 2): la solución del sistema es $x = 3$ e $y = 2$. **El sistema tiene solución única.**

b) Las rectas coinciden. **El sistema tiene infinitas soluciones.**

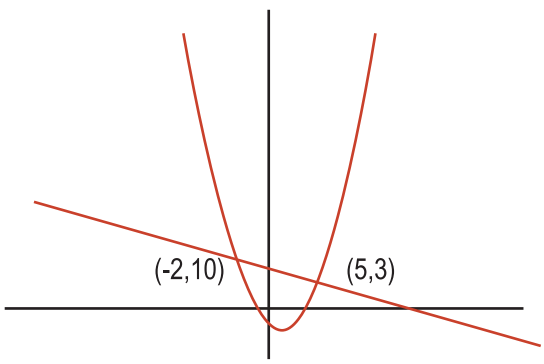
c) Las rectas son paralelas, no tienen puntos en común. **El sistema no tiene solución.**

La generalización de estos resultados permite clasificar los sistemas lineales en:

- **Incompatibles** si no tienen solución.
- **Compatibles** si tienen solución.
  - Si la solución es única se dice **compatible, determinado**.
  - Si las soluciones son infinitas se dice **compatible, indeterminado**.

¿Sabías que...?

Gráficamente también se pueden encontrar las soluciones de los sistemas no lineales. Por ejemplo, las soluciones del sistema del ejemplo 17 serán las coordenadas de los puntos de corte de la recta $x + y = 8$ con la parábola $y = x^2 - 4x - 2$; estos son (5, 3) y (–2, 10), conforme se muestra en la figura siguiente:



5.3. Método de Gauss para sistemas lineales

El **método de Gauss** es una generalización del método de reducción para resolver y discutir (saber si el sistema es o no compatible) sistemas lineales con cualquier número de ecuaciones y de incógnitas. Trataremos sistemas con tres incógnitas, aunque no necesariamente con tres ecuaciones. El sistema dado se convierte en otro **sistema escalonado equivalente** mediante trasformaciones adecuadas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Ejemplos

20. Resuelve el siguiente sistema escalonado: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ 3z = 9 \end{cases}$

Solución:

Se despeja z en la tercera ecuación: $z = \frac{9}{3} = 3$; se sustituye dicho valor en la segunda ecuación y se despeja y :

$3y - 2\cdot 3 = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$.

Finalmente se sustituyen los valores de z e y en la primera ecuación y se despeja x: $x + 2 - 3 = -1 \Rightarrow x = -1 - 2 + 3 \Rightarrow x = 0$. La solución del sistema es: $(x, y, z) = (0, 2, 3)$.

21. Transforma el sistema siguiente en un sistema equivalente escalonado, clasifícalo y resuélvelo si es posible:

$$\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{cases}$$

Solución:

Primer paso: Anular el coeficiente de x en las dos últimas ecuaciones:

✓ Se sustituye la segunda ecuación por la que resulta de sumarle la primera multiplicada por menos dos: 2ª E – 2·1ªE : $-y + 8z = -1$.

✓ Se sustituye la tercera ecuación por la que resulta de sumarle la primera multiplicada por menos 5: –5·1ªE + 3ªE : $4y + 13z = 21$.

Con lo que resulta el sistema equivalente $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 4y + 13z = 21 \end{cases}$

Segundo paso: Anular el coeficiente de y en la tercera ecuación:

Se sustituye la tercera ecuación por la que resulta de sumarle la segunda multiplicada por cuatro: 4·2ªE + 3ªE : $45z = 45$.

Con esto se ha conseguido el sistema escalonado $\begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -y + 8z = 6 \\ 45z = 45 \end{cases}$

La tercera ecuación se resuelve fácilmente y permite afirmar que el sistema es **compatible determinado**, es decir, de solución única: $z = 1$; $-y + 8 = 6 \Rightarrow y = 2$; $x - 2 - 2 = -1 \Rightarrow x = 3$. La solución es $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

El nombre de las variables del sistema no es fundamental para su resolución; por ello, podemos prescindir de dichos nombres y operar con sus coeficientes, disponiéndolos en la forma rectangular $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$, llamada **matriz ampliada asociada al sistema**. Sobre las filas de esta matriz se aplican fácilmente los pasos para transformarla en la matriz ampliada asociada al sistema escalonado equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 16 \end{pmatrix} \overset{\substack{F2'=2\cdot F1-F2 \\ F3'=-5\cdot F1+F3}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 13 & 21 \end{pmatrix} \overset{F3'=4\cdot F2+F3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 45 & 45 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ esta es la matriz asociada al sistema escalonado: $\begin{cases} x & -y & -2z & = & -1 \\ & -y & +8z & = & 6 \\ & & 45z & = & 45 \end{cases}$

Ejemplos

22. Transforma el sistema siguiente en un sistema equivalente escalonado, clasifícalo y si es posible, resuélvelo:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$$

Solución:

Utilizando la notación matricial los pasos serían: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \overset{\substack{F2'=F2-2\cdot F1 \\ F3'=F3-3\cdot F1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \overset{F3'=F3-F2}{\Rightarrow}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ sistema triangular: $\begin{cases} x & -y & +3z & = & 4 \\ & y & -7z & = & -2 \\ & & 0z & = & 0 \end{cases}$ La tercera ecuación es $0z = 0$: cualquier valor de z cumple la ecuación, por lo que tiene infinitas soluciones; se trata de un sistema **compatible indeterminado**.

El sistema que resulta es: $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ \quad y - 7z = -2 \end{cases}$ Se toma z como parámetro: $z = \lambda$ con lo que $y = -2 + 7\lambda$ y, por lo tanto,

$x = 4 + y - 3z = 4 - 2 + 7\lambda - 3\lambda = 2 + 4\lambda$. La solución es $(x, y, z) = (2 + 4\lambda, -2 + 7\lambda, \lambda)$

Se trata de un sistema **compatible indeterminado** uniparamétrico.

23. Transforma el sistema siguiente en un sistema equivalente escalonado, clasifícalo y si es posible, resuélvelo:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Solución:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{F1\leftrightarrow F3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \overset{\substack{F2'=F2-2\cdot F1 \\ F3'=F3-4\cdot F1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \overset{F3'=F3-2\cdot F2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ sistema triangular:

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 3 \\ & y & +z & = & 0 \\ & & 0z & = & -3 \end{cases}$$

La tercera ecuación $0z = -3$ no tiene solución (cualquier número multiplicado por cero es cero). El sistema es **incompatible**.

Los ejemplos anteriores permiten dar las reglas mediante las que se clasifica y se resuelve un sistema lineal usando el método de Gauss:

- Si al reducir el sistema dado a forma triangular escalonada aparece alguna ecuación del tipo $0z = b$, el sistema es **incompatible**, no tiene solución.
- Si al reducir el sistema no sucede lo anterior es **compatible**, pues tiene solución.
  - Si el número de ecuaciones no triviales (las distintas a las de la forma 0 = 0) es igual al número de incógnitas, el sistema tiene solución única (Sistema **compatible determinado)**.
  - Si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones (Sistema **compatible indeterminado**); el número de parámetros de los que dependen las soluciones es igual al número de incógnitas menos el de ecuaciones.

Ejemplos

24. Discute y resuelve en su caso el sistema siguiente: $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ -x+y-2z=1 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{F2'=F2+F1 \\ F3'=F3-2\cdot F1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \overset{F3'=F3+F2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sistema triangular:}$$

$$\begin{cases} x & -2y & +z & = & 3 \\ & -y & -z & = & 4 \\ & & -2z & = & 0 \end{cases}$$

La tercera ecuación tiene solución única. El sistema es **compatible determinado**. De la tercera ecuación $z = 0$; de la segunda $-y - 0 = 4 \Rightarrow y = -4$; de la primera $x + 2\cdot 4 + 0 = 3$; $x = -5$. La solución es (x, y, z) = (–5, –4, 0).

25. Discute y resuelve en su caso el sistema siguiente: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+3y-2z=0 \end{cases}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{F2'=F2+F1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

. La matriz escalonada es: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4y-z=0 \end{cases}$

En la segunda ecuación conviene despejar z (su coeficiente es menos uno); la variable y es el parámetro. El sistema es **compatible indeterminado**.

En la segunda ecuación se hace $y = \lambda$: $4\lambda - z = 0 \Rightarrow z = 4\lambda$.

De la primera: $x + \lambda + 4\lambda = 0 \Rightarrow x = -5\lambda$. La solución es $(x, y, z) = (-5\lambda, \lambda, 4\lambda)$.

Actividades

29. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+2y=14 \\ 5x-4y=5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x+7y=1 \\ x+y=-2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 3x-2y=16 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

30. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}+\dfrac{4y}{5}=21 \\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{5}=17 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}-\dfrac{2y}{3}=1 \\ \dfrac{5x}{2}-\dfrac{4y}{3}=14 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{8}{15} \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x+4}{y+4}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

31. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4} \\ x^2-y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x^2-y^2=48 \\ x+y=12 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x^2+y^2=68 \\ 2xy=32 \end{cases}$

32. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2^{2x}+2^{2y}=85 \\ 4^{x+y}=324 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2^{x+1}+2^{y+1}=12 \\ 2^{x-1}-2^{y-1}=1 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2\log x-3\log y=7 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2^{x+1}=128 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$

33. Resuelve gráficamente y clasifica los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 4x-y=5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 8x-2y=-2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 8x-2y=10 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

34. Indica de qué tipo es cada uno de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x-y+3z=5 \\ -4x+8y+2z=6 \\ -7x+8y+3z=4 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x-4y-5z=8 \\ x+y-2z=4 \\ 4x-2y-9z=16 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x-6y+8z=3 \\ 4x-y+2z=15 \\ 5x-7y+10z=8 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+3y-4z=5 \end{cases}$

35. Estudia y resuelve en su caso los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-y=1 \\ -y-z=-1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 3x+y-4z=5 \\ 2x+3y+5z=-2 \\ 3x+2y+4z=-2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+3y+5z=2 \\ x+3y+3z=0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ 4x-6y+2z=10 \end{cases}$

36. Estudia y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ 2x-y=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+2y-5z=0 \\ 2x+y-4z=0 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 3x+y-5z=0 \end{cases}$

Para saber más...

Sistemas **homogéneos** son aquellos cuyos términos independientes son todos cero.

La expresión de un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas es: $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases}$ Todos los sistemas homogéneos son compatibles, al menos tienen la llamada solución impropia o trivial: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

6. Problemas que se resuelven mediante sistemas

El lenguaje algebraico es una potente herramienta para **resolver problemas**; en este apartado trataremos la resolución de problemas que precisan de los sistemas estudiados.

Los pasos a seguir para resolverlos son los indicados en el apartado **4** de esta Unidad.

Ejemplos

26. Una multinacional tiene delegaciones en Madrid, Barcelona y Valencia. El número total de altos ejecutivos de las tres delegaciones asciende a 31. Para que el número de altos ejecutivos de la delegación de Barcelona fuese igual al de Madrid tendrían que trasladarse 3 de Madrid a Barcelona. Además, el número de los de Madrid excede en uno a la suma de los destinados en las otras dos ciudades. ¿Cuántos altos ejecutivos están destinados en cada ciudad?

Solución:

Sean x, y, z los altos ejecutivos de Madrid, Barcelona y Valencia, respectivamente.

$$\begin{cases} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x-1=y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=31 \\ x-y \quad\;\; =6 \\ x-y-z=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz asociada}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & -2 & -2 & -30 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & -25 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sistema triangular}}$$

$$\begin{cases} x+y+z= 31 \\ -2y-z=-25 \\ -z= -5 \end{cases}$$. La solución será: $z = 5$; $-2y -5 = -25 \Rightarrow -2y = -20 \Rightarrow y = 10$; $x + 10 + 5 = 31 \Rightarrow x = 16$. Los ejecutivos de la multinacional serán: 16 en Madrid; 10 en Barcelona y 5 en Valencia.

27. Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C. Si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial; si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros. Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

Solución:

Sean x, y, z, respectivamente, los precios de los productos A, B y C antes de la oferta.

$$\begin{cases} x+y+z=135 \\ 0,96x+0,94\cdot2y+0,95\cdot3z=(135+y+2z)-16 \\ 0,92\cdot3x+0,90y+0,94\cdot5z=(135+2x+4z)-29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=135 \\ 0,96x+0,88y+0,85z=119 \\ 0,76x+0,90y+0,70z=106 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\;y+\;z=135 \\ 96x+88y+85z=11900 \\ 76x+90y+70z=10600 \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz asociada}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 96 & 88 & 85 & 11900 \\ 76 & 90 & 70 & 10600 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{matriz triangular}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & -8 & -11 & -1060 \\ 0 & 0 & -202 & -12120 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sistema triangular}} \begin{cases} x+y+z=135 \\ -8y-11z=-1060 \\ -202z=-12120 \end{cases}$$. La solución es: $z=\dfrac{-12120}{-202}=60$;

$-8y-11\cdot60=-1060 \Rightarrow -8y=-400 \Rightarrow y=\dfrac{-400}{-8}=50$; $x + 50 + 60 = 135 \Rightarrow x = 135 - 110 \Rightarrow x = 25$.

Los precios iniciales serán: A = 25 euros; B = 50 euros y C = 60 euros.

28. Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264.000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del valor del dinero en euros. Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

Solución:

Sean x, y, z respectivamente los euros, dólares y libras esterlinas el dinero del que la empresa desea disponer.

$$\begin{cases} x+1{,}1y+1{,}5z=264000 \\ x=2(1{,}1y) \\ \dfrac{x}{10}=1{,}5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+11y+15z=2640000 \\ 10x-22y=0 \\ x-15z=0 \end{cases};$$

Se resuelve el sistema planteado por el método más sencillo:

$$\xRightarrow{E1'=E1+E3} \begin{cases} 11x+11y=2640000 \\ 10x-22y=0 \end{cases} \xRightarrow{2\cdot E1+E2} 32x=5280000 \Rightarrow x=\frac{5280000}{32}=165000;\ y=\frac{10x}{22}=\frac{1650000}{22}=75000;$$

$z=\dfrac{x}{15}=\dfrac{165000}{15}=11000$. La empresa dispone de 165.000 euros, 75.000 dólares y 11.000 libras esterlinas.

Actividades

37. Para distribuir un lote de objetos, se da igual número de ellos a cada una de las 15 personas presentes; pero llega una persona más y hay que dar a cada una un objeto menos, sobrando ahora 11 objetos. Calcula los objetos del lote y los que corresponden a cada persona de las presentes al final.

38. Dos grifos tardan en llenar un recipiente sin desagüe 27 y 54 horas respectivamente. ¿Cuánto tardarán los dos grifos juntos?

39. Se desea cercar un campo rectangular con 1 200 m de alambrada. Un río corre a lo largo de un lado del campo y no es necesario vallarlo. Sabiendo que el área del campo es de 160 000 metros cuadrados. ¿Qué dimensiones tiene el campo?

40. Encontrar tres números A, B y C, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

41. La suma de las tres cifras de un número es 18, siendo la cifra de las decenas igual a la media de las otras dos. Si se cambia la cifra de las unidades por la de las centenas, el número aumenta en 198 unidades. Calcula dicho número.

42. Un individuo realiza fotografías con una cámara digital. Cada fotografía de calidad normal ocupa 0,20 megabytes de memoria; cada fotografía de calidad óptima ocupa una cantidad A de megabytes, que el individuo no conoce. Esta semana ha llevado a revelar 24 fotografías que le han ocupado un total de 9,2 megabytes de memoria.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de A) donde las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que ha realizado. Estudia la compatibilidad del sistema.

b) ¿Hay alguna cantidad de megabytes que es imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?

c) La semana pasada también hizo 24 fotos y ocupó 9,2 megabytes de memoria en total. ¿Es posible que el número de fotos de cada tipo fuera diferente al de esta semana?

43. Las edades de tres vecinos suman 54 años y son proporcionales a 2, 3 y 4. Halla la edad de cada uno de ellos.

44. Juan, Pedro y Luis corren a la vez en un circuito. Por cada kilómetro que recorre Juan, Pedro recorre 2 kilómetros y Luis recorre tres cuartas partes de lo que recorre Pedro. Al final, la suma de las distancias recorridas por los tres fue de 45 kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrió cada uno?

45. Juana y Mercedes tenían 20 000 € cada una para invertir. Cada una de ellas distribuye su dinero de la misma forma en tres partes *P*, *Q* y *R* y las ingresan en una entidad financiera. Al cabo de un año, a Juana le han dado un 4% de interés por la parte *P*, un 5% por la parte *Q* y un 4% por la parte *R* y a Mercedes le han dado un 5% por la parte *P*, un 6% por la parte *Q* y un 4% por la parte *R*. Juana ha recibido en total 850 € de intereses, mientras que Mercedes ha recibido 950 €. ¿De qué cantidad de euros constaba cada una de las partes *P*, *Q* y *R*?

46. La suma de las edades de 3 hermanos, de edades diferentes, es de 37 años. La suma de la edad del mayor más el doble de la edad del mediano más el triple de la edad del menor es de 69 años.

a) Expresa las edades de los tres hermanos en función de la edad del menor.

b) ¿Es posible que el hermano menor tenga 5 años? ¿Y 12 años? Razona la respuesta.

c) Calcula las edades de los tres hermanos.

47. Una fábrica de helados elabora tres tipos de helados, H_1, H_2 y H_3, a partir de tres ingredientes *A*, *B* y *C*. Se desea saber el precio unitario de cada ingrediente sabiendo que el helado H_1 se elabora con 2 unidades de *A*, 1 unidad de *B* y 1 unidad de *C* y supone un coste de 0,9 euros. El helado H_2 se elabora con 1 unidad de *A*, 2 unidades de *B* y 1 unidad de *C* y supone un coste de 0,8 euros. El helado H_3 se compone de 1 unidad de *A*, 1 unidad de *B* y 2 unidades de *C* y supone un coste de 0,7 euros.

7. Inecuaciones

Las relaciones numéricas o algebraicas separadas por los signos < (menor), ≤ (menor o igual), > (mayor), ≥ (mayor o igual) se llaman desigualdades. De toda desigualdad se puede afirmar que es verdadera o falsa.

Las desigualdades en las que intervienen variables se llaman **inecuaciones**; por ejemplo: $x > y$; $x \geq 18$; $4y \geq 32$.

Cada valor numérico de la variable que convierte la desigualdad en verdadera es una **solución particular de una inecuación**; por ejemplo $x = 19$ e $y = 15$ son soluciones particulares de las desigualdades anteriores.

El conjunto de todas las soluciones particulares de una inecuación forma la **solución general de la inecuación**.

Resolver una inecuación es encontrar su solución general; **comprobar** una solución particular consiste en sustituir el valor de la variable en la inecuación y ver que se establece una desigualdad numérica verdadera.

Inecuaciones equivalentes

Dos **inecuaciones** son **equivalentes** si tienen la misma solución general: las inecuaciones $x + 2 > 5$ y $x^2 + x > x^2 + 3$ son equivalentes, ambas tienen por solución los valores de x que superen a 3.

Para resolver una inecuación se transforma esta en otra equivalente, en la que sea sencillo hallar la solución, para lo que se aplican los siguientes principios de equivalencia:

- Si se suma o resta a los dos miembros de una inecuación la misma expresión algebraica, la inecuación que resulta es equivalente a la primera.

$$p(x) < q(x) \Leftrightarrow p(x) + a(x) < q(x) + a(x)$$

Por ejemplo, las inecuaciones $x^2 + 2x < 6 + x^2$ y $2x < 6$, son equivalentes: la segunda se obtiene al sumar $(-x^2)$ a los dos miembros de la inecuación; ambas tienen como solución general los número reales $x < 3$ o sea el intervalo $(-\infty, 3)$.

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un número positivo, la inecuación que resulta es equivalente a la primera.

$$\text{Si } a > 0 \text{ y } p(x) < q(x) \Leftrightarrow a\,p(x) < a\,q(x)$$

Por ejemplo, las inecuaciones $6x + 12 \geq 18$ y $x + 2 \geq 3$, son equivalentes; ambas tienen como solución los números reales $x \geq 1$ o sea el intervalo $[1, \infty)$.

- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un número negativo, la inecuación cambiada de sentido es equivalente a la primera.

$$\text{Si } a < 0 \text{ y } p(x) < q(x) \Leftrightarrow a\,p(x) > a\,q(x)$$

Por ejemplo, las inecuaciones $-3x + 9 > 3$ y $3x - 9 < -3$ son equivalentes; ambas tienen como solución general los números reales $x < 2$; o sea el intervalo $(-\infty, 2)$.

Actividades

48. Comprueba si los valores $x = 2$ y $x = 3$ son soluciones particulares de las inecuaciones siguientes:

a) $3x^2 + 7 > 12$; **b)** $(x + 3)(x - 2) \geq 0$.

49. Indica cuáles de los valores $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$ son soluciones de la inecuación $\frac{2x+3}{3x-5} \leq 2$.

50. Escribe dos inecuaciones equivalentes a las inecuaciones siguientes:

a) $3x - 12 \leq 6$; **b)** $2x + 8 > -4$; **c)** $5x + 3 < 2x - 4$.

51. Demuestra que las inecuaciones $x - \frac{5}{3}x + 8 < 2$ y $2x > 18$ son equivalentes.

52. ¿Son equivalentes las inecuaciones $3x - \frac{3}{2}x + 8 \leq 2 + \frac{1}{3}x$ y $x + 4 \leq \frac{2x}{9}$?

8. Inecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita

8.1. Inecuaciones lineales con una incógnita

Una **inecuación lineal o de primer grado con una incógnita** es toda desigualdad que simplificada equivale a $a\,x + b > 0$, con $a \neq 0$.

Evidentemente en la expresión $a\,x + b > 0$ puede aparecer cualquiera de los cuatro signos de desigualdad, $<$, $\leq$, $>$ ó $\geq$.

Solución general de una inecuación con una incógnita son los puntos de un intervalo. La solución general de una inecuación se interpreta con facilidad si se realiza una representación gráfica de la misma.

Ejemplo

29. Resuelve la inecuación $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}-1\leq\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$.

Solución :

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 12.

Se multiplican los dos miembros por 12: $12\cdot\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}-1\right)\leq 12\cdot\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}\right)$

Se quitan paréntesis y se simplifica: $3x+2x-12\leq 8x+6$

Se transponen: $3x+2x-8x\leq 12+6$

Se simplifica: $-3x\leq 18$

Se dividen los dos miembros por (-3): $x\geq\frac{18}{-3}$

Se realiza la división: $x\geq -6$

La solución general son los valores del intervalo $[-6,\ \infty)$

Solución gráfica:

8.2. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Un **sistema de inecuaciones lineales con una incógnita** es el conjunto formado por dos o más inecuaciones lineales con una incógnita. Por ejemplo: $\begin{cases} ax+b<0 \\ cx+d\geq 0 \\ ex+f\leq 0 \end{cases}$

La **solución general del sistema de inecuaciones lineales con una incógnita** la forman las soluciones comunes a todas las inecuaciones que forman el sistema, esto es, la intersección de todas las soluciones será la solución del sistema.

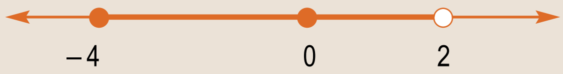
Ejemplo

30. Resuelve el sistema $\begin{cases} 3x-6<0 \\ 2x+8\geq 0 \end{cases}$

Solución :

$$\begin{cases} 3x-6<0 \\ 2x+8\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x<6 \\ 2x\geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\geq -4 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,2)\cap[-4,\infty] \Rightarrow x\in[-4,2).$$

Solución gráfica:



Algunas inecuaciones de primer grado, como las racionales, se resuelven descomponiéndolas en sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.

Ejemplo

31. Resuelve la inecuación $\dfrac{x-3}{x+2}>6.$

Solución:

Como tenemos un cociente, al trasponer al segundo miembro el denominador $x + 2$ se tiene una inecuación lineal. Como hay que tener en cuenta el signo de lo que se traspone, se presentan dos situaciones:

a) Si $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$; se mantiene el signo de la desigualdad al pasar $x + 2$ al segundo miembro.

Se traspone $x + 2 > 0$ al segundo miembro: $x - 3 > 6(x + 2)$

Se quitan paréntesis: $x - 3 > 6x + 12$

Se trasponen términos y se simplifica: $-5x > 15$

Se despeja x : $x < -3$

Esto no es posible ya que la solución obtenida $x < -3$ es incompatible con $x > -2$.

b) Si $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$; se cambia el signo de la desigualdad al pasar $x + 2$ al segundo miembro.

Se traspone $x + 2 < 0$ al segundo miembro: $x - 3 < 6(x + 2)$

Se quitan paréntesis: $x - 3 < 6x + 12$

Se trasponen términos y se simplifica: $-5x < 15$

Se despeja x: $x > -3$

Ahora las dos condiciones $x > -3$ y $x < -2$ se pueden expresar en una: $-3 < x < -2$ o bien mediante el intervalo $(-3,-2)$.

Las soluciones $x = -2$ y $x = -3$ no valen pues la primera es una división por cero y la segunda daría origen a la igualdad.

Solución gráfica:

8.3. Inecuaciones de segundo grado

Las **inecuaciones de segundo** grado con una incógnita en su forma reducida son expresiones de la forma $ax^2 + bx + c > 0$ con $a \neq 0$.

Pueden aparecer con cualquiera de los otros signos de desigualdad ($<$; $\leq$; $\geq$).

El estudio de este tipo de inecuaciones se puede realizar para $a > 0$, pues si a es menor que cero se multiplica el trinomio por –1, para estudiar dicho caso. Las soluciones de estas inecuaciones están íntimamente ligadas al número de soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Ejemplos

32. Resuelve la inecuación $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.

Solución:

Se resuelve la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Las soluciones son: $x = -2$ y $x = 4$.

Se factoriza el trinomio: $(x + 2)(x - 4) \leq 0$.

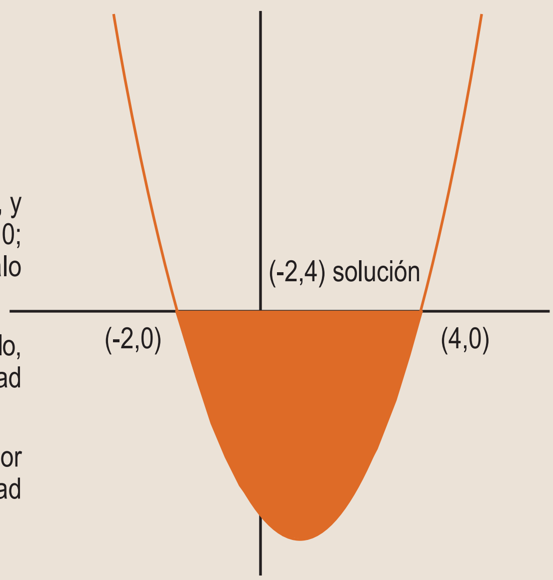
Se divide la recta en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$ y $(4, \infty)$.

Se toma un valor de x del primer intervalo, por ejemplo $x = -3$, y se sustituye en el trinomio factorizado: $(-3 + 2)(-3 - 4) = +7 > 0$; como no cumple la desigualdad propuesta, el primer intervalo no es solución.

Se repite el mismo proceso con un valor de x del segundo intervalo, por ejemplo $x = 0$, $(0 + 2)(0 - 4) = -8 < 0$ cumple la desigualdad propuesta, el intervalo $(-2, 4)$ es solución.

Se repite el proceso con un valor para x del tercer intervalo, por ejemplo $x = 5$, $(5 + 2)(5 - 4) = 7 > 0$ no cumple la desigualdad propuesta, el tercer intervalo no es solución.

La solución general será el intervalo $[-2, 4]$.



Gráficamente:

Se representa la función $y = x^2 - 2x - 8$ y sobre la gráfica la solución de la inecuación se ve con facilidad.

33. Resuelve la inecuación $x^2 - 6x + 9 \leq 0$.

Solución:

Se resuelve la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$; tiene solución única $x = 3$.

Se factoriza el trinomio $(x - 3)^2 \leq 0$.

Se divide la recta en dos intervalos $(-\infty, 3]$ y $[3, \infty)$. El único valor de x que sustituido en el binomio da cero es 3, por eso 3 es la única solución de la inecuación.

Gráficamente:

Se representa la función $y = x^2 - 6x + 9$ y sobre la gráfica la solución de la inecuación se ve con facilidad.

34. Resuelve la inecuación $x^2 - 2x + 5 \leq 0$.

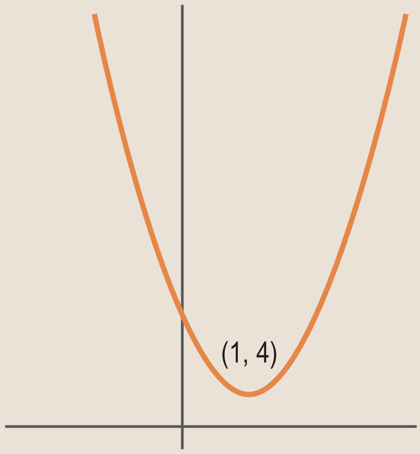
Solución:

La ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$ no tiene solución, no admite factorización y se tiene como único intervalo $(-\infty, \infty)$.

Se sustituye el valor de $x = 0$ en el trinomio y resulta $0^2 - 2 \cdot 0 + 5 = 5 > 0$, no cumple la desigualdad propuesta. La inecuación no tienen solución.

Gráficamente:

Se representa la función $y = x^2 - 2x + 5$ y sobre la gráfica se ve que la inecuación no tiene solución.



Actividades

53. Resuelve y representa las soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $\frac{3x+4}{5} > 8$; **b)** $\frac{x+3}{3} < \frac{x+1}{5}$; **c)** $\frac{x-2}{4} \geq \frac{2x-4}{3}$; **d)** $\frac{x+2}{3} \geq \frac{9+x}{24} - \frac{x+1}{4}$;

e) $\frac{x+2}{6} - \frac{x}{24} \leq \frac{x+1}{3} - \frac{x+1}{4}$; **f)** $\frac{1+x}{2} < \frac{1+3x}{5}$.

54. Resuelve y representa gráficamente las soluciones de los sistemas:

a) $\begin{cases} 2(x+1)+3 \geq (4x+1) \\ 3(x-1) \leq 2x-7 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \frac{x-2}{4} + \frac{2}{3} \leq \frac{x-1}{6} \\ \frac{x+4}{2} + \frac{1}{5} \geq \frac{x+2}{10} \end{cases}$

55. Resuelve las inecuaciones:

a) $\frac{2x-4}{3x+6} \leq 2$; **b)** $\frac{x}{x-4} \leq 5$ **c)** $4 < \frac{3x-8}{2x+8}$; **d)** $\frac{2x+8}{x} > 4$.

56. Resuelve analíticamente las inecuaciones: **a)** $x^2 - x - 6 \geq 0$; **b)** $x^2 - 4x + 4 \leq 0$; **c)** $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

57. Resuelve: **a)** $x^2 + x - 6 \leq 0$; **b)** $x^2 - 4x + 5 \geq 0$.

58. Calcula los números reales que al restarles 3 unidades a su cuádruplo sean menores que 16.

59. Mandar un paquete por una empresa de transportes cuesta 3 euros más 0,10 euros por cada 100 g; por el servicio de urgencia cuesta 4,50 euros más 0,06 euros por cada 100 g. Calcula los pesos de los paquetes que interesa enviar por urgencias.

60. Calcula los valores que puede tener m para que la ecuación de segundo grado $4x^2 - 4mx + (4m - 3) = 0$ tenga raíces reales.

Recuerda

✓ **Ecuaciones**

- Las **ecuaciones bicuadradas** son ecuaciones de cuarto grado de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ con $a \neq 0$. Se reducen a ecuaciones de segundo grado mediante el cambio de variable $x^2 = y$.
- Algunas **ecuaciones de grado superior** al segundo se resuelven si se aplican técnicas de factorización.
- Las ecuaciones en las que aparece alguna fracción algebraica las llamaremos **ecuaciones racionales**. El primer paso para resolverlas consiste en suprimir denominadores.
- Las **ecuaciones irracionales** son ecuaciones en las que la variable aparece bajo el signo radical. Para su solución se aísla la raíz en uno de los miembros y a continuación se elevan al cuadrado los dos miembros.
- En las **ecuaciones exponenciales** la incógnita aparece como exponente; para resolverlas se aplica la propiedad: $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Se llaman **ecuaciones logarítmicas** a aquellas en las que la incógnita aparece bajo un logaritmo; para resolverlas se aplica la propiedad: $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

✓ **Sistemas**

- Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones que deben satisfacerse simultáneamente. Se llaman **soluciones** de un sistema a los valores de las incógnitas que hacen verdaderas todas las ecuaciones que forman el sistema. Para resolver sistemas se utilizan los métodos de **sustitución**, **igualación** y **reducción** (**Gauss**).
- El **método de Gauss** es una generalización del método de reducción para resolver sistemas lineales de cualquier número de ecuaciones y de incógnitas.
- Un **Sistema escalonado** de tres ecuaciones es de la forma $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$
- Se llama **matriz ampliada asociada** de un sistema a la disposición rectangular de los coeficientes y de los términos independientes. Sobre esta matriz se aplican los pasos para transformarla en la matriz ampliada asociada al sistema escalonado equivalente al dado.

Discusión de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por el método de Gauss:

- Si al reducir a forma triangular aparece la ecuación $0z = b$, con $b \neq 0$, el sistema es **incompatible**.
- Si no sucede lo anterior, el sistema es **compatible**.
  - Si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas: sistema **compatible determinado**.
  - Si el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas: sistema **compatible indeterminado**.

✓ Inecuaciones

- Las desigualdades en las que intervienen variables se llaman **inecuaciones**. **Resolver** una inecuación es encontrar su solución general.
- Una **inecuación lineal o de primer grado con una incógnita** es toda desigualdad que si se simplifica resulta equivalente a la siguiente $a\,x + b > 0$, con $a \neq 0$.
- Las **inecuaciones de segundo** grado con una incógnita en su forma reducida son expresiones como $ax^2 + b\,x + c > 0$ con $a \neq 0$.

Para saber más...

Las inecuaciones también pueden resolverse usando una tabla de signo. Para su uso conviene distinguir entre inecuaciones sin denominador (inecuaciones polinómicas) e inecuaciones con denominador (inecuaciones con fracciones algebraicas).

✓ Inecuaciones polinómicas: se plantea y se resuelve la ecuación (cambiar la desigualdad por $p(x) = 0$). Se trocea la recta real en intervalos usando las soluciones de dicha ecuación:$(-\infty,x_1),(x_1,x_2)...(x_n,\infty)$. Estos intervalos se disponen en la primera fila de la tabla. En la primera celda de la segunda fila se escribe *sgn p*(x) y en las restantes celdas se escribe el signo que le corresponde al polinomio en cada uno de los intervalos que aparecen. Conviene mirar el signo del polinomio en su descomposición factorial, pues entonces únicamente hay que averiguar el signo de cada factor y multiplicar dichos signos. La respuesta a la inecuación se hace a la vista de la tabla. Como ejemplo resolvamos la inecuación $x^3 - x^2 - 2x \leq 0$.

Resolvemos la ecuación: $x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 2 \Rightarrow p(x) = x\,(x + 1)(x - 2)$.

Descomponemos R en intervalos: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$.

Construimos la tabla de signo (para ver el signo se toma un número de cada uno de los intervalos. Pueden ser, por ejemplo, –2; –0,5; 1 y 3):

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
sgn p(x)	$-\cdot(-)\cdot(-)= -$	$-\cdot+\cdot(-)= +$	$+\cdot+\cdot(-)= -$	$+\cdot+\cdot+= +$

Respondemos a la pregunta:$x^3 - x^2 - 2x \leq 0$ cuando $x\in(-\infty,-1]\cup[0,2]$. Dado que los valores –1, 0 y 2 anulan al polinomio, entran en la solución.

✓ Inecuaciones con fracciones algebraicas: se igualan a cero numerador y denominador por separado y se resuelven las ecuaciones $NUM = 0$ y $DEN = 0$.Se trocea la recta real usando todas las soluciones obtenidas. Se construye la tabla de signo y se responde a la pregunta. Hay que tener cuidado con los números que anulan al denominador, pues nunca podrán formar parte de la solución. Como ejemplo resolvamos la inecuación $\frac{2x+3}{3x-5} \leq 2$.

$$\frac{2x+3}{3x-5} \leq 2 \Rightarrow \frac{2x+3}{3x-5} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{13-4x}{3x-5} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow 13-4x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{13}{4} \\ DEN = 0 \Rightarrow 3x-5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

La tabla de signo es:

	$\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3},\frac{13}{4}\right)$	$\left(\frac{13}{4},\infty\right)$
sgn f(x)	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{+} = -$

El número $\frac{5}{3}$ anula al numerador, luego entra en la solución, mientras que $\frac{13}{4}$ anula al denominador, por lo que no forma parte de la solución. Por lo tanto, $\frac{2x+3}{3x-5} \leq 2$ si $x \in \left(-\infty,\frac{5}{3}\right] \cup \left(\frac{13}{4},\infty\right)$.