2 Sucesiones

Tratamos con sucesiones desde bien temprano en nuestros estudios escolares: en Primaria tenemos que continuar series, como se las llama a esos niveles, y en Secundaria Obligatoria trabajamos con las progresiones aritméticas y geométricas, dos de los tipos más sencillos de sucesiones. En estos casos tratamos de averiguar la relación que hay entre los elementos para hallar el término general de la sucesión o para encontrar una relación de recurrencia.

Sin embargo, ahora estamos interesados en otras propiedades de las sucesiones. En concreto, y dado que son colecciones de infinitos números, queremos saber si la sucesión se aproxima a un número o si, por el contrario, su valor aumenta o disminuye indefinidamente. De lo que se trata es de aprender a manejar el infinito. Este problema lo resolveremos calculando el límite de una sucesión.

John Napier (Wikimedia Commons)

En el campo de las sucesiones aparece el número *e,* que es el número más importante en Matemáticas y Ciencias. Parece que fue John Napier (1550 -1617) quien lo mencionó por primera vez en sus tablas de logaritmos, aunque el nombre se lo debemos a Leonhard Euler. En la **Unidad 8** veremos algunos de sus usos ya que es la base de la función exponencial.

Aprovechando la aparición de *e* repasamos los logaritmos, tanto decimales como neperianos o naturales. Los neperianos (en honor a Napier) tienen como base al número *e*. Insistiremos en una técnica muy útil que nos permite *bajar* los exponentes para realizar diferentes operaciones: tomar logaritmos.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Conocer y entender el concepto de sucesión.

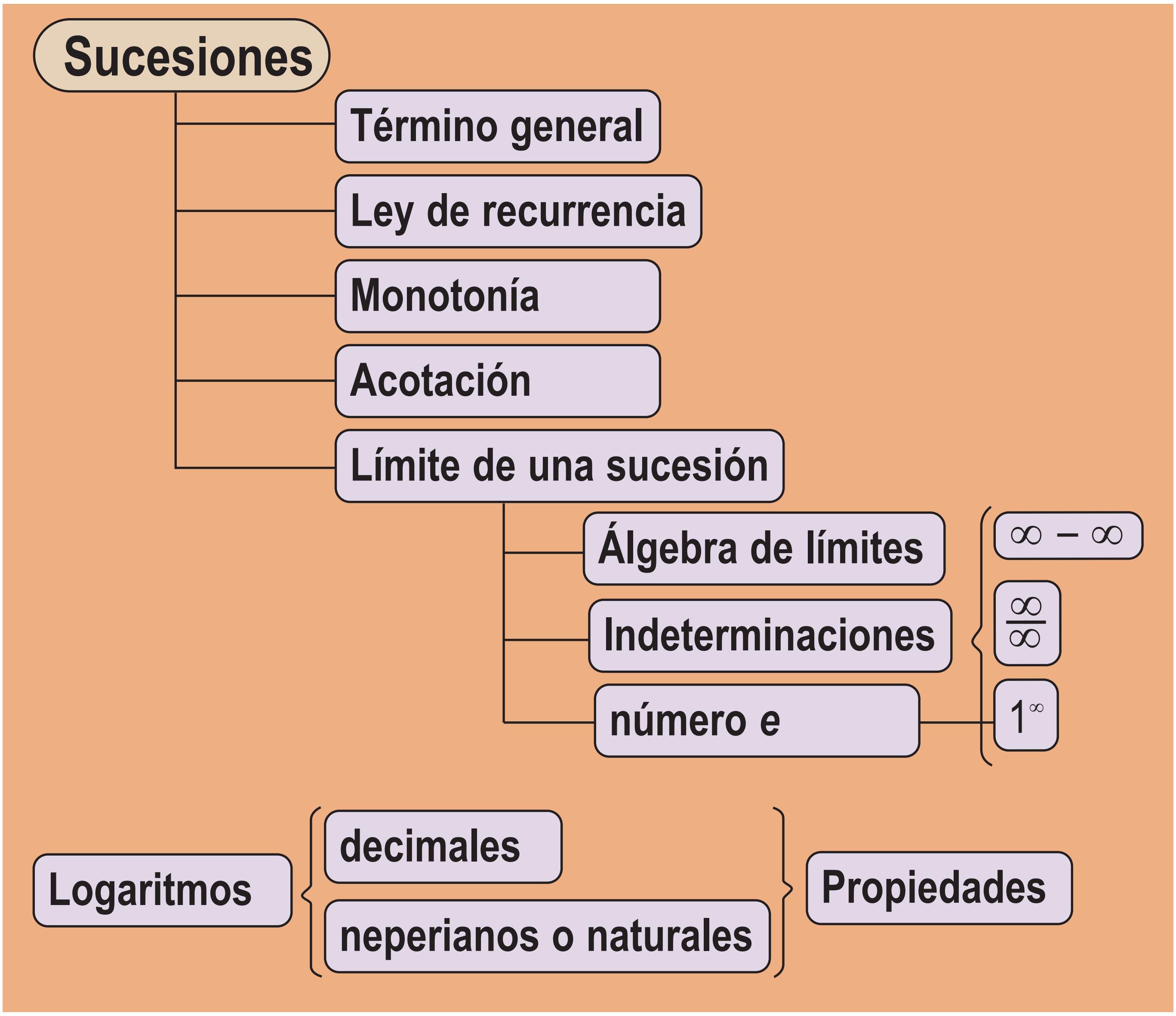
2. Clasificar las sucesiones de acuerdo a su monotonía y acotación.

3. Conocer y entender el concepto de límite de una sucesión.

4. Dominar el cálculo de límites de sucesiones, incluidas las indeterminaciones.

5. Conocer, entender y manejar el número *e* y su uso en la resolución de indeterminaciones.

6. Conocer, entender y manejar la definición de logaritmo, así como saber usar sus propiedades.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Concepto de sucesión

Podemos decir que una **sucesión** es una colección ordenada de números que están relacionados entre sí.

Por ejemplo, la colección {2, 4, 6, 8...} representa a los números pares y la colección {2, 4, 8, 16...} representa a las potencias del 2. La primera colección es una **progresión aritmética**, en donde cada término se obtiene sumando un término fijo (llamado *diferencia*) al término anterior. La segunda es una **progresión geométrica**, pues cada término se obtiene multiplicando el anterior por un término fijo (llamado *razón*). La notación habitual es la siguiente:

- El primer término es a_1, el segundo a_2 y así sucesivamente. La sucesión está compuesta por infinitos términos (tantos como números naturales hay).
- a_n designa al término general de la sucesión, que normalmente viene dado por una fórmula ($a_n = 2n$, que son los números pares, ó $a_n = 2^n$, que son las potencias del 2). El término general también puede venir dado por una *ley de recurrencia*, en cuyo caso hay que conocer el valor de, al menos, dos términos de la sucesión para poder escribir el resto de términos: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ (sucesión de Fibonacci).

Formalizando estas ideas básicas podemos decir que una sucesión es una aplicación que transforma números naturales en números reales:

$$a : N \to R$$
$$n \mapsto a(n) = a_n$$

Así, la diferencia entre una sucesión y una función es que la sucesión toma números naturales (1, 2, 3…) y la función números reales. Se podría usar la notación $a(n)$, equivalente a $f(x)$, pero se suele preferir la de a_n.

Como ya hemos visto, hay dos notaciones para referirnos a una sucesión:

- $a_n = 5n \Rightarrow a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 15\ldots.$
- $\{a_n\} = \{5n\} = \{5, 10, 15\ldots\}.$

1.1. Algunas sucesiones importantes. Monotonía. Acotación

Las sucesiones que se estudian en primer lugar son las progresiones aritméticas, pues son las más sencillas de aprender y manejar. Como $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \ldots \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$. Además son fáciles de sumar: se verifica que $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots \Rightarrow S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

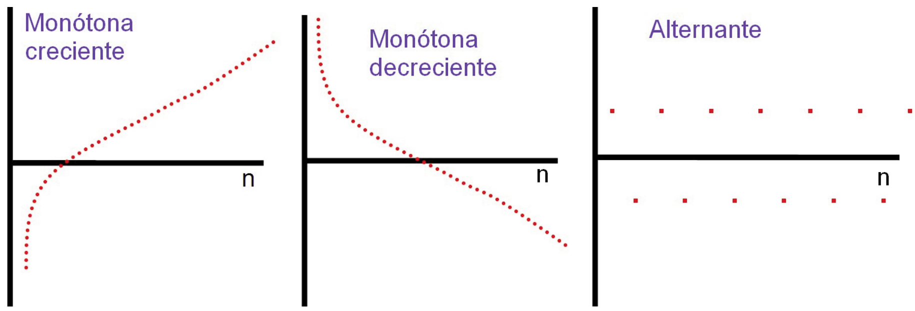
Las progresiones geométricas suponen un paso adelante en complejidad. Ahora $a_2 = a_1 \cdot r, a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \ldots \Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. Para hallar la fórmula de la suma a $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ se le resta $r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_2 \cdot r + \ldots + a_n \cdot r = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}$. Después de sacar factor común se obtiene $S_n = \dfrac{a_1 - a_{n+1}}{1-r} = \dfrac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$. Un caso muy importante es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuya razón r verifica que $0 < r < 1$: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r}$.

La suma del resto de sucesiones no es tan sencilla como en estos dos casos y su resolución conduce a las series, definidas como $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ó $S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, que escapan del nivel de este curso.

Las sucesiones definidas a través de leyes de recurrencia, como la de Fibonacci $\{1, 1, 2, 3, 5, 8\ldots\}$, son de difícil manejo: si queremos calcular el decimoquinto término de la sucesión de Fibonacci, hay que calcular los 14 anteriores. Sin embargo, en las sucesiones definidas por una fórmula, como $a_n = n^2 + 1$, el término decimoquinto puede calcularse directamente: $a_{15} = 15^2 + 1 = 226$.

Se dice que una **sucesión** es **monótona creciente** cuando $a_{n+1} > a_n$ (los términos van aumentando de valor) y que es **monótona decreciente** cuando $a_{n+1} < a_n$ (los términos van disminuyendo de valor).

No todas las sucesiones son monótonas. Por ejemplo, $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1\ldots\}$, que es el prototipo de **sucesión alternante**, no es monótona.



Observa que para representar una sucesión sólo necesitamos la parte positiva del eje horizontal (los números naturales son positivos). Además, no obtendremos líneas continuas sino puntos, pues hay un salto de un número natural a otro.

Los criterios que se usan para saber si una sucesión a_n es creciente o decreciente no son exactamente los dichos: es obvio que a_n es creciente cuando $a_{n+1} - a_n > 0$ o, si $a_n > 0$, cuando $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ y decreciente si $a_{n+1} - a_n < 0$ ó, si $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Estos criterios no se pueden aplicar a las sucesiones alternantes, porque dichas sucesiones no son monótonas, y se obtienen resultados contradictorios.

Otro concepto importante es el de **cota**.

Se dice que un número real M es una **cota superior** de una sucesión a_n cuando $M \geq a_n, \forall n \in N$, es decir, cuando M es mayor o igual que todos los términos de la sucesión (por eso hay que añadir el para todo ($\forall$) n que pertenece ($\in$) a los números naturales).

Por ejemplo, 1 y todos los números mayores que 1 son cota superior de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ldots\right\}$. El 1 sería el supremo o extremo superior, porque es la más pequeña de todas las cotas superiores, y también máximo, pues pertenece a la sucesión. Cuando una sucesión tiene cota superior se dice que está acotada superiormente.

Un número real L es una **cota inferior** de una sucesión a_n cuando $L \leq a_n$, $\forall n \in N$, es decir, cuando L es menor o igual que todos los términos de la sucesión.

Siguiendo con el ejemplo anterior, 0 y todos los números menores que 0 son cota inferior de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\ldots\right\}$. 0 sería el ínfimo o extremo inferior, porque es la mayor de las cotas inferiores, pero no es el mínimo, pues no pertenece a la sucesión. En concreto esta sucesión no tiene mínimo. Si una sucesión tiene cota inferior, está acotada inferiormente y si tiene cota superior e inferior, se dice que está acotada.

Ejemplos

1. Escribe los 4 primeros términos de las sucesiones (hasta el 6º para el apartado **d**) siguientes:

a) $a_n=\frac{2n-1}{n^2}$; **b)** $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$; **c)** $c_n=\sqrt{n^2+n-1}$; **d)** $d_n=d_{n-1}^2-2d_{n-2}, d_1=2, d_2=1$.

Solución :

a) $a_1=\frac{2-1}{1}=1, a_2=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}, a_3=\frac{6-1}{9}=\frac{5}{9}, a_4=\frac{8-1}{16}=\frac{7}{16}$.

b) $b_1=\frac{(-1)^1}{1}=-1, b_2=\frac{(-1)^2}{2}=\frac{1}{2}, b_3=\frac{(-1)^3}{3}=\frac{-1}{3}, b_4=\frac{(-1)^4}{4}=\frac{1}{4}$.

c) $c_1=\sqrt{1^2+1-1}=1, c_2=\sqrt{2^2+2-1}=\sqrt{5}, c_3=\sqrt{3^2+3-1}=\sqrt{11}, c_4=\sqrt{19}$.

d) $d_3=d_2^2-2d_1=1^2-2\cdot 2=-3, d_4=d_3^2-2d_2=(-3)^2-2\cdot 1=7, d_5=d_4^2-2d_3=7^2-2\cdot(-3)=55, d_6=d_5^2-2d_4=55^2-2\cdot 7=3011$.

2. Halla el término general de las sucesiones:

a) $\{-2,1,4,7,10\ldots\}$; **b)** $\left\{3,2,\frac{4}{3},\frac{8}{9},\frac{16}{27}\ldots\right\}$; **c)** $\{-1,2,7,14,23\ldots\}$.

Solución :

a) $a_2-a_1=1-(-2)=3; a_3-a_2=4-1=3; a_4-a_3=7-4=3\ldots\Rightarrow$ es una progresión aritmética de diferencia $d=3\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d=-2+3(n-1)\Rightarrow a_n=3n-5$.

b) $\frac{b_2}{b_1}=\frac{2}{3}; \frac{b_3}{b_2}=\frac{4/3}{2}=\frac{2}{3}; \frac{b_4}{b_3}=\frac{8/9}{4/3}=\frac{2}{3}\ldots\Rightarrow$ es una progresión geométrica de razón $r=\frac{2}{3}\Rightarrow b_n=b_1r^{n-1}=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{2^{n-1}}{3^{n-2}}$.

c) $c_2-c_1=2-(-1)=3; c_3-c_2=7-2=5; c_4-c_3=17-7=7; c_5-c_4=23-14=9$. Las diferencias verifican:

$d_2-d_1=5-3=2; d_3-d_2=7-5=2; d_4-d_3=9-7=2\Rightarrow$ forman una progresión aritmética de diferencia $d=2$ y $d_1=3$,

cuyo término general es: $d_n=d_1+(n-1)d=3+2(n-1)=2n+1$. La sucesión c_n verifica entonces que $c_2=c_1+d_1$;

$c_3=c_2+d_2=c_1+d_1+d_2; c_4=c_3+d_3=c_1+d_1+d_2+d_3\Rightarrow c_n=c_1+d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}=c_1+S_{n-1}=c_1+\frac{d_1+d_{n-1}}{2}(n-1)=$

$=-1+\frac{3+2n-1}{2}(n-1)\Rightarrow c_n=-1+\frac{2(n+1)}{2}(n-1)=-1+n^2-1\Rightarrow c_n=n^2-2$.

Las sucesiones cuyas diferencias forman una progresión aritmética son de la forma $a_n = an^2 + bn + c$ (polinomios de 2º grado en n), por lo que a veces se plantea un sistema de ecuaciones para hallar los coeficientes a, b y c usando 3 términos de la sucesión.

Es fácil comprobar que el término general es correcto: no hay más que calcular los términos conocidos mediante el término general (comprueba estas tres sucesiones).

3. Halla el término general de las sucesiones:

a) $\left\{\frac{4}{5},\frac{8}{2},-\frac{12}{1},-\frac{16}{4},-\frac{20}{7}\ldots\right\}$; **b)** $\left\{\frac{1}{2},\frac{7}{4},\frac{17}{12},\frac{31}{48},\frac{49}{240}\ldots\right\}$; **c)** $\left\{\frac{4}{3},-\frac{8}{9},\frac{16}{27},-\frac{32}{81},\frac{64}{243}\ldots\right\}$.

Solución :

a) $a_2-a_1=\frac{8}{2}-\frac{4}{5}=\frac{16}{5};\, a_3-a_2=-12-4=-16\Rightarrow$ No es una progresión arimética.

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{4/5}=5;\, \frac{a_3}{a_2}=\frac{-12}{4}=-3\Rightarrow$ No es una progresión geométrica. Consideramos por separado numerador y denominador.

El signo negativo se lo adjudicamos al denominador, pues parece que el numerador crece y el denominador decrece:

$NUM:\{4,8,12,16,20\ldots\}\Rightarrow$ progresión aritmética: $d=4\Rightarrow a_n=4+4(n-1)=4n$.

$DEN:\{5,2,-1,-4,-7\ldots\}\Rightarrow$ progresión aritmética: $d=-3\Rightarrow b_n=5-3(n-1)=8-3n$.

El término general es $a_n=\frac{4n}{8-3n}$.

b) Como antes se comprobaría que ni es una progresión aritmética ni geométrica. Separamos numerador y denominador:

$NUM:\{1,7,17,31,49\}\Rightarrow a_2-a_1=6;\, a_3-a_2=10;\, a_4-a_3=14;\, a_5-a_4=18\Rightarrow d_2-d_1=4;\, d_3-d_2=4;\, d_4-d_3=4\Rightarrow$

$\Rightarrow a_n=an^2+bn+c$.

Las ecuaciones que usamos para averiguar los coeficientes a, b y c son:

$$\left.\begin{array}{l}a_1=a+b+c=1\\ a_2=4a+2b+c=7\\ a_3=9a+3b+c=17\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(E2)-(E1)\Rightarrow 3a+b=6\\ (E3)-(E2)\Rightarrow 5a+b=10\end{array}\right\}(E2)-(E1)\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2; b=0; c=-1\Rightarrow a_n=2n^2-1.$$

$DEN:\{2,4,12,48,240\ldots\}\Rightarrow\frac{a_2}{a_1}=2;\,\frac{a_3}{a_2}=3;\,\frac{a_4}{a_3}=4;\,\frac{a_5}{a_4}=5\ldots\Rightarrow a_2=a_1\cdot 2;\, a_3=a_2\cdot 3=a_1\cdot 2\cdot 3;\, a_4=a_3\cdot 4=a_1\cdot 2\cdot 3\cdot 4;\, a_5=a_4\cdot 5=$

$=a_1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots\Rightarrow a_n=a_1\cdot n!=2\cdot n!$.

El término general es $b_n=\frac{2n^2-1}{2\cdot n!}$.

c) Se ve que los numeradores son potencias del 2 (empezando por 2^2) y los denominadores potencias del 3. El cambio de signo se consigue bien con $(-1)^n$ o con $(-1)^{n+1}$. Como a_1 es positivo, el signo viene dado por $(-1)^{n+1}$. El término general es

$c_n=(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}}{3^n}$.

4. Halla el término general de las sucesiones:

a) $\frac{1+3+5+7+\ldots+2n-1}{6n^2}$; **b)** $\left\{\frac{1}{2\cdot 3},\frac{2}{3\cdot 4},\frac{3}{4\cdot 5},\frac{4}{5\cdot 6}\ldots\right\}$; **c)** $\left\{x,-\frac{x^2}{3},\frac{x^3}{9},-\frac{x^4}{27}\ldots\right\}$.

Solución :

a) $NUM:S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2$ (se trata de la suma de los n primeros números impares) $\Rightarrow a_n=\frac{n^2}{6n^2}=\frac{1}{6}$.

El resultado parece extraño, pero observa que $a_1=\frac{1}{6};\, a_2=\frac{1+3}{6\cdot 2^2}=\frac{1}{6};\, a_3=\frac{1+3+5}{6\cdot 3^2}=\frac{1}{6}\ldots$

b) $NUM: n; DEN: (n+1)(n+2) \Rightarrow b_n = \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$.

c) $\dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{-x^2/3}{x} = -\dfrac{x}{3}; \dfrac{c_3}{c_2} = \dfrac{x^3/9}{-x^2/3} = -\dfrac{x}{3}; \dfrac{c_4}{c_3} = \dfrac{-x^4/27}{x^3/9} = -\dfrac{x}{3} \ldots \Rightarrow$ es una progresión geométrica de razón $r = -\dfrac{x}{3}$,

$c_1 = x \Rightarrow c_n = c_1 r^{n-1} = x\left(-\dfrac{x}{3}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{3^{n-1}}$.

5. Indica si son crecientes o decrecientes las siguientes sucesiones:

a) $a_n = n^2 + 1$; **b)** $b_n = \dfrac{n}{n+1}$; **c)** $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

Solución :

a) $a_{n+1} = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = n^2 + 2n + 2 - (n^2+1) = 2n+1 > 0, \forall n \in N$, luego la sucesión es creciente.

b) como $b_n > 0$ podemos aplicar el criterio para $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$:

$$b_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1, \forall n \in N \Rightarrow \text{la sucesión } b_n = \frac{n}{n+1} \text{ es creciente.}$$

c) Se trata de una sucesión alternante: $\left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4} \ldots\right\}$, que no es monótona, por lo que ni puede ser creciente ni decreciente.

5. ¿Es 2 una cota superior y $\dfrac{1}{4}$ una cota inferior de la sucesión $a_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$?

Solución :

La condición de cota superior $M \geq a_n$ puede escribirse como $M - a_n \geq 0$, que es la inecuación a comprobar:

$¿2 - \dfrac{2n-1}{n+3} \geq 0?$ $2 - \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{2n+6-(2n-1)}{n+3} = \dfrac{7}{n+3} \geq 0, \forall n \in N \Rightarrow$ 2 es una cota superior de $\left\{\dfrac{2n-1}{n+3}\right\}$.

La condición de cota inferior $L \leq a_n$ puede escribirse como $L - a_n \leq 0$:

$¿\dfrac{1}{4} - \dfrac{2n-1}{n+3} \leq 0?$ $\dfrac{1}{4} - \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{n+3-4(2n-1)}{4(n+3)} = \dfrac{7-7n}{4(n+3)}$ y $7 - 7n \leq 0$ cuando $n \geq 1$ ó, lo que es lo mismo, cuando

$n \in N \Rightarrow \dfrac{1}{4}$ es una cota inferior de $\left\{\dfrac{2n-1}{n+3}\right\}$.

Como la sucesión es creciente (comprueba que $a_{n+1} - a_n \geq 0$) y $\dfrac{1}{4} \in \left\{\dfrac{2n-1}{n+3}\right\}$ (ya que $a_1 = \dfrac{1}{4}$), $\dfrac{1}{4}$ es el mínimo de la sucesión;

2 no es el máximo, pues $2 \notin \left\{\dfrac{2n-1}{n+3}\right\}$ (la ecuación $2 = \dfrac{2n-1}{n+3}$ lleva a que $6 = -1$) aunque sí es un número muy importante para la sucesión: es su límite, esto es, el valor al que la sucesión se aproxima al aumentar el valor de *n*.

Al ser creciente, todos sus valores serán menores que el límite, por lo que éste será su supremo, que es la menor de sus cotas superiores.

La sucesión $a_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$ está acotada.

7. ¿Está acotada la sucesión $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$?

Solución :

Para situarnos, calculamos los 4 primeros términos: $\left\{2, \dfrac{5}{2}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{17}{4} \dots\right\}$. Parece que es creciente. Lo comprobamos:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n^2+2n+2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n(n+1)} \geq 0 \ \forall n \geq 1.$$

El candidato para cota inferior y mínimo es $a_1 = 2$. Está acotada inferiormente por ser creciente.

¿Dejará en algún momento de crecer, es decir, tendrá cota superior? Supongamos que existe un número M que es cota superior, por lo que $M - \dfrac{n^2+1}{n} \geq 0$. Si M es natural, existe $a_M = \dfrac{M^2+1}{M}$ y debe verificarse que $M - \dfrac{M^2+1}{M} \geq 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{M} \geq 0$, que es imposible. La sucesión no está acotada superiormente y crecerá indefinidamente. En breve diremos que su límite es infinito.

Observa que si M no fuese natural usaríamos el número natural inmediatamente superior a él y aplicaríamos el mismo razonamiento (llamado de *reducción al absurdo*).

En conclusión, $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ no está acotada, porque sólo lo está inferiormente.

8. ¿Están acotadas las sucesiones $\left\{(-1)^n\right\}, \left\{(-1)^n n\right\}$ y $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$?

Solución :

Claramente $-1 \leq \left\{(-1)^n\right\} \leq 1 \Rightarrow$ Está acotada.

La sucesión $\left\{(-1)^n n\right\} = \{-1, 2, -3, 4 \dots\}$ ni está acotada superiormente $\left(\{2, 4, 6 \dots\} = \{2n\}\right)$, pues no lo están los números pares, ni inferiormente $\left(\{-1, -3, -5 \dots\} = \{-2n+1\}\right)$, ya que tampoco tienen fin los números impares negativos.

La sucesión $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{4} \dots\right\}$, que se puede separar en $\left\{-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{5} \dots\right\}$(sucesión creciente y negativa) y en $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6} \dots\right\}$(sucesión decreciente y positiva), verifica que $-1 \leq \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} \leq \dfrac{1}{2}$, por lo que está acotada.

Actividades

1. Escribe los seis primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

   a) $a_n = 2^{-n+1}$; **b)** $b_n = (-1)^{n-1}$; **c)** $c_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)(n+3)}$; **d)** $d_n = \sqrt[3]{3n+5}$.

2. Escribe los seis primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

   a) $a_n = n^2 - n + 1$; **b)** $b_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n-3}$; **c)** $c_n = (1+3n)^{\frac{1}{n+1}}$; **d)** $d_n = \sqrt[n]{n^2+5}$.

3. Escribe los números periódicos 0,21212121... y 2,1494949494... como la suma de los infinitos términos de dos progresiones geométricas.

4. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{4n}{3n+1}$:

   a) Razona si es creciente o decreciente.

   b) ¿Puede ser $\dfrac{4}{3}$ una cota superior? En caso afirmativo, ¿será su máximo?

   c) ¿Puede ser 1 una cota inferior? En caso afirmativo, ¿será su mínimo?

5. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{2}{3n+1}$:

   a) Averigua si es creciente o decreciente.

   b) ¿Puede ser $\dfrac{1}{2}$ una cota superior? En caso afirmativo, ¿será su máximo?

   c) ¿Puede ser 0 una cota inferior? En caso afirmativo, ¿será su mínimo?

6. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{2n-1}$:

   a) Averigua si es creciente o decreciente.

   b) ¿Puede ser $\dfrac{2}{3}$ una cota superior? En caso afirmativo, ¿será su máximo?

   c) ¿Puede ser – 1 una cota inferior? En caso afirmativo, ¿será su mínimo?

7. ¿Está acotada la sucesión $a_n = 3n - 5$?

8. Pon un ejemplo de sucesión decreciente. ¿Qué número puede ser una cota superior? ¿Se puede afirmar que toda sucesión decreciente está acotada superiormente?

9. Pon un ejemplo de sucesión creciente. ¿Qué número puede ser una cota inferior? ¿Se puede afirmar que toda sucesión creciente está acotada inferiormente?

1.2. Límite de una sucesión

Como las sucesiones son colecciones de infinitos números, parece oportuno saber si a partir de un valor de n los términos son *casi* iguales a un cierto valor o si, por el contrario, el valor de dichos términos crece o decrece indefinidamente.

Comparamos varias sucesiones con *Calc*, la hoja de cálculo de *OpenOffice.Org*. A tal efecto, damos unos valores a n y obtenemos los términos respectivos:

n	$a_n = \frac{2n-1}{n+3}$	$b_n = \frac{n^2+1}{n}$	$c_n = 10 - \sqrt{n}$	$d_n = 0{,}9^n$	$e_n = 1{,}1^n$	$f_n = \frac{1000}{n}$
5	1,13	5,2	7,76	0,59	1,61	200
10	1,46	10,1	6,84	0,35	2,59	100
1,00E+006	2	1,00E+006	-990	0	#NUM!	0,001
1,00E+012	2	1,00E+012	-999990	0	#NUM!	1,00E-09

Mientras que a_n, d_n y f_n se estabilizan en torno a un valor (*convergen* a dicho valor: son sucesiones convergentes), b_n y e_n no paran de crecer y c_n de decrecer (estas tres son *divergentes*). La expresión #NUM! indica que el valor del resultado sobrepasa al mayor número con el que puede operar el programa (se produce *overflow*). Observa que el programa escribe 1,00E+006 por 10^6.

En estos ejemplos la existencia o no de límite está relacionada con la acotación:

- si la sucesión es creciente y está acotada superiormente, es **convergente** y tiene límite finito (caso de a_n). Escribiremos $\lim a_n = 2$.
- si es creciente y no está acotada superiormente, es **divergente** y no tiene límite finito, sino infinito (caso de b_n y e_n). Escribiremos $\lim b_n = \infty$, $\lim e_n = \infty$.
- si es decreciente y está acotada inferiormente, converge y tiene límite finito (caso de d_n y f_n). Escribiremos $\lim d_n = 0$, $\lim f_n = 0$.
- si es decreciente y no está acotada inferiormente, diverge y no tiene límite finito, sino menos infinito (caso de c_n). Escribiremos $\lim c_n = -\infty$.

Como el límite de una sucesión sólo se calcula cuando n tiende a infinito escribimos $\lim a_n$ en lugar de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, que también se usa con frecuencia.

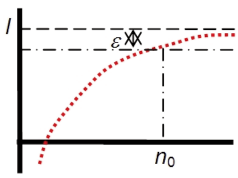
También existen sucesiones acotadas sin límite, pero no divergentes. Es el caso de $\{(-1)^n\}$: salta de -1 a 1 incesantemente. ¿Cuál es su límite? Ninguno, porque el límite, en caso de existir, debe ser único. Escribimos que no existe el límite ($\nexists \lim (-1)^n$).

El infinito que usamos a la derecha del límite ($\lim b_n = \infty$) no es un número, por lo que se podría decir que $\nexists \lim b_n$. Sin embargo, se concibe ∞ como indicación de una no acotación, de modo que su uso y manejo son posibles. Así tenemos que:

- $\infty \pm k = \infty, \quad \infty + \infty = \infty \Rightarrow k \cdot \infty = \infty$ si $k > 0$;
- $-\infty \pm k = -\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty \Rightarrow k \cdot \infty = -\infty$ si $k < 0$;
- $\infty^k = \infty, \ \frac{M}{\infty^k} = 0$, si $k > 0$.

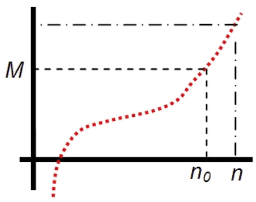
El concepto matemático riguroso de **límite finito** de una sucesión difiere un poco de lo dicho anteriormente. La definición parte del conocimiento del valor del límite e indica cómo proceder para comprobar que ese valor es ciertamente el límite: dando un margen de error positivo ε se encuentra un número natural n_0 a partir del cual los valores de todos los términos de la sucesión difieren de l en menos de la cantidad ε.

$$\lim a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N \text{ tal que si } n > n_0 \text{ entonces } |a_n - l| < \varepsilon.$$



Esta definición se lee: *el límite de a_n es igual a l si y sólo si para todo ε positivo existe un número natural n_0 tal que si n es mayor que n_0 entonces el valor absoluto de la diferencia entre a_n y l es menor que ε.*

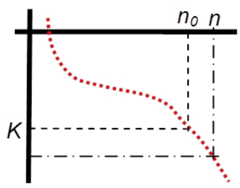
Como el límite puede ser mayor o menor que los términos, se usa el valor absoluto para abarcar ambos casos. Además, cuanto menor sea ε, mayor ha de ser n_0 y a la inversa.



El **límite** es **infinito** cuando para todo valor positivo M existe un número natural n_0 a partir del cual todos los términos de la sucesión son mayores que M.

$\lim a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists n_0 \in N$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow a_n > M$.

Lo que indica $\lim a_n = \infty$ es que a_n no está acotada superiormente. Ahora cuanto mayor sea M mayor será n_0.



La última definición: $\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall K < 0\ \exists n_0 \in N$ tal que si $n > n_0$ entonces $a_n < K$.

La sucesión no está acotada inferiormente y cuanto mayor sea $|K|$ mayor será n_0.

En la definición de límite lo que garantiza la aproximación al límite ($\lim a_n = l$) o la divergencia ($\lim a_n = \infty$) de la sucesión es que las inecuaciones $|a_n - l| < \varepsilon$ ó $a_n > M$ tengan solución.

Ejemplo

9. Usando las definiciones, demuestra los siguientes resultados:

a) $\lim \frac{2n-1}{n+3} = 2$; **b)** $\lim \frac{10^8}{n} = 0$; **c)** $\lim \frac{\sqrt{n}}{10^{20}} = \infty$; **d)** $\lim 6 = 6$.

Solución :

a) $\lim \frac{2n-1}{n+3} = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{n+3} - 2\right| < \varepsilon$. Hay que resolver la inecuación para encontrar el valor de n: $\left|\frac{2n-1}{n+3} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-7}{n+3}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{7}{n+3} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+3}{7} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+3 > \frac{7}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{7}{\varepsilon} - 3$.

La relación es correcta: a medida que disminuye el valor de ε aumenta el valor de n. Por ejemplo, si hacemos $\varepsilon = 10^{-6}$, $n = 7 \cdot 10^6 - 3 \cong 7000000$. Así, a partir del término $a_{7000000}$ todos los a_n difieren de 2 en menos de 10^{-6}.

b) $\lim \frac{10^8}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{10^8}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{n}{10^8} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{10^8}{\varepsilon}$. Si $\varepsilon = 10^{-20} \Rightarrow n > 10^{28}$.

Por muy grande que sea la constante (en este caso 10^8), n la superará, pues nunca deja de crecer mientras que la constante tiene un valor fijo.

c) $\lim \frac{\sqrt{n}}{10^{20}} = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists n_0 \in N$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{10^{20}} > M \Rightarrow n > \left(10^{20} \cdot M\right)^2$.

d) $\lim 6 = 6 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N$ tal que si $n > n_0 \Rightarrow |6-6| < \varepsilon \Rightarrow |0| < \varepsilon$. Esta inecuación se verifica de forma trivial para cualquier valor de n y de $\varepsilon > 0$, pues al ser una sucesión constante su límite será esa misma constante.

2. Cálculo de límites

La definición de límite no nos permite calcular el límite directamente, pero sí nos da unas pautas para hallarlos. Los siguientes resultados son fáciles de comprender:

- $\lim k = k, \forall k \in R \Rightarrow$ El límite de una constante es ella misma: $\lim 5 = 5$.
- $\lim n^{\alpha} = \infty, \forall \alpha > 0 \Rightarrow \lim n = \lim n^2 = \lim \sqrt{n} = \lim n^5 = \lim \sqrt[5]{n} = \infty$.
- $\lim \dfrac{k}{n^{\alpha}} = 0, \forall \alpha > 0 \Rightarrow \lim \dfrac{1}{n} = \lim \dfrac{20}{\sqrt{n}} = \lim \dfrac{10^6}{n^2} = 0$.
- $\lim r^n = \begin{cases} 0, \, si\ 0 < r < 1 \\ \infty, \, si\ r > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim 0{,}8^n = 0; \lim 1{,}5^n = \infty; \lim 5^{-n} = \lim \dfrac{1}{5^n} = 0$.

Aunque no sea muy correcto desde un punto de vista matemático, está claro que $\dfrac{k}{\infty} = 0$, sea cual sea el valor de k.

2.1. Operaciones con límites. Indeterminaciones

Las reglas anteriores sólo sirven para sucesiones muy sencillas. Necesitamos más para poder calcular el límite de cualquier sucesión. Estas reglas se llaman **Álgebra de límites** y son las siguientes:

- $\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$: el límite de una suma (o resta) de sucesiones es la suma (o resta) de los límites de las sucesiones.
- $\lim (a_n \cdot b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n)$: el límite de un producto de sucesiones es el producto de los límites de las sucesiones.
- $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$, *si* $\lim b_n \neq 0$: el límite de un cociente de sucesiones es el cociente de los límites de las sucesiones.
- $\lim a_n^{b_n} = (\lim a_n)^{\lim b_n}$: el límite de una sucesión elevada a otra sucesión es el límite de la base elevada al límite del exponente.

Ejemplos

10. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\left(n + \sqrt{n}\right)$; **b)** $\lim\left(n - \sqrt{n}\right)$; **c)** $\lim\left(3n^2\right)$; **d)** $\lim\left[n \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n}}\right]$; **e)** $\lim \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$; **f)** $\lim n^{4n}$.

Solución :

a) $\lim\left(n + \sqrt{n}\right) = \lim n + \lim \sqrt{n} = \infty$, pues $\infty + \infty = \infty$.

b) $\lim\left(n - \sqrt{n}\right) = \lim n - \lim \sqrt{n} = \infty - \infty$: al no ser ∞ un número, no sigue las reglas aritméticas y no sabemos hacer la resta. Se trata de una indeterminación.

c) $\lim\left(3n^2\right)=\left(\lim 3\right)\cdot\left(\lim n^2\right)=\infty.$

d) $\lim\left[n\cdot\sqrt{\frac{1}{n}}\right]=\left(\lim n\right)\cdot\left(\lim\sqrt{\frac{1}{n}}\right)=\infty\cdot 0$: otra indeterminación.

e) $\lim\frac{n^2-1}{n^2+1}=\frac{\lim\left(n^2-1\right)}{\lim\left(n^2+1\right)}=\frac{\infty}{\infty}$: otra indeterminación.

f) $\lim n^{4n}=\left(\lim n\right)^{\lim 4n}=\infty$ porque $\infty^{\infty}=\infty$.

Las reglas que usamos son tan sencillas que se aplican directamente.

11. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\left(10n^2+5n-7\right)$; **b)** $\lim\left(5n^3-6n^2+7n+3\right)$; **c)** $\lim n^{1/n}$; **d)** $\lim 1^{n^3}$; **e)** $\lim\left(\frac{1}{n}\right)^n$.

Solución :

a) $\lim\left(10n^2+5n-7\right)=\infty$; **b)** $\lim\left(5n^3-6n^2+7n+3\right)=\infty-\infty$ indeterminación;

c) $\lim n^{1/n}=\infty^0$ indeterminación; **d)** $\lim 1^{n^3}=1^{\infty}$ indeterminación; **e)** $\lim\left(\frac{1}{n}\right)^n=0^{\infty}=0.$

2.2. Reglas prácticas para el cálculo de límites

En los ejemplos han aparecido las indeterminaciones $\infty-\infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty\cdot 0, \infty^0, 1^{\infty}$, todas causadas porque ∞ es la no acotación y aquí se enfrenta a ella misma, a cero o a uno. Vamos a ver cómo resolver las tres primeras:

Indeterminación $\infty-\infty$:

- Resta de polinomios: En un polinomio todos los monomios son despreciables frente al monomio de mayor grado. Así, haremos una aproximación asintótica (el signo ≈) y nos quedaremos únicamente con el monomio de mayor grado, que es quien proporciona el valor del límite del polinomio en cuestión:

$$\lim\left(5n^3-6n^2+7n+3\right)=\lim\left[5n^3\left(1-\frac{6}{5n}+\frac{7}{5n^2}+\frac{3}{5n^3}\right)\right]\approx\lim 5n^3=\infty$$

- Raíces cuadradas: Se multiplica y divide por el conjugado del término que produce la indeterminación, por lo que desaparecen las raíces y se puede restar:

$$\lim\left(n-\sqrt{n}\right)=\infty-\infty\ ind\overset{conjugado:\,n+\sqrt{n}}{=}\lim\frac{\left(n-\sqrt{n}\right)\left(n+\sqrt{n}\right)}{n+\sqrt{n}}=\lim\frac{n^2-n}{n+\sqrt{n}}=\frac{\infty}{\infty}\ ind\approx\lim\frac{n^2}{n}=\lim n=\infty.$$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$:

- Cociente de polinomios: Se hace la aproximación asintótica, quedando en el numerador y en el denominador los respectivos monomios de mayor grado.

$$\lim\frac{n^2-1}{n^2+1}=\frac{\infty}{\infty}\ ind\approx\lim\frac{n^2}{n^2}=\lim 1=1.$$

Indeterminación $\infty \cdot 0$:

- Cuando sean polinomios se efectúa el producto y pasa a ser $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim\left[n\cdot\sqrt{\frac{1}{n}}\right]=\infty\cdot 0\ ind=\lim\sqrt{\frac{n^2}{n}}=\lim\sqrt{n}=\infty.$$

La **indeterminación** 1^∞ la trataremos más adelante. Hay que esperar a Matemáticas II para resolver la indeterminación ∞^0 y otros casos distintos a los anteriores.

Ejemplos

12. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\left(n^5-6n^4-3000n^3-12n^2\right)$; **b)** $\lim\frac{3n^4-7n+2}{50n^3+25n^2}$; **c)** $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$.

Solución :

a) $\lim\left(n^5-6n^4-3000n^3-12n^2\right)\approx\lim n^5=\infty.$

b) $\lim\frac{3n^4-7n+2}{50n^3+25n^2}=\frac{\infty}{\infty}\ ind\approx\lim\frac{3n^4}{50n^3}=\lim\frac{3n}{50}=\infty.$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\infty-\infty\ ind\overset{\text{conjugado: }\sqrt{n^2+3n}+n}{=}\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=$

$\lim\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\frac{\infty}{\infty}\ ind\approx\lim\frac{3n}{\sqrt{n^2}+n}=\lim\frac{3n}{n+n}=\frac{3}{2}.$

Al multiplicar un binomio por su conjugado se obtiene una diferencia de cuadrados que escribimos directamente.

Tras usar el conjugado suele aparecer una indeterminación . Hacemos directamente la aproximación asintótica, teniendo cuidado con los términos del interior de la raíz, porque pueden contribuir al límite.

13. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\frac{15n^3+9n^2-6n+1}{5n^3-3n^2-8}$; **b)** $\lim\frac{6n^2+27n+12}{n^3+4}$; **c)** $\lim\left(2n-\sqrt{4n^2+5n}\right)$.

Solución :

a) $\lim\frac{15n^3+9n^2-6n+1}{5n^3-3n^2-8}=\frac{\infty}{\infty}\ ind\approx\lim\frac{15n^3}{5n^3}=3.$

b) $\lim\frac{6n^2+27n+12}{n^3+4}=\frac{\infty}{\infty}\ ind\approx\lim\frac{6n^2}{n^3}=\lim\frac{6}{n}=0.$

c) $\lim\left(2n-\sqrt{4n^2+5n}\right)=\infty-\infty\ ind\overset{\text{conjugado:}2n+\sqrt{4n^2+5n}}{=}\lim\frac{4n^2-\left(4n^2+5n\right)}{2n+\sqrt{4n^2+5n}}\approx\lim\frac{-5n}{2n+\sqrt{4n^2}}=\lim\frac{-5n}{4n}=-\frac{5}{4}.$

En el caso de un cociente de polinomios es fácil ver que si:

grado numerador > grado denominador $\Rightarrow \lim \frac{num}{den} = \pm\infty^{(*)}$;

grado numerador = grado denominador $\Rightarrow \lim \frac{num}{den} = \frac{coef.\,mon.\,mayor\ grado}{coef.\,mon.\,mayor\ grado}$;

grado numerador < grado denominador $\Rightarrow \lim \frac{num}{den} = 0.$

(*) El signo del límite depende del signo de los coeficientes de los monomios de mayor grado.

14. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\left(3+2+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)$; **b)** $\lim \frac{3-n^2-2n^4}{5n^3-8}$; **c)** $\lim \frac{x+2x+3x+\ldots+nx}{(2n+x)^2}$.

Solución :

a) Hay dos sumas en el límite: $3+2$, cuyo valor es 5, y $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$, que es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica con $a_1=1, r=\frac{1}{4} \Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim\left(3+2+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right) = 5+\frac{4}{3} = \frac{19}{3}.$$

b) $\lim \frac{3-n^2-2n^4}{5n^3-8} = \frac{-\infty}{\infty}\,ind \approx \lim \frac{-2n^4}{5n^3} = \lim \frac{-2n}{5} = -\infty.$

c) $\lim \frac{x(1+2+\ldots+n)}{(2n+x)^2} \overset{(*)}{=} \lim \frac{x\,\frac{1+n}{2}\cdot n}{(2n+x)^2} = \lim \frac{n^2x+nx}{2(2n+x)^2} = \frac{\infty}{\infty}\,ind \approx \lim \frac{n^2x}{2\cdot 4n^2} = \frac{x}{8}.$

15. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim \frac{5n-6n^2-8n^3}{n^3+7n}$; **b)** $\lim\left(\frac{1}{3n^2}+\frac{3}{3n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3n^2}\right)$; **c)** $\lim\left(n-\sqrt{2n^2+n}\right)$.

Solución :

a) $\lim \frac{5n-6n^2-8n^3}{n^3+7n} = \frac{-\infty}{\infty}\,ind \approx \lim \frac{-8n^3}{n^3} = -8.$

b) $\lim\left(\frac{1}{3n^2}+\frac{3}{3n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3n^2}\right) = \lim \frac{1+3+\ldots+2n-1}{3n^2} \overset{(*)}{=} \lim \frac{\frac{1+2n-1}{2}\cdot n}{3n^2} = \lim \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}.$

c) $\lim\left(n-\sqrt{2n^2+n}\right) = \infty-\infty\ ind \overset{conjugado:\, n+\sqrt{2n^2+n}}{=} \lim \frac{n^2-(2n^2+n)}{n+\sqrt{2n^2+n}} = \lim \frac{-n^2-n}{n+\sqrt{2n^2+n}} \approx \lim \frac{-n^2}{n+\sqrt{2}n} =$

$$= \lim \frac{-n}{1+\sqrt{2}} = -\infty.$$

(*) Hay que sumar las progresiones aritméticas antes de calcular el límite.

Actividades

10. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim \frac{7n^2-3n+2}{2n^2+15n}$; **b)** $\lim \frac{9n^4+4n^3-n^2-2n+1}{13n^2-2n^3}$; **c)** $\lim\left(\sqrt{n^2-9n}-n\right)$.

11. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}\right]$; **b)** $\lim\sqrt{\frac{4n^2-2n}{9n^2+7n-3}}$; **c)** $\lim\left[3n\cdot\left(\frac{2}{5n^3}+\frac{4}{5n^3}+\ldots+\frac{2n}{5n^3}\right)\right]$.

Recuerda que $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$, $n\geq m$; $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ y $0!=1!=1$.

12. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim \frac{2n^3-n^2}{7n^3+2}$; **b)** $\lim\left[\frac{3}{2n}\left(4-\frac{1}{n}\right)+\frac{3}{2n}\left(4-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{3}{2n}\left(4-\frac{n}{n}\right)\right]$; **c)** $\lim \frac{7n^2-6n+5}{\sqrt[3]{n^5}}$.

13. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\sqrt[3]{\frac{n^5-19n^3+8n-5}{8n^3+13n^2+18}}$; **b)** $\lim \frac{n^2-3n^4}{5n^3-3n^2}$; **c)** $\lim\left(3n-\sqrt{4n^2-2n}\right)$.

14. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim\left[\left(4-\frac{3}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]$; **b)** $\lim\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^3+3}+\frac{(-1)^n}{n^3-3}\right]$; **c)** $\lim\left[\sqrt{2n}\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{3n}\right)\right]$.

15. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim \frac{2^{2n}}{7^{n+8}}$; **b)** $\lim \frac{3^{n-1}}{2^{n+5}}$; **c)** $\lim\left(n-\sqrt{n^2-7n}\right)$.

Para saber más...

En Matemáticas se contemplan siete indeterminaciones: $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\cdot 0$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, ∞^0 y 0^0. El mayor causante de indeterminaciones es ∞, seguido por 0 (cero).

En la expresión ∞^0 el problema surge porque $\infty^k=\infty$, si $k>0$ ó $\infty^k=0$, si $k<0$, luego para el valor del límite es fundamental cómo se acerque k a cero. Además, $n^0=1$, si n es un número finito, por lo que no sabemos qué regla aplicar en este caso.

Observa que $0^a=0$ y que $a^0=1$, por lo que si hacemos $a=0$ entramos en un conflicto para elegir el resultado.

3. El número e

Hemos llegado al número más importante no sólo de las Matemáticas, sino de la naturaleza. Aparece por primera vez en las tablas de logaritmos de John Napier, Jacob Bernoulli da su primer valor aproximado y Leonhard Euler comienza a usar la letra *e* para designar dicho valor. El **número *e*** se define como:

$$\boxed{e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

En la calculadora *e* acompaña al logaritmo neperiano, ya que es la base de dicho logaritmo. Para hallar su valor hacemos SHIFT ln 1 y obtenemos e $\cong$ 2,718281828... . Si queremos calcular una potencia, por ejemplo e^3, haríamos SHIFT ln 3 . Se obtiene $e^3 \cong 20{,}08553692...$.

¿Para qué vamos a usar *e* en este momento? Con él resolvemos la indeterminación 1^{∞}. Un resultado muy importante es que el número *e* también puede escribirse como $e=\lim\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$, siendo p_n un polinomio en n que tiende a infinito cuando $n\to\infty$. Lo único que cambia con respecto a la primera definición es la rapidez con la que se aproxima al valor, pero eso importa poco en el límite.

Otro resultado que usaremos es que $\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{q_n}=\left[\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\right]^{q_n/p_n}$. Observa que no es más que usar la forma de elevar una potencia a otra potencia. A partir de aquí podemos concluir que $\lim\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{q_n}=\left[\lim\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\right]^{\lim q_n/p_n}=e^{\lim q_n/p_n}$, si $\lim p_n=\infty$ y $\lim q_n=\infty$. Ya tenemos una manera de enfrentarnos a 1^{∞}. Consideremos ahora $\lim a_n^{b_n}$. Si $\lim a_n=1$ y $\lim b_n=\infty$, al comparar las bases de ambas fórmulas vemos que $1+\frac{1}{p_n}=a_n \Rightarrow \frac{1}{p_n}=a_n-1$ y, como dividir por p_n es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{p_n}$, a_n-1 multiplicará al exponente b_n, por lo que resulta que:

$$\lim a_n^{b_n} \overset{1^{\infty}\,(ind)}{=} \exp\left\{\lim\left[\left(a_n-1\right)\cdot b_n\right]\right\}.$$

Aquí se usa $\exp\{a\}$, que es más cómodo que e^a si el exponente es largo.

Para saber más...

Demostrar que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ es creciente, es complicado. Se observa que sus tres primeros términos crecen: $a_1=(1+1)^1=2<a_2=$ $=\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}<a_3=\left(\frac{4}{3}\right)^{3}=\frac{64}{27}<\ldots$

Demostrar que está acotada exige utilizar el Binomio de Newton e ir acotando cada término por otros que proporcionan una serie cuya suma es conocida: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+\binom{n}{4}\cdot\frac{1}{n^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}=$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!\cdot n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\cdot n^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!\cdot n^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}.$$

Lógicamente $n(n-1)<n^2, n(n-1)(n-2)<n^3, n(n-1)(n-2)(n-3)<n^4 \ldots \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$. Además $2!=2, 3!=3\cdot2>2^2, 4!=4\cdot3\cdot2>2^3 \ldots \Rightarrow \frac{1}{2!}\le\frac{1}{2}, \frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}, \frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}\ldots \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$. La sucesión $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\ldots\right\}$ es una progresión geométrica de razón $1/2$. La suma de los infinitos términos que la componen es $S_\infty=\frac{a_1}{1-r}=$ $=\frac{1}{1-1/2}=2$. Por lo tanto, $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+2 \Rightarrow \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3 \Rightarrow 2<e<3$.

Ejemplos

16. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+2}$; **b)** $\lim\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{3n^2}$; **c)** $\lim\left(\frac{7n-3}{7n+5}\right)^{5n-1}$.

Solución :

a) $\lim\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+2} \underset{n^o e}{\overset{1^\infty (ind)}{=}} \exp\left\{\lim\left[\left(1+\frac{4}{n}-1\right)\cdot(n+2)\right]\right\}=\exp\left\{\lim\left[\frac{4(n+2)}{n}\right]\right\}\approx\exp\left\{\lim\frac{4n}{n}\right\}=e^4$. El resultado lo escribimos con *e* y no con *exp*.

b) $\lim\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{3n^2} \underset{n^o e}{\overset{1^\infty (ind)}{=}} \exp\left\{\lim\left[\left(1-\frac{2}{n^2}-1\right)\cdot 3n^2\right]\right\}=\exp\left\{\lim\left(\frac{-6n^2}{n^2}\right)\right\}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}$.

c) $\lim\left(\frac{7n-3}{7n+5}\right)^{5n-1} \underset{n^o e}{\overset{1^\infty (ind)\ (1)}{=}} \exp\left\{\lim\left[\left(\frac{7n-3}{7n+5}-1\right)(5n-1)\right]\right\}\overset{(2)}{=}\exp\left\{\lim\left[\left(\frac{-8}{7n+5}\right)(5n-1)\right]\right\}=\exp\left\{\lim\frac{-40n+8}{7n+5}\right\}=e^{-40/7}=\frac{1}{\sqrt[7]{e^{40}}}$.

$^{(1)}$ $\lim\frac{7n-3}{7n+5}\approx\lim\frac{7n}{7n}=1$; $^{(2)}$ $\frac{NUM}{DEN}-1=\frac{NUM-DEN}{DEN}$.

17. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\left(\frac{5n^3+8}{5n^3-4}\right)^{3n^4-5n+2}$; **b)** $\lim\sqrt[n]{\left(\frac{4n+2}{4n}\right)^{n^2+5}}$; **c)** $\lim\left(\frac{n^2-n}{n^2+3n}\right)^{n^2-5n}$.

Solución :

a) $\lim\left(\frac{5n^3+8}{5n^3-4}\right)^{3n^4-5n+2} \underset{n^o e}{\overset{1^\infty (ind)}{=}} \exp\left\{\lim\left[\left(\frac{5n^3+8}{5n^3-4}-1\right)(3n^4-5n+2)\right]\right\}=\exp\left\{\lim\frac{12(3n^4-5n+2)}{5n^3-4}\right\}\approx\exp\left\{\lim\frac{36n^4}{5n^3}\right\}=$ $=\exp\left\{\lim\frac{36n}{5}\right\}=e^\infty=\infty$.

b) $\lim\sqrt[n]{\left(\frac{4n+2}{4n}\right)^{n^2+5}}=\lim\left(\frac{4n+2}{4n}\right)^{\frac{n^2+5}{n}} \underset{n^o e}{\overset{1^\infty (ind)}{=}} \exp\left\{\lim\left[\left(\frac{4n+2}{4n}-1\right)\cdot\frac{n^2+5}{n}\right]\right\}=\exp\left\{\lim\left(\frac{2}{4n}\cdot\frac{n^2+5}{n}\right)\right\}\approx\exp\left\{\lim\frac{2n^2}{4n^2}\right\}=$ $=e^{1/2}=\sqrt{e}$.

c) $\lim\left(\dfrac{n^2-n}{n^2+3n}\right)^{n^2-5n} \underset{n^o e}{\overset{1^\infty\,(ind)}{=}} \exp\left\{\lim\left[\left(\dfrac{n^2-n}{n^2+3n}-1\right)\left(n^2-5n\right)\right]\right\} = \exp\left\{\lim\dfrac{-4n\left(n^2-5n\right)}{n^2+3n}\right\} \approx \exp\left\{\lim\dfrac{-4n^3}{n^2+3n}\right\} = \exp\{\lim(-4n)\} =$

$= e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^\infty} = 0.$

18. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\left(\dfrac{7n^2+5}{3n^2+1}\right)^{n^2-7n}$; **b)** $\lim\left(\dfrac{n^2+n}{2n^2-n}\right)^{n/4}$; **c)** $\lim\left(\dfrac{2+n}{3+n}\right)^{4-n}$.

Solución :

a) $\lim\left(\dfrac{7n^2+5}{3n^2+1}\right)^{n^2-7n} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^\infty = \infty$, pues si $r>1$ entonces $r^\infty = \infty$.

b) $\lim\left(\dfrac{n^2+n}{2n^2-n}\right)^{n/4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^\infty = 0$, pues si $0<r<1$ entonces $r^\infty = 0$.

c) $\lim\left(\dfrac{2+n}{3+n}\right)^{4-n} = 1^{-\infty}\ ind \overset{n^o e}{=} \exp\left\{\lim\left[\left(\dfrac{2+n}{3+n}-1\right)(4-n)\right]\right\} = \exp\left\{\lim\dfrac{-(4-n)}{3+n}\right\} \approx \exp\left\{\lim\dfrac{n}{n}\right\} = e.$

Actividades

16. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim 7^{\frac{4n-3}{2n+5}}$; **b)** $\lim\left(\dfrac{3n-5}{3n+1}\right)^{\frac{n^2}{6n+8}}$; **c)** $\lim\left(\dfrac{n^2+2n-1}{n^2-2n+1}\right)^{2n}$.

17. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n-1}$; **b)** $\lim\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2/n-1}$; **c)** $\lim\left(\dfrac{8n-3}{8n+4}\right)^{5n^2/7n+9}$.

18. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\sqrt{\left(\dfrac{n^3+3}{n^3+n}\right)^{n^2+1}}$; **b)** $\lim\left(\dfrac{5n^2+6n}{5n^2-7n}\right)^{n^2-5n^3}$; **c)** $\lim\left(\dfrac{2n+7}{2n+4}\right)^{n^2/3n-8}$.

19. ¿Qué relación deben verificar a y b para que $\lim\left(\dfrac{2n+a}{2n-3}\right)^{2n+1} = \lim\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{bn-2}$?

20. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\left(\dfrac{n^2-5n-7}{4n^2+7n+5}\right)^{n+1}$; **b)** $\lim\left(\dfrac{n^2-5n-7}{4n^2+7n+5}\right)^{n+1/n^2+2}$; **c)** $\lim\left(\dfrac{n^2-5n-7}{4n^2+7n+5}\right)^{n+1/2n-9}$.

21. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim\dfrac{5}{\left(\dfrac{5n+2}{5n-3}\right)^{5n}}$; **b)** $\lim\left(\dfrac{3n^2+n}{3n^2-n}\right)^{3n^2/2n-1}$; **c)** $\lim\sqrt[n^2]{\left(\dfrac{7n}{7n-2}\right)^{n^3-7n}}$.

4. Logaritmos. Propiedades

El **logaritmo** en base *a* de un número *b* se define como el exponente al que hay que elevar *a* para obtener *b*. Matemáticamente $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

Esta definición configura al logaritmo como la inversa de la función exponencial. Como base *a* podemos tener cualquier número positivo distinto de 1 y como argumento *b* cualquier número positivo. Evidentemente tenemos que acotar el conjunto de números que pueden ser bases o el logaritmo perderá su eficacia. Actualmente suelen utilizarse tres bases: *e*, 10 y 2. El 2 se ha colado a través de la informática y su sistema binario. Los tradicionales han sido 10 y *e*, de modo que los logaritmos de los que son bases tienen una escritura especial:

- log *x* es el **logaritmo decimal** (no es necesario escribir la base).
- ln *x* o *Lx* es el **logaritmo neperiano** o natural. Estos son los logaritmos que usaremos habitualmente y emplearemos la primera notación.

Para cualquier logaritmo de una base distinta, hay que especificarlo: $\log_2 x$ ó $\log_7 x$. Sin embargo, y dado que los decimales y los neperianos son los *tradicionales*, las calculadoras sólo permiten calcular estos logaritmos: log, ln. Si aparecen otros, habrá que hacer un cambio de base como veremos más adelante.

De la definición de logaritmo se obtienen las siguientes **propiedades**:

- No existe el logaritmo de números negativos ni del cero. Cuando se trata de límites, se escribe que $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$: el límite del logaritmo cuando x tiende a cero por la derecha del logaritmo es menos infinito. La expresión cero por la derecha (0^+) indica que se acerca con valores mayores que cero, es decir, positivos.
- $\log_a a = 1 \Rightarrow$ El logaritmo de un número en su propia base es 1. Por ello, $\ln e = 1, \log 10 = 1, \log_2 2 = 1$. Es trivial a partir de la definición.
- Si $a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x < 0,\ si\ 0 < x < 1 \\ \log_a x > 0,\ si\ x > 1 \end{cases}$; si $0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x > 0,\ si\ 0 < x < 1 \\ \log_a x < 0,\ si\ x > 1 \end{cases}$.

  Observa que: $\log\left(\frac{1}{10}\right) = -1$; $\log 2 = 0{,}30103$; $\log_{1/10}\left(\frac{1}{10}\right) = 1$; $\log_{1/2} 2 = -1$.
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

  La demostración es fácil. Hacemos $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b ; \log_a y = c \Rightarrow y = a^c \Rightarrow x \cdot y = a^b \cdot a^c = a^{b+c} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \log_a (x \cdot y) = \log_a \left(a^{b+c}\right) = b + c = \log_a x + \log_b y$.
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

  Igual que antes: $\frac{x}{y} = \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a \left(a^{b-c}\right) = b - c = \log_a x - \log_a y$.
- $\log_a x^n = n \log_a x$.

  Demostración: $x^n = \left(a^b\right)^n = a^{nb} \Rightarrow \log_a x^n = \log_a a^{nb} = nb = n \log_a x$.

Esta propiedad es la que usamos cuando *tomamos logaritmos* (nosotros siempre neperianos) en una expresión. El exponente pasa multiplicando al logaritmo de la base. Así, haremos

$$2^x = 5 \overset{\substack{\text{tomando}\\ \text{neperianos}}}{\Rightarrow} x\ln 2 = \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5} \cong 0{,}430677.$$

Existe un algoritmo o regla para calcular raíces cuadradas, pero no para raíces de otros índices. Cuando no existía la calculadora, la raíz de cualquier índice de cualquier número se calculaba mediante las tablas logarítmicas, usando esta propiedad, pues convierte la radicación en producto o división:

$$x = \sqrt[3]{15} = 15^{1/3} \overset{\substack{\text{tomando}\\ \text{neperianos}}}{\Rightarrow} \ln x = \frac{1}{3}\ln 15 \overset{\text{tablas}}{\Rightarrow} \ln x \cong 0{,}9027 \overset{\text{tablas}}{\Rightarrow} x = 2{,}4663.$$

- Cambio de base: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{\log x}{\log a}$.

Demostración: $\log_a x = c \Rightarrow x = a^c \overset{\substack{\text{tomando}\\ \text{logaritmos}}}{\Rightarrow} \ln x = c\ln a \Rightarrow c = \dfrac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Ejemplos

19. Usando las propiedades de los logaritmos, escribe como el logaritmo de un único argumento las siguientes expresiones:

a) $\ln(x+1) + 2\ln x - 4\ln(2x+1)$; **b)** $2 - \log(x+3) + 3\log(x-7)$; **c)** $3\ln(2-x) - 2\ln(3-x) - \frac{1}{2}\ln x$.

Solución :

a) $\ln(x+1) + 2\ln x - 4\ln(2x+1) = \ln(x+1) + \ln x^2 - \ln(2x+1)^4 = \ln\dfrac{x^2(x+1)}{(2x+1)^4}$.

b) $2 - \log(x+3) + 3\log(x-7) = \log 100 - \log(x+3) + \log(x-7)^3 = \log\dfrac{100(x-7)^3}{x+3}$.

c) $3\ln(2-x) - 2\ln(3-x) - \dfrac{1}{2}\ln x = \ln(2-x)^3 - \ln(3-x)^2 - \ln\sqrt{x} = \ln\dfrac{(2-x)^3}{\sqrt{x}\cdot(3-x)^2}$.

20. Usando las propiedades de los logaritmos, desarrolla las siguientes expresiones lo más posible:

a) $\ln\dfrac{x^3(3x+1)}{x-4}$; **b)** $\ln\sqrt[5]{\dfrac{3x}{(2x-5)^3}}$; **c)** $\log\dfrac{\sqrt{x+2}\cdot\sqrt[3]{(x+3)^2}}{10x^5}$.

Solución :

a) $\ln\dfrac{x^3(3x+1)}{x-4} = \ln\left[x^3(3x+1)\right] - \ln(x-4) = \ln x^3 + \ln(3x+1) - \ln(x-4) = 3\ln x + \ln(3x+1) - \ln(x-4)$.

b) $\ln\sqrt[5]{\dfrac{3x}{(2x-5)^3}} = \ln\left[\dfrac{3x}{(2x-5)^3}\right]^{1/5} = \dfrac{1}{5}\left[\ln 3x - \ln(2x-5)^3\right] = \dfrac{1}{5}\left[\ln 3 + \ln x - 3\ln(2x-5)\right]$.

c) $\log\dfrac{\sqrt{x+2}\cdot\sqrt[3]{(x+3)^2}}{10x^5} = \log(x+2)^{1/2} + \log(x+3)^{2/3} - \log(10x^5) = \dfrac{1}{2}\log(x+2) + \dfrac{2}{3}\log(x+3) - \log 10 - \log x^5 =$

$= \dfrac{1}{2}\log(x+2) + \dfrac{2}{3}\log(x+3) - 1 - 5\log x$.

21. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x=7$; **b)** $5^{2x-3}=4$; **c)** $e^x=8$; **d)** $e^{-x^2}=0{,}5$; **e)** $2^{\sqrt{x+1}}=3$.

Solución :

a) $3^x=7 \overset{\text{tomando neperianos}}{\Longrightarrow} x\ln 3=\ln 7 \Rightarrow x=\dfrac{\ln 3}{\ln 7}\cong 0{,}564575.$

b) $5^{2x-3}=4 \overset{\text{tomando neperianos}}{\Longrightarrow} (2x-3)\ln 5=\ln 4 \Rightarrow 2x-3=\dfrac{\ln 4}{\ln 5}\Rightarrow 2x=\dfrac{\ln 4}{\ln 5}+3\Rightarrow x=\dfrac{\frac{\ln 4}{\ln 5}+3}{2}\cong 1{,}930677.$ No te asustes por el despeje,

pues todo lo hace la calculadora: $\boxed{(}\ \boxed{\ln}\ 4\ \boxed{\div}\ \boxed{\ln}\ 5\ \boxed{+}\ 3\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ 2\ \boxed{=}$.

c) $e^x=8 \Rightarrow x\ln e \overset{\text{tomando neperianos}}{=} \ln 8 \Rightarrow x=\ln 8\cong 2{,}0794415.$

d) $e^{-x^2}=0{,}5 \overset{\text{tomando neperianos}}{\Longrightarrow} -x^2=\ln 0{,}5 \overset{\ln 0{,}5<0}{\Longrightarrow} x^2=|\ln 0{,}5|\Rightarrow x=\pm\sqrt{|\ln 0{,}5|}=\pm 0{,}832555.$

e) $2^{\sqrt{x+1}}=3 \overset{\text{tomando neperianos}}{\Longrightarrow} \sqrt{x+1}\cdot\ln 2=\ln 3\Rightarrow\sqrt{x+1}=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\Rightarrow x+1=\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2\Rightarrow x=\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2-1.$ Usando la calculadora, $x\cong 1{,}512106$.

22. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2\ln x-\ln 8=\ln\dfrac{x}{4}$; **b)** $\log(x-16)+2=2\log x$; **c)** $\log\sqrt[3]{x+1}+\log\sqrt[3]{x-1}+\log 50=2$.

Solución :

Para resolver una ecuación logarítmica, escribimos ambos miembros con un solo signo de logaritmo usando las propiedades. Después, quitamos los logaritmos y resolvemos la ecuación resultante: $\log ARG(1)=\log ARG(2)\Rightarrow ARG(1)=ARG(2)$. Es necesario comprobar que la solución o soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial.

a) $2\ln x-\ln 8=\ln\dfrac{x}{4}\Rightarrow \ln x^2-\ln 8=\ln\dfrac{x}{4}\Rightarrow \ln\left(\dfrac{x^2}{8}\right)=\ln\dfrac{x}{4}\Rightarrow\dfrac{x^2}{8}=\dfrac{x}{4}\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=0,2.$

Comprobación:

Si $x=0\longrightarrow 2\ln 0\Rightarrow$ no es válida.

Si $x=2\longrightarrow 2\ln 2-\ln 8=\ln\dfrac{2}{4}\Rightarrow\ln\dfrac{2^2}{8}=\ln\dfrac{1}{2}\Rightarrow\ln\dfrac{1}{2}=\ln\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ sí es válida.

b) $\log(x-16)+2=2\log x\Rightarrow\log(x-16)+\log 100=\log x^2\Rightarrow\log\left[100(x-16)\right]=\log x^2\Rightarrow 100x-1600=x^2\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-100x+1600=0\Rightarrow x=20,80.$

Comprobación:

Si $x=20\longrightarrow\log 4+2=2\log 20\Rightarrow\log 4+\log 100=\log 20^2\Rightarrow\log 400=\log 400\Rightarrow$ es válida.

Si $x=80\longrightarrow\log 64+2=2\log 80\Rightarrow\log 64+\log 100=\log 80^2\Rightarrow\log 6400=\log 6400\Rightarrow$ es válida.

c) $\log\sqrt[3]{x+1}+\log\sqrt[3]{x-1}+\log 50=2\Rightarrow\dfrac{1}{3}\log(x+1)+\dfrac{1}{3}\log(x-1)=\log 100-\log 50\Rightarrow\dfrac{1}{3}\log\left[(x+1)(x-1)\right]=\log\dfrac{100}{50}\Rightarrow$

$\Rightarrow\log(x^2-1)=3\log 2\Rightarrow\log(x^2-1)=\log 2^3\Rightarrow x^2-1=8\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3.$

Comprobación:

Si $x=-3 \to \log\sqrt[3]{-2} \Rightarrow$ no es válida.

Si $x=3 \to \log\sqrt[3]{4}+\log\sqrt[3]{2}+\log 50=2 \Rightarrow \log\sqrt[3]{4\cdot 2}+\log 50=2 \Rightarrow \log 2+\log 50=2 \Rightarrow \log 100=2 \Rightarrow$ es válida.

23. Usando las definiciones de los límites, demuestra los siguientes resultados:

a) $\lim \log n=\infty$; **b)** $\lim 0{,}9^n=0$; **c)** $\lim 1{,}1^n=\infty$.

Solución :

a) $\lim \log n=\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists n_0 \in N$ tal que si $n>n_0 \Rightarrow \log n>M \Rightarrow n>10^M$. Si $M=10^4 \Rightarrow n=10^{10^4}=10^{10000}$.

b) $\lim 0{,}9^n=0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in N$ tal que si $n>n_0 \Rightarrow \left|0{,}9^n\right|<\varepsilon \Rightarrow 0{,}9^n<\varepsilon \overset{\text{tomando logaritmos}}{\Rightarrow} \log 0{,}9^n<\log\varepsilon \Rightarrow n\cdot\log 0{,}9<\log\varepsilon$.

En este paso hay que tener cuidado al despejar, porque $\log 0{,}9$ es negativo. Por eso hay que cambiar el signo a los dos miembros de la inecuación e invertir la desigualdad: $n\cdot(-\log 0{,}9)>-\log\varepsilon \Rightarrow n>\dfrac{\log\varepsilon}{\log 0{,}9}$.

Si $\varepsilon=10^{-8} \Rightarrow n>174{,}835 \Rightarrow a_{175}$ difiere de 0 en menos de 10^{-8}.

c) $\lim 1{,}1^n=\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists n_0 \in N$ tal que si $n>n_0$ entonces $1{,}1^n>M \overset{\text{tomando logaritmos}}{\Rightarrow} \log 1{,}1^n>\log M \Rightarrow n\cdot\log 1{,}1>\log M \Rightarrow n>\dfrac{\log M}{\log 1{,}1}$.

Si $M=10^{12} \Rightarrow n>289{,}906 \Rightarrow a_{290}$ supera el valor 10^{12}.

Si comparamos los resultados de los apartados de este ejemplo, nos damos cuenta de lo rápido que decrecen o crecen las exponenciales $0{,}9^n$ y $1{,}1^n$, respectivamente, y de lo lento que crece el logaritmo.

24. Usando el cambio de base, calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 7$; **b)** $\log_5 21$; **c)** $\log_{1/4} 9$; **d)** $\log_{12} 24$; **e)** $\log_{1/3} 8$.

Solución :

a) $\log_2 7=\dfrac{\ln 7}{\ln 2}\cong 2{,}807355$; **b)** $\log_5 21=\dfrac{\log 21}{\log 5}\cong 1{,}891668$; **c)** $\log_{1/4} 9=\dfrac{\ln 9}{\ln 1/4}\cong -1{,}584963$; **d)** $\log_{12} 24=\dfrac{\log 24}{\log 12}\cong 1{,}278943$;

e) $\log_{1/3} 8=\dfrac{\log 8}{\log 1/3}\cong -1{,}892789$.

25. Toma logaritmos neperianos en los dos miembros de las siguientes expresiones:

a) $y=(x+6)^{x^2+3}$; **b)** $y=\sqrt{\left(x^2-5\right)^{3x+1}}$; **c)** $y=\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{x}{x+9}}$.

Solución :

a) $y=(x+6)^{x^2+3} \Rightarrow \ln y=\left(x^2+3\right)\ln(x+6)$.

b) $y=\sqrt{\left(x^2-5\right)^{3x+1}}=\left(x^2-5\right)^{\frac{3x+1}{2}} \Rightarrow \ln y=\dfrac{3x+1}{2}\ln\left(x^2-5\right)$. Observa que es conveniente unificar el exponente antes de tomar logaritmos.

c) $y=\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{x}{x+9}} \Rightarrow \ln y=\dfrac{x}{x+9}\ln\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$.

26. Aplica logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones:

a) $x=\sqrt{y^3z^5}$; **b)** $y=5\sqrt[4]{\dfrac{x^3z^2}{6}}$; **c)** $z=\dfrac{1}{3}\sqrt[5]{\dfrac{4xy^3}{9}}$.

Solución :

a) $x=\sqrt{y^3z^5}=\left(y^3z^5\right)^{1/2}\Rightarrow \ln x=\dfrac{1}{2}\ln\left(y^3z^5\right)=\dfrac{1}{2}\left(\ln y^3+\ln z^5\right)=\dfrac{1}{2}\left(3\ln y+5\ln z\right).$

b) $y=5\sqrt[4]{\dfrac{x^3z^2}{6}}=5\left(\dfrac{x^3z^2}{6}\right)^{1/4}\Rightarrow \ln y=\ln\left[5\left(\dfrac{x^3z^2}{6}\right)^{1/4}\right]=\ln 5+\ln\left(\dfrac{x^3z^2}{6}\right)^{1/4}=\ln 5+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^3z^2}{6}=\ln 5+\dfrac{1}{4}\left(\ln x^3+\ln z^2-\ln 6\right).$

c) $z=\dfrac{1}{3}\sqrt[5]{\dfrac{4xy^3}{9}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4xy^3}{9}\right)^{1/5}\Rightarrow \ln z=\ln\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{4xy^3}{9}=-\ln 3+\dfrac{1}{5}\left[\ln\left(4xy^3\right)-\ln 9\right]=-\ln 3+\dfrac{1}{5}\left(\ln 4+\ln x+3\ln y-\ln 9\right).$

Actividades

22. Usando las propiedades de los logaritmos, escribe como el logaritmo de un único argumento las siguientes expresiones:

a) $2\log x-4\log y+\log z$; **b)** $\dfrac{1}{3}\left(2\ln y+3\ln z-4\ln x\right)$; **c)** $\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{4}\ln y-\dfrac{3}{2}\ln z$.

23. ¿Qué relación verifican x e y si:

a) $\ln x+\ln y=0$; **b)** $\ln y-\ln x=0$; **c)** $\ln y-\dfrac{1}{2}\ln x=0$; **d)** $\ln y+2\ln x=0$?

24. Usando las propiedades de los logaritmos, desarrolla las siguientes expresiones:

a) $x=\sqrt[5]{\dfrac{3y^2}{2z^3}}$; **b)** $y=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{7x^5z^3}{5}}$; **c)** $z=9\sqrt[3]{\dfrac{6y^2}{5x^4}}$.

25. Usando la definición de logaritmo, razona cuánto valdrá $\log_x\dfrac{1}{x}+\log_{1/y}y$.

26. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{-x+2}=8$; **b)** $4^{x^2-3}=12$; **c)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+5}=\dfrac{1}{5}$.

27. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $4e^{3x+2}=7$; **b)** $5e^{0{,}6x}-3=8$; **c)** $\dfrac{9}{3+8e^{-0{,}2x}}=1$.

28. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\dfrac{\ln\left(4-x^2\right)}{\ln\left(2-x\right)}=2$; **b)** $\log\dfrac{x}{4}+\log 16=3\log x$; **c)** $\ln\sqrt{x+1}+\ln\sqrt{x+6}=\ln 2+\ln 3$.

29. Usando el cambio de base, calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 15$; **b)** $\log_6 12$; **c)** $\log_{1/5}10$; **d)** $\log_8 2$; **e)** $\log_{1/7}21$.

30. Toma logaritmos neperianos en los dos miembros de las siguientes expresiones:

a) $y=\left(\dfrac{2x-5}{x+1}\right)^{3x+7}$; **b)** $y=\sqrt[4]{(3x+2)^{x^2-8}}$; **c)** $y=\left(\dfrac{x-5}{x+5}\right)^{\frac{2x-7}{x}}$.

31. Si $\log_3 81=4$, ¿cuánto vale $\log_{81} 3$? Halla la relación para $\log_x y=a$ y $\log_y x$.

32. Si $\log_2 x=n$, ¿cuánto valdrá $\log_{16} x$? Generaliza el resultado para $\log_{a^p} x$ cuando $\log_a x=n$.

Recuerda

✓ Una **sucesión** es una aplicación que transforma números naturales en números reales:

$$a: N \to R$$
$$n \mapsto a(n)=a_n$$

✓ Hay dos **notaciones** para referirnos a una sucesión:

- $a_n=5n \Rightarrow a_1=5, a_2=10, a_3=15\ldots$
- $\{a_n\}=\{5n\}=\{5,10,15\ldots\}$.

✓ Una sucesión a_n es **monótona creciente** cuando $a_{n+1}>a_n$ o cuando $a_{n+1}-a_n>0$ o, si $a_n>0$, cuando $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$ (los términos van aumentando de valor) y **monótona decreciente** cuando $a_{n+1}<a_n$ ó $a_{n+1}-a_n<0$ ó, si $a_n>0$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ (los términos van disminuyendo de valor).

✓ Si una sucesión tiene **cota superior** se dice que está **acotada superiormente** y si tiene **cota inferior**, está acotada inferiormente. Cuando tiene cota superior e inferior se dice que está acotada.

✓ Se pueden obtener tres resultados al calcular el **límite de una sucesión**:

- Número finito: se trata del número al que se aproxima la sucesión a medida que aumenta el valor de n.
- Infinito (∞): la sucesión no está acotada superiormente, diverge y crece indefinidamente.
- Menos infinito ($-\infty$): la sucesión no está acotada inferiormente, diverge y decrece indefinidamente.

✓ El **álgebra de límites** nos permite ampliar el cálculo de límites. Son estos:

- $\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$: el límite de una suma (o resta) de sucesiones es la suma (o resta) de los límites de las sucesiones.
- $\lim (a_n \cdot b_n) = (\lim a_n)\cdot(\lim b_n)$: el límite de un producto de sucesiones es el producto de los límites de las sucesiones.
- $\lim \dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$, *si* $\lim b_n \neq 0$: el límite de un cociente de sucesiones es el cociente de los límites de las sucesiones.

- $\lim a_n^{b_n} = \left(\lim a_n\right)^{\lim b_n}$ el límite de una sucesión elevada a otra sucesión es el límite de la base elevada al límite del exponente.

✓ Son **indeterminaciones** los resultados $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty^0, 1^\infty$. Los resolvemos usando:

- $\infty - \infty \longrightarrow$ **Aproximación asintótica**, **conjugado** (si hay raíces cuadradas).
- $\frac{\infty}{\infty} \longrightarrow$ Aproximación asintótica.
- $1^\infty \longrightarrow$ **Número *e***: $\lim a_n^{b_n} \overset{1^\infty\ ind}{\underset{n^\circ e}{=}} \exp\left\{\lim\left[\left(a_n - 1\right)\cdot b_n\right]\right\}$

✓ El **logaritmo** en base *a* de un número *b* se define como el exponente al que hay que elevar *a* para obtener *b*. Matemáticamente $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

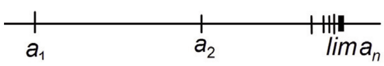
✓ Los logaritmos más usados son log *x* (logaritmos decimales) y ln *x* o *Lx* (logaritmos neperianos o naturales).

✓ Las **propiedades** más importantes del **logaritmo** son:

- $\log_a \left(x\cdot y\right) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^n = n \log_a x$

Para saber más...

Si representamos una sucesión monótona creciente y convergente sobre un único eje, obtendríamos un gráfico como el adjunto. En él vemos que los términos de la sucesión se *acumulan* en torno al límite. Esta idea llevó a la definición de *punto de acumulación* que se usa en Análisis Matemático y Topología. El gráfico es similar si la sucesión es monótona decreciente y convergente (solo hay que cambiar de lado todos los términos, para que quede a la izquierda lo que en el gráfico está a la derecha).



El número *e*, al igual que π, es un número *trascendente*. Ambos forman parte de los irracionales, algo que ya sabemos, pero, en contra de lo que ocurre con los radicales, no se obtienen como solución de ecuaciones algebraicas, sino que "*trascienden* el poder de los métodos algebraicos", según palabras de Euler. La demostración de que un número es trascendente es bastante complicada: se tardaron bastantes siglos para hacerlo con π; claro que esto supuso la demostración de que la cuadratura del círculo, esto es, la construcción de un cuadrado de igual área que un círculo, es imposible con regla y compás, es decir, que π ni es racional (regla) ni radical (compás).