

Resuelve

Página 147

¿Cómo operar con $\sqrt{-1}$?

Vamos a proceder como los antiguos algebristas: cuando nos encontremos con $\sqrt{-1}$ seguiremos adelante operando con ella con naturalidad y teniendo en cuenta que $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

1. Para comprobar que a y b son las raíces de un polinomio, podemos poner $(x-a)(x-b)$ y operar para obtener dicho polinomio. Por ejemplo, vamos a aplicar esta técnica para comprobar que $2 + 3\sqrt{-1}$ y $2 - 3\sqrt{-1}$ son las raíces del polinomio $x^2 - 4x + 13$:

$$\begin{aligned} & [x - (2 + 3\sqrt{-1})][x - (2 - 3\sqrt{-1})] = \\ & = x^2 - (2 + 3\sqrt{-1})x - (2 - 3\sqrt{-1})x + (2 + 3\sqrt{-1})(2 - 3\sqrt{-1}) = \\ & = x^2 - 2x - 3\sqrt{-1}x - 2x + 3\sqrt{-1}x + 2^2 - (3\sqrt{-1})^2 = x^2 - 4x + 4 - 9 \cdot (-1) = x^2 - 4x + 13 \end{aligned}$$

■ Halla las raíces de la ecuación $x^2 - 4x + 5$ y, aplicando la técnica que acabamos de ver, comprueba que efectivamente lo son.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned} [x - (2 + \sqrt{-1})][x - (2 - \sqrt{-1})] &= x^2 - x(2 - \sqrt{-1}) - x(2 + \sqrt{-1}) + (2 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1}) = \\ &= x^2 - 4x + 4 - 2\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} - (-1) = x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

2. Comprobemos ahora que -8 tiene tres raíces cúbicas: -2 , $1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}$ y $1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}$.

La primera es clara:

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

Veamos la segunda:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot (\sqrt{3}\sqrt{-1}) + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = \\ &= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3(\sqrt{3})^2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{3})^3(\sqrt{-1})^3 = \\ &= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 9(-1) + 3\sqrt{3}(-1 \cdot \sqrt{-1}) = \\ &= 1 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} - 9 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8 \end{aligned}$$

■ Comprueba tú la tercera viendo que $(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})^3$ es igual a -8 .

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})^3 &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3}\sqrt{-1} + 3 \cdot 1 \cdot (\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = \\ &= 1 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3 \cdot 3 \cdot (-1) - 3\sqrt{3} \cdot (-1) \cdot \sqrt{-1} = 1 - 3\sqrt{3}\sqrt{-1} - 9 + 3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8 \end{aligned}$$

1 En qué consisten los números complejos

Página 148

1 ¿Verdadero o falso?

- a) El número 7 es un número real. Por tanto, no es un número complejo.
 - b) Si $a + bi$ es un número complejo, entonces no puede ser número real.
 - c) Para que el número complejo $a + bi$ sea imaginario hace falta que a sea cero.
 - d) Para que el número complejo $a + bi$ sea imaginario es necesario que b sea distinto de cero.
 - e) El número $0 + 0i$ ni es complejo ni es real.
 - f) El número 5 no tiene conjugado.
 - g) Si un número complejo coincide con su conjugado, entonces es un número real.
 - h) Si un número complejo coincide con su opuesto, entonces es el cero.
 - i) Si el opuesto de un número complejo coincide con su conjugado, entonces es imaginario puro.
- a) Falso. Los números reales son números complejos cuya parte imaginaria es cero.
- b) Falso. Si $b = 0$ el número complejo también es un número real.
- c) Falso. La parte real no influye. Es imaginario si su parte imaginaria no es nula.
- d) Verdadero.
- e) Falso. El número $0 + 0i$ es real pero no es imaginario porque su parte imaginaria es cero.
- f) Falso. El conjugado de $5 = 5 + 0i$ es $5 = 5 - 0i$.
- g) Verdadero. Si $a + bi = a - bi \rightarrow b = -b \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$
Por tanto, su parte imaginaria es cero y es un número real.
- h) Verdadero. Si $a + bi = -a - bi \rightarrow 2a + 2bi = 0 \rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \rightarrow a = 0 \\ 2b = 0 \rightarrow b = 0 \end{cases}$
- i) Verdadero (siempre que el número no sea cero).
Si $-a - bi = a - bi \rightarrow -a = a \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0$

2 De los siguientes números complejos:

$$3 + 2i, -\sqrt{3} + 5i, 2i, 7, 0$$

- a) ¿Cuáles son números reales? Ponlos en forma binómica.
 - b) ¿Cuáles son imaginarios?
 - c) ¿Cuáles son imaginarios puros? Ponlos en forma binómica.
 - d) Escribe el opuesto de cada uno de ellos.
 - e) Escribe el conjugado de cada uno de ellos.
- a) $7 = 7 + 0i$ y $2 = 2 + 0i$ son números reales.
- b) Los números imaginarios son $3 + 2i, -\sqrt{3} + 5i$ y $2i$.
- c) $2i = 0 + 2i$ es imaginario puro.
- d) El opuesto de $z = 3 + 2i$ es $-z = -3 - 2i$.
El opuesto de $z = 2i$ es $-z = -2i$.
El opuesto de $z = 0$ es $-z = 0$.
- e) El conjugado de $z = 3 + 2i$ es $\bar{z} = 3 - 2i$.
El conjugado de $z = 2i$ es $\bar{z} = -2i$.
El conjugado de $z = 0$ es $\bar{z} = 0$.
- El opuesto de $z = -\sqrt{3} + 5i$ es $-z = \sqrt{3} - 5i$.
El opuesto de $z = 7$ es $-z = -7$.
- El conjugado de $z = -\sqrt{3} + 5i$ es $\bar{z} = -\sqrt{3} - 5i$.
El conjugado de $z = 7$ es $\bar{z} = 7$.

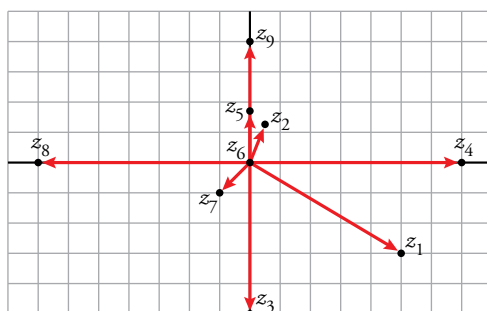
Página 149

3 Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

$$5 - 3i; \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i; -5i; 7; \sqrt{3}i; 0; -1 - i; -7; 4i$$

Si llamamos:

$$\begin{array}{lll} z_1 = 5 - 3i & z_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i & z_3 = -5i \\ z_4 = 7 & z_5 = \sqrt{3}i & z_6 = 0 \\ z_7 = -1 - i & z_8 = -7 & z_9 = 4i \end{array}$$



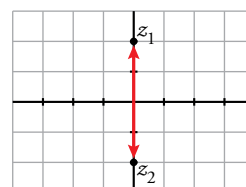
Son reales z_4 , z_6 y z_8 . El resto son imaginarios. Son imaginarios puros z_3 , z_5 y z_9 .

4 Resuelve las ecuaciones y representa las soluciones.

- a) $z^2 + 4 = 0$
- b) $z^2 + 6z + 10 = 0$
- c) $3z^2 + 27 = 0$
- d) $3z^2 - 27 = 0$

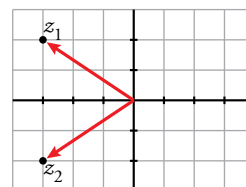
a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm \sqrt{-4} \rightarrow z = \pm 2i$

Las soluciones son $z_1 = 2i$ y $z_2 = -2i$.



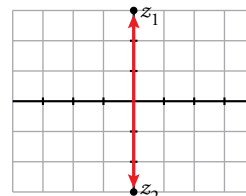
b) $z^2 + 6z + 10 = 0 \rightarrow z = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm 2i$

Las soluciones son: $z_1 = -3 + 2i$ y $z_2 = -3 - 2i$.



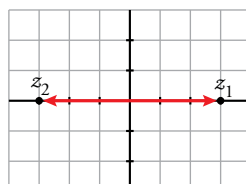
c) $3z^2 + 27 = 0 \rightarrow z^2 = -9 \rightarrow z = \pm \sqrt{-9} \rightarrow z = \pm 3i$

Las soluciones son $z_1 = 3i$ y $z_2 = -3i$.



d) $3z^2 - 27 = 0 \rightarrow z^2 = 9 \rightarrow z = \pm \sqrt{9} \rightarrow z = \pm 3$

Las soluciones son: $z_1 = 3$ y $z_2 = -3$.



5 Representa gráficamente cada número complejo, su opuesto y su conjugado:

a) $3 - 5i$

b) $5 + 2i$

c) $-1 - 2i$

d) $-2 + 3i$

e) 5

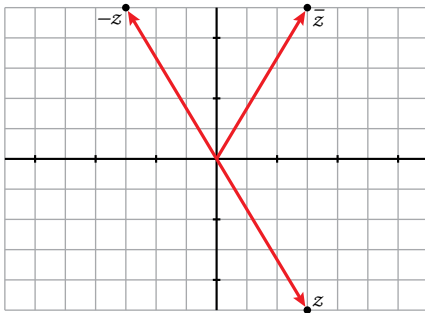
f) 0

g) $2i$

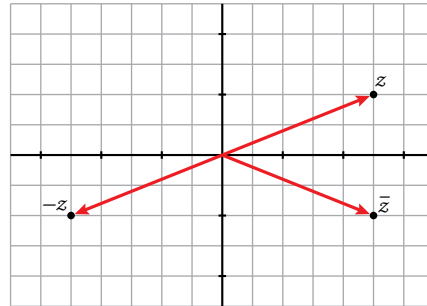
h) $-5i$

i) -2

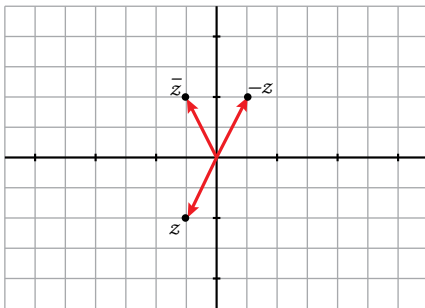
a) $z = 3 - 5i \rightarrow \begin{cases} -z = -3 + 5i \\ \bar{z} = 3 + 5i \end{cases}$



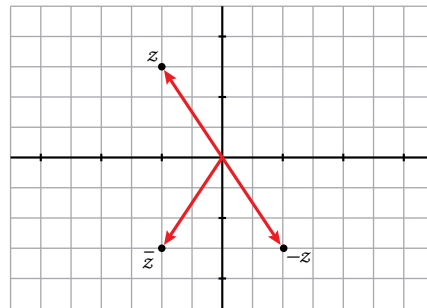
b) $z = 5 + 2i \rightarrow \begin{cases} -z = -5 - 2i \\ \bar{z} = 5 - 2i \end{cases}$



c) $z = -1 - 2i \rightarrow \begin{cases} -z = 1 + 2i \\ \bar{z} = -1 + 2i \end{cases}$



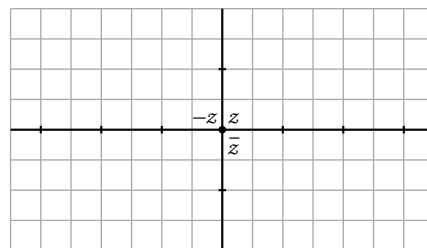
d) $z = -2 + 3i \rightarrow \begin{cases} -z = 2 - 3i \\ \bar{z} = -2 - 3i \end{cases}$



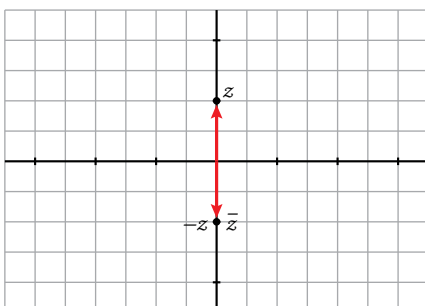
e) $z = 5 + 0i \rightarrow \begin{cases} -z = -5 + 0i \\ \bar{z} = 5 - 0i \end{cases}$



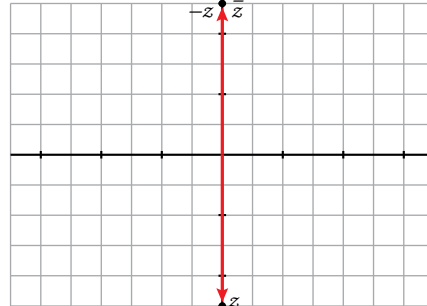
f) $z = 0 + 0i \rightarrow \begin{cases} -z = 0 + 0i \\ \bar{z} = 0 - 0i \end{cases}$



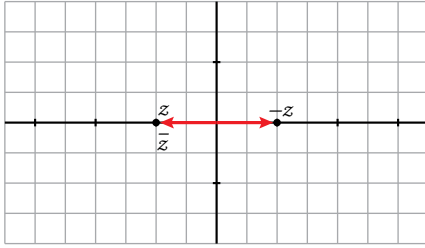
g) $z = 0 + 2i \rightarrow \begin{cases} -z = 0 - 2i \\ \bar{z} = 0 - 2i \end{cases}$



h) $z = 0 - 5i \rightarrow \begin{cases} -z = 0 + 5i \\ \bar{z} = 0 + 5i \end{cases}$



$$i) z = -2 + 0i \rightarrow \begin{cases} -z = 2 - 0i \\ \bar{z} = -2 - 0i \end{cases}$$



6 Calcula $i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}$. Da un criterio para simplificar potencias de i de exponente natural.

$$\begin{array}{cccccc} i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i & i^{13} = i & i^{17} = i & i^{21} = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 & i^{14} = -1 & i^{18} = -1 & i^{22} = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i & i^{15} = -i & i^{19} = -i & i^{23} = -i \\ i^4 = 1 & i^8 = 1 & i^{12} = 1 & i^{16} = 1 & i^{20} = 1 & i^{24} = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccccc}} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \\ i^{4n} = 1 \end{array}$$

Criterio válido desde $n = 0$.

2 Operaciones con números complejos en forma binómica

Página 150

1 ¿Verdadero o falso?

- a) La suma de un número complejo y su opuesto es 0.
- b) La suma de un número complejo y su conjugado es un número imaginario puro.
- c) La suma de un número complejo y su conjugado es un número real.
- d) El cuadrado de un número complejo cualquiera es un número real.
- e) El cuadrado de un número imaginario puro es un número real.
- f) El cociente de dos números imaginarios puros es un número real pues $\frac{ai}{a'i} = \frac{a}{a'}$.

- a) Verdadero. En efecto, $(a + bi) + (-a - bi) = 0$.
- b) Falso. Por ejemplo, $(5 + 3i) + (5 - 3i) = 8$.
- c) Verdadero. Porque $(a + bi) + (a - bi) = 2a$ es un número real.
- d) Falso. Por ejemplo, $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$ no es un número real.
- e) Verdadero. En efecto, $(bi)^2 = b^2i^2 = -b^2$ es un número real.
- f) Verdadero. Podemos simplificar la fracción dividiendo numerador y denominador entre i .

Página 151

Hazlo tú. Obtén un polinomio de segundo grado cuyas raíces sean $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$.

$$P(x) = (x - \sqrt{2}i)[x - (-\sqrt{2}i)] = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = x^2 - (-2) = x^2 + 2$$

Hazlo tú. ¿Cuánto ha de valer x para que $(4 + 3i)(3 - xi)$ sea real?

$$(4 + 3i)(3 - xi) = 12 - 4xi + 9i - 3xi^2 = 12 + 3x + (9 - 4x)i$$

Para que sea un número real su parte imaginaria debe ser cero. Por tanto: $9 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{9}{4}$

2 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

- | | | | |
|--------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$ | b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$ | | |
| c) $(3 + 2i)(4 - 2i)$ | d) $(2 + 3i)(5 - 6i)$ | e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$ | |
| f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i}$ | g) $\frac{1 - 4i}{3 + i}$ | h) $\frac{4 + 4i}{-3 + 5i}$ | i) $\frac{5 + i}{-2 - i}$ |
| j) $\frac{1 + 5i}{3 + 4i}$ | k) $\frac{4 - 2i}{i}$ | l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$ | m) $\frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i}$ |

- a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = 18 - 18i$
- b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = -9i$
- c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$
- d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$
- e) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i) = (-3i + 2i^2 + 3 - 2i)(1 + 3i) = (3 - 2 - 5i)(1 + 3i) =$
 $= (1 - 5i)(1 + 3i) = 1 + 3i - 5i - 15i^2 = 1 + 15 - 2i = 16 - 2i$
- f) $\frac{2 + 4i}{4 - 2i} = \frac{(2 + 4i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{8 + 4i + 16i + 8i^2}{16 - 4i^2} = \frac{20i}{16 + 4} = \frac{20i}{20} = i$

g) $\frac{1-4i}{3+i} = \frac{(1-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-i-12i+4i^2}{9-i^2} = \frac{3-13i-4}{9+1} = \frac{-1-13i}{10} = \frac{-1}{10} - \frac{13}{10}i$

h) $\frac{4+4i}{-3+5i} = \frac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \frac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2} = \frac{-12-32i+20}{9+25} = \frac{8-32i}{34} = \frac{8}{34} - \frac{32}{34}i = \frac{4}{17} - \frac{16}{17}i$

i) $\frac{5+i}{-2-i} = \frac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-10+5i-2i+i^2}{4+1} = \frac{-10+3i-1}{5} = \frac{-11+3i}{5} = \frac{-11}{5} + \frac{3}{5}i$

j) $\frac{1+5i}{3+4i} = \frac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2} = \frac{3+11i+20}{9+16} = \frac{23+11i}{25} = \frac{23}{25} + \frac{11}{25}i$

k) $\frac{4-2i}{i} = \frac{(4-2i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-4i+2i^2}{1} = -4i-2 = -2-4i$

l) $6-3\left(5+\frac{2}{5}i\right) = 6-15+\frac{6}{5}i = -9+\frac{6}{5}i$

m) $\frac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)} = \frac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)} = \frac{-9(1-2i)}{(2+2i)} = \frac{-9+18i}{(2+2i)} = \frac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2} = \frac{-18+54i+36}{4+4} = \frac{18+54i}{8} = \frac{18}{8} + \frac{54}{8}i = \frac{9}{4} + \frac{27}{4}i$

3 Obtén polinomios cuyas raíces sean:

a) $2 + \sqrt{3}i$ y $2 - \sqrt{3}i$

b) $-3i$ y $3i$

c) $1 + 2i$ y $3 - 4i$

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales).

a) $[x - (2 + \sqrt{3}i)][x - (2 - \sqrt{3}i)] = [(x-2) - \sqrt{3}i][(x-2) + \sqrt{3}i] = (x-2)^2 - (\sqrt{3}i)^2 = x^2 - 4x + 4 - 3i^2 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7$

b) $[x - (-3i)][x - 3i] = [x + 3i][x - 3i] = x^2 - 9i^2 = x^2 + 9$

c) $[x - (1 + 2i)][x - (3 - 4i)] = [(x-1) - 2i][(x-3) + 4i] = (x-1)(x-3) + 4(x-1)i - 2(x-3)i - 8i^2 = x^2 - 4x + 3 + (4x-4-2x+6)i + 8 = x^2 - 4x + 11 + (2x+2)i = x^2 - 4x + 11 + 2ix + 2i = x^2 + (-4+2i)x + (11+2i)$

4 ¿Cuánto debe valer x para que $(25 - xi)^2$ sea imaginario puro?

$$(25 - xi)^2 = 625 + x^2i^2 - 50xi = (625 - x^2) - 50xi$$

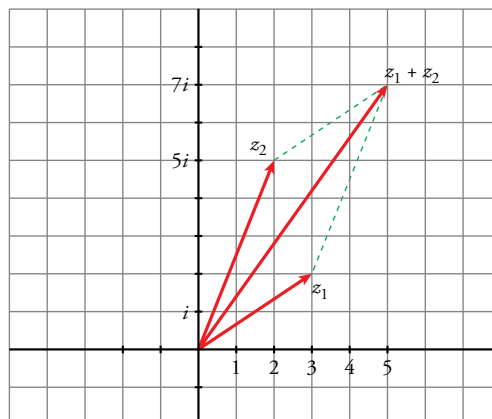
Para que sea imaginario puro:

$$625 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 625 \rightarrow x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$$

Hay dos soluciones: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

5 Representa gráficamente $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_1 + z_2$. Comprueba que $z_1 + z_2$ es una diagonal del paralelogramo de lados z_1 y z_2 .

$$z_1 + z_2 = 5 + 7i$$



3 Números complejos en forma polar

Página 153

1 ¿Verdadero o falso?

- a) Los módulos de dos números complejos opuestos son iguales pero con signos distintos.
- b) Los módulos de dos complejos opuestos son iguales.
- c) Los módulos de dos complejos conjugados son iguales.
- d) Los argumentos de dos números complejos opuestos difieren en 180° .
- e) Los argumentos de dos números complejos conjugados son opuestos (α y $-\alpha$).
- f) El argumento de cualquier número real es 0 .
- g) El argumento de los números reales negativos es 180° .
- h) El argumento de un imaginario puro es 90° o 270° .

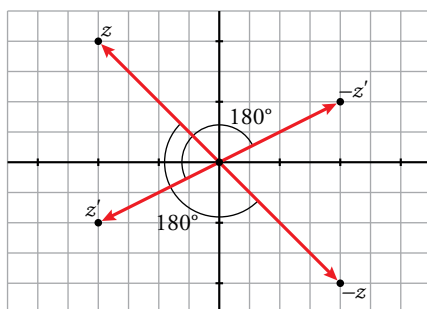
- a) Falso. El módulo de un número complejo no nulo siempre es un número positivo.
- b) Verdadero.

$$\text{Si } z = a + bi \rightarrow -z = -a - bi \rightarrow |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

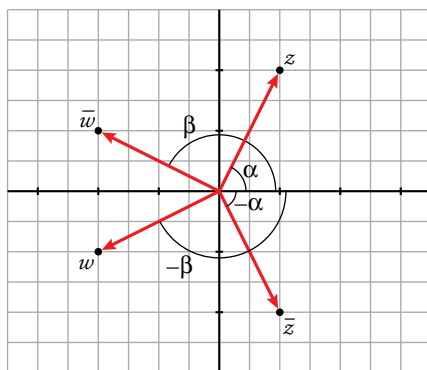
- c) Verdadero.

$$\text{Si } z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi \rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

- d) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:



- e) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:



- f) Falso. Solo los números reales positivos tienen argumento 0° .
- g) Verdadero, porque sus afijos están en el eje horizontal negativo que forma 180° con el eje horizontal positivo.
- h) Verdadero. Porque su afijo está en el eje vertical que forma 90° con el eje horizontal positivo en caso de que la parte imaginaria sea positiva y 270° en caso de que la parte imaginaria sea negativa.

2 Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $1 + \sqrt{3}i$ | b) $\sqrt{3} + i$ | c) $-1 + i$ |
| d) $5 - 12i$ | e) $3i$ | f) -5 |
| a) $1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$ | b) $\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$ | c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$ |
| d) $5 - 12i = 13_{292^\circ 37'}$ | e) $3i = 3_{90^\circ}$ | f) $-5 = 5_{180^\circ}$ |

3 Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

- | | | |
|----------------------|--------------------|--------------------|
| a) $5_{(\pi/6)}$ rad | b) 2_{135° | c) 2_{495° |
| d) 3_{240° | e) 5_{180° | f) 4_{90° |

a) $5_{(\pi/6)} = 5\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $2_{135^\circ} = 2(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $2_{495^\circ} = 2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

d) $3_{240^\circ} = 3(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180^\circ} = -5$

f) $4_{90^\circ} = 4i$

4 Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado del número complejo $z = r_\alpha$.

Opuesto: $-z = r_{180^\circ + \alpha}$

Conjugado: $\bar{z} = r_{360^\circ - \alpha}$

5 Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:

$$z = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$

$$z = 8_{30^\circ} = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{2}i = 4\sqrt{3} + 4i$$

6 Sean los números complejos $z_1 = 4_{60^\circ}$ y $z_2 = 3_{210^\circ}$.

- a) Expresa z_1 y z_2 en forma binómica.
- b) Halla $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 , y pasa los resultados a forma polar.
- c) Compara los módulos y los argumentos de $z_1 \cdot z_2$ y de z_2/z_1 con los de z_1 y z_2 e intenta encontrar relaciones entre ellos.

a) $z_1 = 4_{60^\circ} = 4(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$

$$z_2 = 3_{210^\circ} = 3(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

b) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 2\sqrt{3}i)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) = -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}i^2 = -3\sqrt{3} - 12i + 3\sqrt{3} = -12i = 12_{270^\circ}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)}{(2 + 2\sqrt{3}i)} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)(2 - 2\sqrt{3}i)}{(2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i)} = \frac{-3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}i^2}{4 - 12i^2} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} + 6i - 3\sqrt{3}}{4 + 12} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ}$$

c) $z_1 \cdot z_2 = 4_{60^\circ} \cdot 3_{210^\circ} = (4 \cdot 3)_{60^\circ + 210^\circ} = 12_{270^\circ}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210^\circ}}{4_{60^\circ}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210^\circ - 60^\circ} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150^\circ}$$

4 Operaciones con complejos en forma polar

Página 154

1 ¿Verdadero o falso?

- a) Al multiplicar un número complejo z por la unidad imaginaria i , se gira 90° alrededor del origen.
- b) Al dividir z por i , se gira 90° alrededor del origen en el sentido de las agujas del reloj.
- c) El módulo del producto $r_\alpha \cdot r'_\beta$ puede ser menor que r .
- d) $(r_{45^\circ})^4$ es un número real negativo.
- e) r_{30° y r_{330° son conjugados.
- f) r_{30° y r_{210° son opuestos.
- a) Verdadero, porque $i = 1_{90^\circ}$. Al multiplicar por i mantenemos el módulo del número complejo y sumamos un ángulo de 90° a su argumento, es decir, lo giramos 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj.
- b) Verdadero, porque $i = 1_{90^\circ}$. Al dividir por i mantenemos el módulo del número complejo y restamos un ángulo de 90° a su argumento, es decir, lo giramos 90° en el sentido de las agujas del reloj.
- c) Verdadero. Si $r' < 1$ el módulo del producto, que es $r \cdot r'$, es menor que r .
- d) Verdadero. $(r_{45^\circ})^4 = (r^4)_{4 \cdot 45^\circ} = (r^4)_{180^\circ}$ que está en la parte negativa del eje real.
- e) Verdadero. $330^\circ = -30^\circ$. Por tanto, son números complejos conjugados.
- f) Verdadero. Los ángulos 210° y 30° se diferencian en 180° . Por tanto, son números complejos opuestos.

Página 155

Hazlo tú. Halla z_1/z_2 ; z_1^6 ; z_2^3 .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4_{60^\circ}}{3_{210^\circ}} = \left(\frac{4}{3}\right)_{60^\circ - 210^\circ} = \left(\frac{4}{3}\right)_{-150^\circ} = \left(\frac{4}{3}\right)_{210^\circ}$$

$$z_1^6 = (4_{60^\circ})^6 = (4^6)_{6 \cdot 60^\circ} = 4\ 096_{360^\circ} = 4\ 096_0^\circ$$

$$z_2^3 = (3_{210^\circ})^3 = (3^3)_{3 \cdot 210^\circ} = 27_{630^\circ} = 27_{270^\circ}$$

2 Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

- a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ}$ b) $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ}$ c) $2_{10^\circ} \cdot 1_{40^\circ} \cdot 3_{70^\circ}$
 d) $5_{(2\pi/3)\text{ rad}} : 1_{60^\circ}$ e) $(1 - \sqrt{3}i)^5$ f) $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$

a) $1_{150^\circ} \cdot 5_{30^\circ} = 5_{180^\circ} = -5$

b) $6_{45^\circ} : 3_{15^\circ} = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10^\circ} \cdot 1_{40^\circ} \cdot 3_{70^\circ} = 6_{120^\circ} = 6(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}i$

d) $5_{(2\pi/3)\text{ rad}} : 1_{60^\circ} = 5_{120^\circ} : 1_{60^\circ} = 5_{60^\circ} = 5(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

e) $(1 - \sqrt{3}i)^5 = (2_{300^\circ})^5 = 32_{1500^\circ} = 32_{60^\circ} = 32(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 32\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}i$

f) $4i = 4_{90^\circ}$

3 Compara los resultados en cada caso.

a) $(2_{30^\circ})^3, (2_{150^\circ})^3, (2_{270^\circ})^3$

b) $(2_{60^\circ})^4, (2_{150^\circ})^4, (2_{270^\circ})^4, (2_{330^\circ})^4$

a) $(2_{30^\circ})^3 = 2_{3 \cdot 30^\circ}^3 = 8_{90^\circ}$

$(2_{150^\circ})^3 = 2_{3 \cdot 150^\circ}^3 = 8_{450^\circ} = 8_{90^\circ}$

$(2_{270^\circ})^3 = 8_{3 \cdot 270^\circ} = 8_{810^\circ} = 8_{90^\circ}$

b) $(2_{60^\circ})^4 = 2_{4 \cdot 60^\circ}^4 = 16_{240^\circ}$

$(2_{150^\circ})^4 = 16_{600^\circ} = 16_{240^\circ}$

$(2_{270^\circ})^4 = 16_{1080^\circ} = 16_{0^\circ}$

$(2_{330^\circ})^4 = 16_{1320^\circ} = 16_{240^\circ}$

4 Dados los complejos $z = 5_{45^\circ}$, $w = 2_{15^\circ}$, $t = 4i$, obtén en forma polar:

a) $z \cdot t$

b) $\frac{z}{w^2}$

c) $\frac{z^3}{w \cdot t^2}$

d) $\frac{z \cdot w^3}{t}$

$z = 5_{45^\circ}$

$w = 2_{15^\circ}$

$t = 4i = 4_{90^\circ}$

a) $z \cdot w = 10_{60^\circ}$

b) $\frac{z}{w^2} = \frac{z}{4_{30^\circ}} = \frac{5_{45^\circ}}{4_{30^\circ}} = \left(\frac{5}{4}\right)_{15^\circ}$

c) $\frac{z^3}{w \cdot t^2} = \frac{125_{135^\circ}}{2_{15^\circ} \cdot 16_{180^\circ}} = \left(\frac{125}{32}\right)_{-60^\circ} = \left(\frac{125}{32}\right)_{300^\circ}$

d) $\frac{z \cdot w^3}{t} = \frac{5_{45^\circ} \cdot 8_{45^\circ}}{4_{90^\circ}} = 10_{0^\circ} = 10$

5 Expresa $\cos 3\alpha$ y $\sin 3\alpha$ en función de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(1_\alpha)^3 = 1(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos^3 \alpha + i 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 i^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i^3 \sin^3 \alpha =$$

$$= \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha i - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha =$$

$$= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha) + (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha) i$$

Por otra parte: $(1_\alpha)^3 = 1_{3\alpha} = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$

Por tanto: $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

5 Radicación de números complejos

Página 157

1 ¿Verdadero o falso?

- a) Los números reales negativos no tienen raíces cuadradas en el campo complejo.
- b) El real -9 tiene dos raíces imaginarias puras: $3i$ y $-3i$.
- c) El número 16 tiene dos raíces cuartas reales, 2 y -2 , y otras dos imaginarias puras, $2i$ y $-2i$.
- d) Ninguna de las cuatro raíces cuartas de -16 es un número real.
- e) El número -8 tiene una raíz cúbica real, el -2 . Las otras dos raíces cúbicas son números imaginarios conjugados.

f) 2_{84° es una raíz quinta de 32_{60° .

- a) Falso. Las raíces cuadradas de los números reales negativos son números complejos imaginarios puros.
- b) Verdadero. Porque $(3i)^2 = 3^2 i^2 = -9$ y $(-3i)^2 = (-3)^2 i^2 = -9$.
- c) Verdadero. Porque $2^4 = 16$, $(-2)^4 = 16$, $(2i)^4 = 2^4 i^4 = 16$ y $(-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16$.
- d) Verdadero. La potencia cuarta de un número real no nulo siempre es un número positivo y no puede dar nunca -16 .
- e) Verdadero. Las raíces están en los vértices de un triángulo equilátero y son 2_{60° , $-2 = 2_{180^\circ}$ y 2_{300° .
Como los ángulos 300° y 60° son opuestos porque $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$, los correspondientes números son conjugados.
- f) Verdadero: $(2_{84^\circ})^5 = (2^5)_{5 \cdot 84^\circ} = 32_{420^\circ} = 32_{60^\circ}$

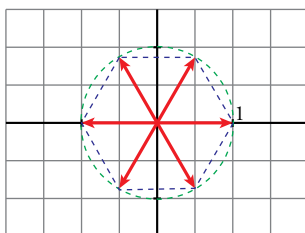
2 Halla las seis raíces sextas de 1. Representálas y exprésalas en forma binómica.

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}} = 1_{(360^\circ \cdot k)/6} = 1_{60^\circ \cdot k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las seis raíces son:

$$\begin{aligned} 1_{0^\circ} &= 1 & 1_{60^\circ} &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1_{120^\circ} &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1_{180^\circ} &= -1 & 1_{240^\circ} &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1_{300^\circ} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Representación



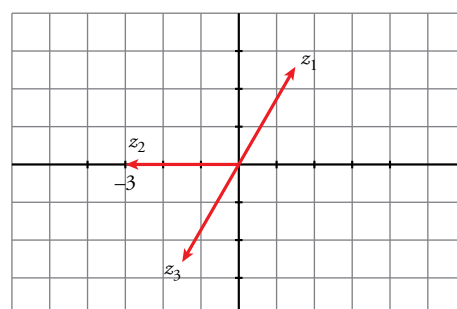
3 Resuelve $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.

$$z^3 + 27 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{(180^\circ + 360^\circ n)/3} = 3_{60^\circ + 120^\circ n}; \quad n = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = 3_{180^\circ} = -3$$

$$z_3 = 3_{240^\circ} = 3(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 3\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$



4 Resuelve estas ecuaciones:

a) $z^4 + 1 = 0$

b) $z^6 + 64 = 0$

a) $z^4 + 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}_{180^\circ} = 1_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 1_{45^\circ + 90^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$1_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; 1_{135^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; 1_{225^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; 1_{315^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

b) $z^6 + 64 = 0 \rightarrow z = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}_{180^\circ} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 2_{30^\circ + 60^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$$2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \quad 2_{90^\circ} = 2i$$

$$2_{150^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \quad 2_{210^\circ} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$2_{270^\circ} = -2i \quad 2_{330^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

5 Calcula.

a) $\sqrt[3]{-i}$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt{-25}$

d) $\sqrt{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}}$

a) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}_{270^\circ} = 1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$1_{90^\circ} = i \quad 1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad 1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16}_{120^\circ} = 2_{(120^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{30^\circ + 90^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$2_{30^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \quad 2_{120^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2_{210^\circ} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i \quad 2_{300^\circ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

c) $\sqrt{-25} = \sqrt{25}_{180^\circ} = 5_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = 5_{90^\circ + 180^\circ k}; k = 0, 1$

Las dos raíces son: $5_{90^\circ} = 5i; 5_{270^\circ} = -5i$

d) $\sqrt[3]{\frac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}_{135^\circ}}{2_{60^\circ}}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{75^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{(75^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt[6]{2}_{25^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son: $\sqrt[6]{2}_{25^\circ}; \sqrt[6]{2}_{145^\circ}; \sqrt[6]{2}_{265^\circ}$

6 Comprueba que si z y w son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones:

$z \cdot w, \frac{z}{w}, z^2, z^3$

z y w raíces sextas de 1 $\rightarrow z^6 = 1, w^6 = 1$

$(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z \cdot w$ es raíz sexta de 1.

$\left(\frac{z}{w}\right)^6 = \frac{z^6}{w^6} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \frac{z}{w}$ es raíz sexta de 1.

$z^2 = (z^2)^6 = z^{12} = (z^4)^3 = 1^3 = 1 \rightarrow z^2$ es raíz sexta de 1.

$z^3 = (z^3)^6 = z^{18} = z^{16} \cdot z^2 = (z^4)^4 \cdot z^2 = 1^4 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z^3$ es raíz sexta de 1.

7 El número $4 + 3i$ es la raíz cuarta de un cierto número complejo, z . Halla las otras tres raíces cuartas de z .

$$4 + 3i = \sqrt[5]{36^\circ 52'}$$

Las otras tres raíces cuartas de z serán:

$$\sqrt[5]{36^\circ 52' + 90^\circ} = \sqrt[5]{126^\circ 52'} = -3 + 4i$$

$$\sqrt[5]{36^\circ 52' + 180^\circ} = \sqrt[5]{216^\circ 52'} = -4 - 3i$$

$$\sqrt[5]{36^\circ 52' + 270^\circ} = \sqrt[5]{306^\circ 52'} = 3 - 4i$$

8 Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:

a) $\sqrt{-9}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[3]{2-2i}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$

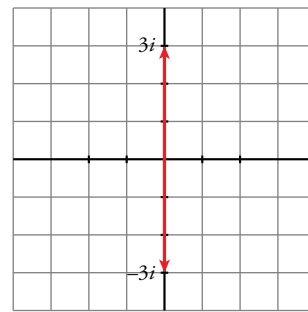
e) $\sqrt[5]{\frac{-32}{i}}$

f) $\sqrt[3]{8i}$

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9_{180^\circ}} = \sqrt[3]{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = \sqrt[3]{90^\circ + 180^\circ k}; k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$$\sqrt[3]{90^\circ} = 3i; \sqrt[3]{270^\circ} = -3i$$



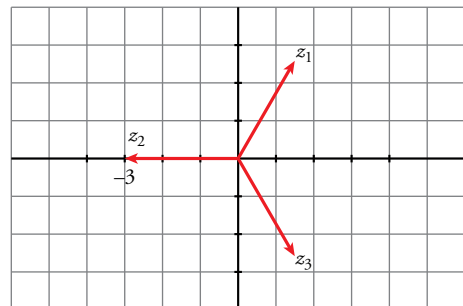
b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = \sqrt[3]{(180^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt[3]{60^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$z_1 = \sqrt[3]{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{180^\circ} = -3$$

$$z_3 = \sqrt[3]{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$



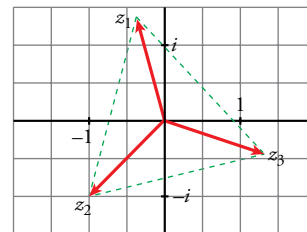
c) $\sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{315^\circ}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}(315^\circ + 360^\circ k)/3} = \sqrt[3]{2_{105^\circ + 120^\circ k}}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$z_1 = \sqrt[3]{2_{105^\circ}} = -0,37 + 1,37i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2_{225^\circ}} = \sqrt[3]{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = -1 - i$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2_{345^\circ}} = 1,37 - 0,37i$$



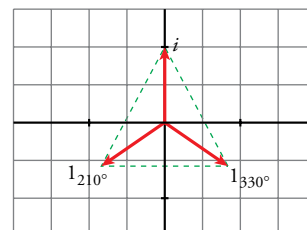
d) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}_{315^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = \sqrt[3]{1_{(270^\circ + 360^\circ k)/3}} = \sqrt[3]{1_{90^\circ + 120^\circ k}}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$1_{90^\circ} = i$$

$$1_{210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$1_{330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$



$$e) \sqrt[5]{-\frac{32}{i}} = \sqrt[5]{-\frac{32(-i)}{i(-i)}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32 \cdot 90^\circ} = 2_{90^\circ + 360^\circ k/5} = 2_{18^\circ + 72^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Las cinco raíces son:

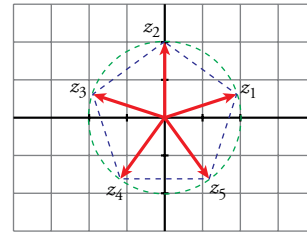
$$z_1 = 2_{18^\circ} = 1,9 + 0,6i$$

$$z_2 = 2_{90^\circ} = 2i$$

$$z_3 = 2_{162^\circ} = -1,9 + 0,6i$$

$$z_4 = 2_{234^\circ} = -1,2 - 1,6i$$

$$z_5 = 2_{306^\circ} = 1,2 - 1,6i$$



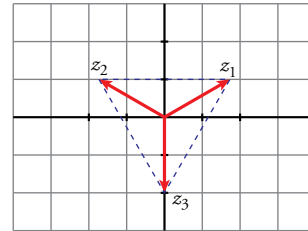
$$f) \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8 \cdot 90^\circ} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$z_1 = 2_{30^\circ}$$

$$z_2 = 2_{150^\circ}$$

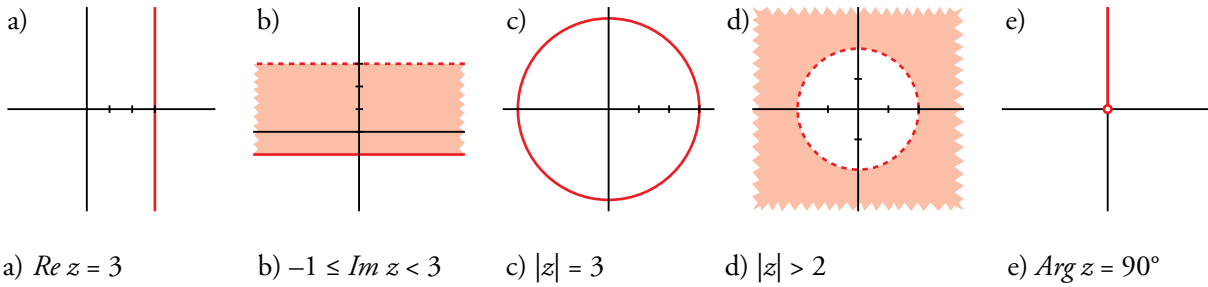
$$z_3 = 2_{270^\circ}$$



6 Descripciones gráficas con números complejos

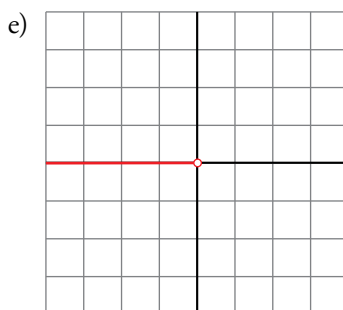
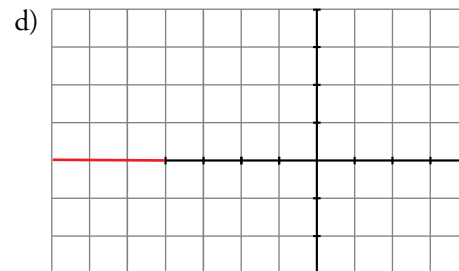
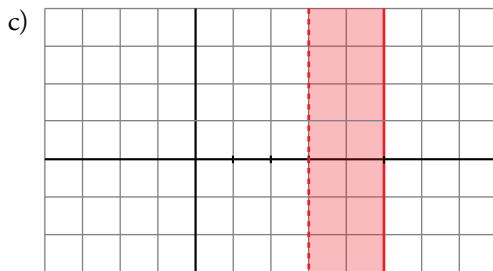
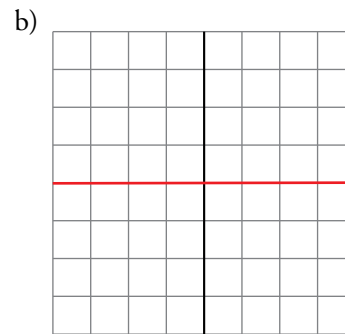
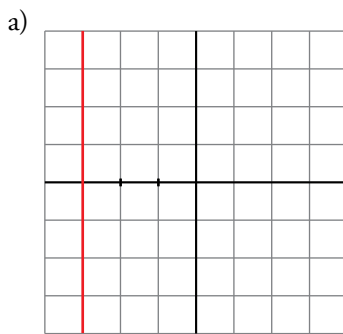
Página 158

1 Describe con palabras cada una de las familias (“son los números complejos cuya parte real vale ...”), escribe su ecuación o inecuación (usando Re , Im , $|$, arg) y da un representante de cada una de ellas.



2 Representa.

- a) $Re(z) = -3$ b) $Im(z) = 0$ c) $3 < Re(z) \leq 5$ d) $|z| < 4$ e) $Arg z = 180^\circ$



Ejercicios y problemas resueltos

Página 159

1. Operaciones con números complejos en forma binómica

Hazlo tú. Calcula el valor de a y b para que se verifique $a - 3i = \frac{1+bi}{5-3i}$.

Calculamos el segundo miembro de la igualdad.

$$\frac{1+bi}{5-3i} = \frac{(1+bi)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{5+3i+5bi+3bi^2}{25+9} = \frac{5-3b+(3+5b)i}{34}$$

Igualamos las partes real e imaginaria.

$$\begin{cases} a = \frac{5-3b}{34} \\ -3 = \frac{3+5b}{34} \rightarrow -102 = 3+5b \rightarrow b = -21 \end{cases}$$

$$a = \frac{5-3b}{34} \rightarrow a = \frac{5-3(-21)}{34} \rightarrow a = 2$$

2. Números complejos conjugados

Hazlo tú. El producto de dos números complejos conjugados es 48_0° y el argumento de su cociente es 60° . Hállalos.

Llamemos r_α y $r_{-\alpha}$ a los dos números complejos conjugados que buscamos.

$$r_\alpha \cdot r_{-\alpha} = 48_0^\circ \rightarrow \begin{cases} r^2 = 48^\circ \\ \alpha - \alpha = 0^\circ \end{cases} \rightarrow r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$r_\alpha / r_{-\alpha} = 1_{2\alpha} \rightarrow 2\alpha = 60^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Por tanto, los números son:

$$z_1 = (4\sqrt{3})_{30^\circ}$$

$$z_2 = (4\sqrt{3})_{-30^\circ} = (4\sqrt{3})_{330^\circ}$$

3. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo y los números complejos

Hazlo tú. Halla $\operatorname{sen} 15^\circ$ y $\operatorname{cos} 15^\circ$ a partir del cociente $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ}$.

$$1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ} = 1(\operatorname{cos} 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ) = \operatorname{cos} 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} 1_{45^\circ} &= 1(\operatorname{cos} 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1_{30^\circ} &= 1(\operatorname{cos} 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + i} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i + \sqrt{6}i + \sqrt{2}}{3 + 1} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i}{4}$$

Por tanto:

$$\operatorname{cos} 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \rightarrow \begin{cases} \operatorname{cos} 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Página 160

4. Operaciones con números complejos en forma polar

Hazlo tú. Calcula y representa las soluciones de $\sqrt[4]{(-2 + 2\sqrt{3}i)^3}$.

Pasamos $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ a forma polar teniendo en cuenta que se encuentra en el segundo cuadrante.

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120^\circ$$

Ahora calculamos $z^3 = (4_{210^\circ})^3 = (4^3)_{3 \cdot 120^\circ} = 64_{360^\circ} = 64_{0^\circ}$

Las raíces cuartas buscadas son:

$$\sqrt[4]{64_{0^\circ}} = \sqrt[4]{64_{0+360k}}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

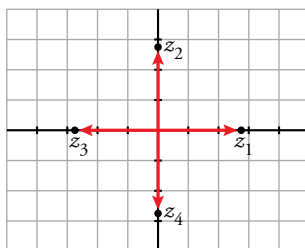
Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2\sqrt{2}_{0^\circ} = 2\sqrt{2}(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) = 2\sqrt{2}$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2\sqrt{2}_{90^\circ} = 2\sqrt{2}(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 2\sqrt{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2\sqrt{2}_{180^\circ} = 2\sqrt{2}(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = -2\sqrt{2}$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2\sqrt{2}_{270^\circ} = 2\sqrt{2}(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -2\sqrt{2}i$

La representación gráfica de las raíces es:



5. Resolución de ecuaciones en \mathbb{C}

Hazlo tú. Resuelve estas ecuaciones:

a) $z^4 + 1 = 0$

b) $iz + 3i - 2 = 1 + i$

a) $z^4 + 1 = 0 \rightarrow z^4 = -1 \rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$

$-1 = 1_{180^\circ}$. Por tanto, $z = \sqrt[4]{1_{180^\circ}} = 1_{(180+360k)/4}; \quad k = 0, 1, 2, 3$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 1_{45^\circ} = 1(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 1_{135^\circ} = 1(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{225^\circ} = 1(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{315^\circ} = 1(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $iz + 3i - 2 = 1 + i \rightarrow iz = 1 + i - 3i + 2 \rightarrow iz = 3 - 2i \rightarrow z = \frac{3 - 2i}{i} = \frac{(3 - 2i)i}{i \cdot i} = -2 - 3i$

Ejercicios y problemas guiados

Página 161

1. Números reales y números imaginarios

Hallar el valor que debe tener x para que el cociente $\frac{1+3xi}{3-4i}$ sea:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

$$\frac{1+3xi}{3-4i} = \frac{(1+3xi)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+9xi+12xi^2}{9+16} = \frac{3-12x+(4+9x)i}{25}$$

a) Para que sea real, la parte imaginaria debe ser 0.

$$4+9x=0 \rightarrow x = -\frac{4}{9}$$

b) Para que sea imaginario puro, la parte real debe ser 0.

$$3-12x=0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

2. Números complejos que cumplen ciertas condiciones

Hallar un número complejo que tenga el mismo módulo que $4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ y cuyo afijo esté en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.

El número buscado debe ser de la forma $a + ai$ para que esté en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.

$$|a + ai| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2}$$

$$|4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$$

Luego:

$$\sqrt{2a^2} = 5\sqrt{2} \rightarrow 2a^2 = 50 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = -5 \end{cases}$$

Por tanto, los números complejos buscados son $z_1 = 5 + 5i$ y $z_2 = -5 - 5i$.

3. Suma de números complejos expresados en forma polar

Calcular:

$$2\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\pi + 3\frac{3\pi}{2}$$

$$2\frac{\pi}{6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$\sqrt{3}\pi = \sqrt{3}(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) = -\sqrt{3}$$

Por tanto:

$$2\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\pi + 3\frac{3\pi}{2} = \sqrt{3} + i - (-\sqrt{3}) + (-3i) = 2\sqrt{3} - 2i \quad (\text{que está en el cuarto cuadrante})$$

$$|2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 330^\circ = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

4. Potencia y raíces de números complejos

Una de las raíces sextas de un número complejo z es $-\sqrt{3} + i$. Calcular z y el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas de z . Hallar esos afijos.

Como $z = (-\sqrt{3} + i)^6$, pasamos a forma polar el número $-\sqrt{3} + i$ que está en el segundo cuadrante.

$$|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 150^\circ$$

$$z = (2_{150^\circ})^6 = (2^6)_{6 \cdot 150^\circ} = 64_{900^\circ} = 64_{180^\circ}$$

$$\sqrt[6]{64_{180^\circ}} = \sqrt[6]{64}_{(180 \cdot 360k)/6}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Las raíces y los afijos son:

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = \sqrt{3} + i \rightarrow A(\sqrt{3}, 1)$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{90^\circ} = 2(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 2i \rightarrow B(0, 2)$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -\sqrt{3} + i \rightarrow C(-\sqrt{3}, 1)$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{210^\circ} = 2(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = -\sqrt{3} - i \rightarrow D(-\sqrt{3}, -1)$

Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{270^\circ} = 2(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -2i \rightarrow E(0, -2)$

Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{330^\circ} = 2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = \sqrt{3} - i \rightarrow F(\sqrt{3}, -1)$

La longitud del lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita, que es igual al módulo de cualquiera de las raíces, es decir, 2. El apotema del hexágono regular es $2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}$.

Por tanto, el área del hexágono es:

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ u}^2$$

5. Interpretación gráfica de igualdades con números complejos

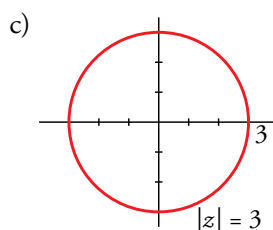
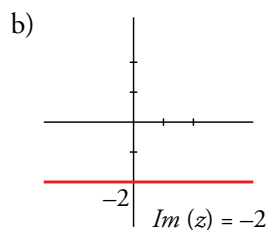
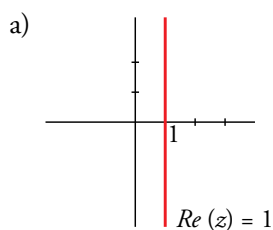
Representar, en cada caso, los números complejos que cumplen la condición dada.

a) $z + \bar{z} = 2$ b) $z - \bar{z} = -4i$ c) $|z| = 3$

a) Si $z = a + bi \rightarrow a + bi + a - bi = 2 \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1 \rightarrow \operatorname{Re}(z) = 1$ y se obtiene la figura a).

b) Si $z = a + bi \rightarrow a + bi - (a - bi) = -4i \rightarrow 2bi = -4i \rightarrow 2b = -4 \rightarrow b = -2 \rightarrow \operatorname{Im}(z) = -2$ y se obtiene la figura b).

c) Como $|z| = 3$ y el argumento puede ser cualquiera, se obtiene la circunferencia de radio 3.



Ejercicios y problemas propuestos

Página 162

Para practicar

Números complejos en forma binómica. Operaciones

1 Calcula.

a) $(3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i)$

b) $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i)$

c) $-2i - (4 - i)5i$

d) $(4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

$$\begin{aligned} \text{a) } (3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i) &= 6 - 3i + 4i - 2i^2 - 2 + 3i + 2i - 3i^2 = \\ &= 6 - 3i + 4i + 2 - 2 + 3i + 2i + 3 = 9 + 6i \end{aligned}$$

$$\text{b) } 3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i) = 3 - 2i + 2i^2 - 5 + 4i = 3 - 2i - 2 - 5 + 4i = -4 + 2i$$

$$\text{c) } -2i - (4 - i)5i = -2i - 20i + 5i^2 = -22i - 5 = -5 - 22i$$

$$\text{d) } (4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2 = 16 - (3i)^2 - 16 - 9i^2 + 24i = 16 + 9 - 16 + 9 + 24i = 18 + 24i$$

2 Los puntos A , B , C , D corresponden a los afijos de los números complejos z_1 , z_2 , z_3 , z_4 .

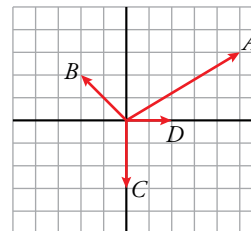
Efectúa y representa.

a) $z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3$

b) $(z_2 - z_1)^2$

c) $\frac{5(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3}$

d) $\frac{\overline{z_1 - z_2}}{z_3 + z_4}$



$$z_1 = 5 + 3i \quad z_2 = -2 + 2i \quad z_3 = -3i \quad z_4 = 2$$

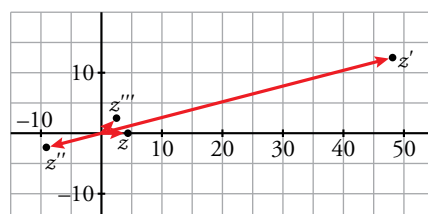
$$\text{a) } z = z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3 = (5 + 3i)2 - (-2 + 2i)(-3i) = 10 + 6i - 6i + 6i^2 = 4$$

$$\text{b) } z' = (z_2 - z_1)^2 = [-2 + 2i - (5 + 3i)]^2 = (-7 - i)^2 = 49 + 14i + i^2 = 48 + 14i$$

$$\text{c) } z'' = \frac{5(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3} = \frac{5(5 + 3i - 2)}{-2 + 2i + (-3i)} = \frac{5(3 + 3i)}{-2 - i} = \frac{(15 + 15i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = \frac{-30 + 15i - 30i + 15i^2}{4 + 1} = -9 - 3i$$

$$\text{d) } z''' = \frac{\overline{z_1 - z_2}}{z_3 + z_4} = \frac{\overline{5 + 3i - (-2 - 2i)}}{2 - 3i} = \frac{\overline{7 - i}}{2 - 3i} = \frac{(7 - i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{14 + 21i - 2i - 3i^2}{4 + 9} = \frac{18 + 19i}{13}$$

Representación gráfica:



3 Calcula en forma binómica.

a) $\frac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$ b) $\frac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$ c) $\frac{2+5i}{3-2i}(1-i)$ d) $\frac{1+i}{2-i} + \frac{-3-2i}{1+3i}$

a) $\frac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i} = \frac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i} = \frac{18+6i}{2-2i} = \frac{(18+6i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} =$
 $= \frac{36+36i+12i-12}{4+4} = \frac{24+48i}{8} = 3+6i$

b) $\frac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)} = \frac{-2+3i}{-4+4i-2i-2} = \frac{-2+3i}{-6+2i} = \frac{(-2+3i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)} =$
 $= \frac{12+4i-18i+6}{36+4} = \frac{18-14i}{40} = \frac{9-7i}{20} = \frac{9}{20} - \frac{7}{20}i$

c) $\frac{2+5i}{3-2i}(1-i) = \frac{2-2i+5i+5}{3-2i} = \frac{7+3i}{3-2i} = \frac{(7+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{21+14i+9i-6}{9+4} = \frac{15+23i}{13} = \frac{15}{13} + \frac{23}{13}i$

d) $\frac{1+i}{2-i} + \frac{-3-2i}{1+3i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \frac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2+i+2i-1}{4+1} + \frac{-3+9i-2i-6}{1+9} =$
 $= \frac{1+3i}{5} + \frac{-9+7i}{10} = \frac{2+6i-9+7i}{10} = \frac{-7+13i}{10} = \frac{-7}{10} + \frac{13}{10}i$

4 Dados los números complejos $z = 1 - 3i$, $w = -3 + 2i$, $t = -2i$, calcula:

a) zwt b) $zt - w(t+z)$ c) $\frac{w}{z}t$
 d) $\frac{2z-3t}{w}$ e) $\frac{3z+it}{3}w$ f) $\frac{z^2-wt^2}{2}$

$z = 1 - 3i$; $w = -3 + 2i$; $t = -2i$

a) $zwt = (1-3i)(-3+2i)(-2i) = (-3+2i+9i-6i^2)(-2i) = (3+11i)(-2i) = -6i-22i^2 = 22-6i$

b) $zt - w(t+z) = (1-3i)(-2i) - (-3+2i)(-2i+1-3i) = (-2i+6i^2) - (-3+3i)(1-5i) =$
 $= (-6-2i) - (-3+2i)(1-5i) = (-6-2i) - (-3+15i+2i-10i^2) =$
 $= (-6-2i) - (7+17i) = -13-19i$

c) $\frac{w}{z}t = \frac{-3+2i}{1-3i}(-2i) = \frac{6i-4i^2}{1-3i} = \frac{(4+6i)(1+3i)}{1^2-(3i)^2} = \frac{4+12i+6i+18i^2}{1+9} =$
 $= \frac{-14+18i}{10} = -\frac{7}{5} + \frac{9}{5}i$

d) $\frac{2z-3t}{w} = \frac{2(1-3i)-3(-2i)}{-3+2i} = \frac{2-6i+6i}{-3+2i} = \frac{2(-3-2i)}{(-3)^2-(2i)^2} = \frac{-6-4i}{9+4} = -\frac{6}{13} - \frac{4}{13}i$

e) $\frac{3z+it}{3}w = \frac{3(1-3i)+i(-2i)}{3}(-3+2i) = \frac{3-9i+2}{3}(-3+2i) =$
 $= \left(\frac{5}{3}-3i\right)(-3+2i) = -5 + \frac{10}{3}i + 9i - 6i^2 = 1 + \frac{37}{3}i$

f) $\frac{z^2-wt^2}{2} = \frac{(1-3i)^2 - (-3+2i)(-2i)^2}{2} = \frac{1-6i+9i^2 - (-3+2i)(-4)}{2} =$
 $= \frac{-8-6i-12+8i}{2} = \frac{-20}{2} + \frac{2}{2}i = -10+i$

5 Calcula.

a) i^{37} b) i^{126} c) i^{-7} d) i^{64} e) i^{-216}

a) $i^{37} = i^1 = i$ b) $i^{126} = i^2 = -1$ c) $i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i} = i$ d) $i^{64} = i^0 = 1$ e) $i^{-216} = \frac{1}{i^{216}} = \frac{1}{i^0} = \frac{1}{1} = 1$

6 Dado el número complejo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, prueba que:

a) $1 + z + z^2 = 0$ b) $\frac{1}{z} = z^2$

a) $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

b) $\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} = \frac{2}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)} =$
 $= \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{1 + 3} = \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (lo habíamos calculado en a).

Por tanto; $\frac{1}{z} = z^2$.

7 Calcula m y n para que se verifique la igualdad $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$.

$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$

$(2 + n) + (m + 5)i = 7 - 2i \rightarrow \begin{cases} 2 + n = 7 \\ m + 5 = -2 \end{cases} \begin{matrix} n = 5 \\ m = -7 \end{matrix}$

8 Determina k para que el cociente $\frac{k+i}{1+i}$ sea igual a $2 - i$.

$\frac{k+i}{1+i} = \frac{(k+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{k - ki + i + 1}{1+1} = \frac{(k+1) + (1-k)i}{2} = \left(\frac{k+1}{2}\right) + \left(\frac{1-k}{2}\right)i = 2 - i \rightarrow \begin{cases} \frac{k+1}{2} = 2 \rightarrow k = 3 \\ \frac{1-k}{2} = -1 \rightarrow k = 3 \end{cases}$

Por tanto, $k = 3$.

9 Dados los complejos $2 - ai$ y $3 - bi$, halla a y b para que su producto sea igual a $8 + 4i$.

$(2 - ai)(3 - bi) = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai - ab = 8 + 4i$

$(6 - ab) + (-2b - 3a)i = 8 + 4i$

$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -2b - 3a = 4 \end{cases}$

$b = \frac{4 + 3a}{-2}$

$6 - a\left(\frac{4 + 3a}{-2}\right) = 8 \rightarrow 6 + \frac{4a + 3a^2}{2} = 8$

$\frac{4a + 3a^2}{2} = 2 \rightarrow 4a + 3a^2 = 4 \rightarrow 3a^2 + 4a - 4 = 0$

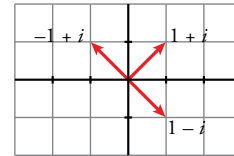
$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \begin{cases} a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow b = -3 \\ a = \frac{-12}{6} = -2 \rightarrow b = 1 \end{cases}$

■ Números complejos en forma polar

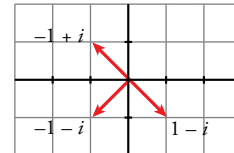
10 Representa estos números complejos, sus opuestos y sus conjugados. Exprésalos en forma polar:

- a) $1 - i$ b) $-1 + i$ c) $\sqrt{3} + i$ d) $-\sqrt{3} - i$
 e) -4 f) $2i$ g) $-\frac{3}{4}i$ h) $2 + 2\sqrt{3}i$

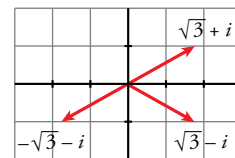
a) $1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ}$
 Opuesto: $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$
 Conjugado: $1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$



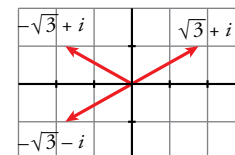
b) $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$
 Opuesto: $1 - i = \sqrt{2}_{315^\circ}$
 Conjugado: $-1 - i = \sqrt{2}_{225^\circ}$



c) $\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$
 Opuesto: $-\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$
 Conjugado: $\sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$



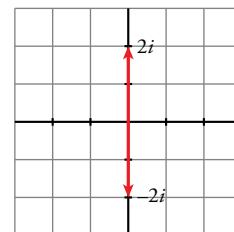
d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$
 Opuesto: $\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ}$
 Conjugado: $-\sqrt{3} + i = 2_{150^\circ}$



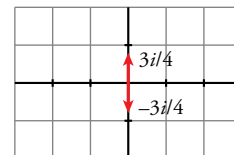
e) $-4 = 4_{180^\circ}$
 Opuesto: $4 = 4_0^\circ$
 Conjugado: $-4 = 4_{180^\circ}$



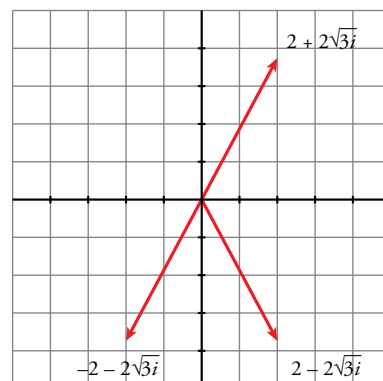
f) $2i = 2_{90^\circ}$
 Opuesto: $-2i = 2_{270^\circ}$
 Conjugado: $-2i = 2_{270^\circ}$



g) $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{270^\circ}$
 Opuesto: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90^\circ}$
 Conjugado: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90^\circ}$



h) $2 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{60^\circ}$
 Opuesto: $-2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{240^\circ}$
 Conjugado: $2 - 2\sqrt{3}i = \sqrt{14}_{300^\circ}$



11 Escribe en forma binómica estos números complejos:

- a) 2_{45° b) $3_{(\pi/6)}$ c) $\sqrt{2}_{180^\circ}$ d) 17_0°
 e) $1_{(\pi/2)}$ f) 5_{270° g) 1_{150° h) 4_{100°

a) $2_{45^\circ} = 2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

b) $3_{(\pi/6)} = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

c) $\sqrt{2}_{180^\circ} = \sqrt{2}(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = \sqrt{2}(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$

d) $17_0^\circ = 17$

e) $1_{(\pi/2)} = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$

f) $5_{270^\circ} = -5i$

g) $1_{150^\circ} = \cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

h) $4_{100^\circ} = 4(\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ) = 4(-0,17 + i \cdot 0,98) = -0,69 + 3,94i$

12 Dados los números complejos: $z_1 = 2_{270^\circ}$, $z_2 = 4_{120^\circ}$; $z_3 = 3_{315^\circ}$, calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_2 \cdot z_3$ c) $z_1 \cdot z_3$

d) $\frac{z_3}{z_1}$ e) $\frac{z_2}{z_1}$ f) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$

g) z_1^2 h) z_2^3 i) z_3^4

a) $z_1 \cdot z_2 = 8_{30^\circ}$ b) $z_2 \cdot z_3 = 12_{75^\circ}$ c) $z_1 \cdot z_3 = 6_{225^\circ}$

d) $\frac{z_3}{z_1} = 1,5_{45^\circ}$ e) $\frac{z_2}{z_1} = 2_{-150^\circ} = 2_{210^\circ}$ f) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} = 1,5_{105^\circ}$

g) $z_1^2 = 4_{180^\circ}$ h) $z_2^3 = 64_0^\circ$ i) $z_3^4 = 81_{180^\circ}$

13 Expresa en forma polar y calcula.

a) $(-1 - i)^5$ b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i}$ c) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[3]{8i}$ e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^6$ f) $(3 - 4i)^3$

a) $(-1 - i)^5 = (\sqrt{2}_{225^\circ})^5 = 4\sqrt{2}_{1125^\circ} = 4\sqrt{2}_{45^\circ} = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4 + 4i$

b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{300^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{(300^\circ + 360^\circ n)/4} = \sqrt[4]{2}_{75^\circ + 90^\circ n}$; $n = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt[4]{2}_{75^\circ}$ $\sqrt[4]{2}_{165^\circ}$ $\sqrt[4]{2}_{255^\circ}$ $\sqrt[4]{2}_{345^\circ}$

c) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_0^\circ} = \sqrt[6]{2^6}_{(360^\circ k)/4} = 2\sqrt{2}_{90^\circ k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $2\sqrt{2}_0^\circ = 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{90^\circ} = 2\sqrt{2}i$ $2\sqrt{2}_{180^\circ} = -2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{270^\circ} = -2\sqrt{2}i$

d) $\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_90^\circ} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{30^\circ + 120^\circ k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son: $2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i$ $2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i$ $2_{270^\circ} = -2i$

e) $(-2\sqrt{3} + 2i)^6 = (4_{150^\circ})^6 = 4096_{900^\circ} = 4096_{180^\circ} = -4096$

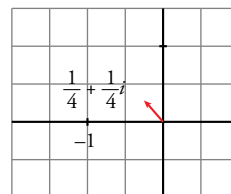
f) $(3 - 4i)^3 = (5_{306^\circ 52'})^3 = 125_{920^\circ 36'} = 125_{200^\circ 36'}$

14 Calcula y representa gráficamente el resultado.

a) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$

a) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}315^\circ}{230^\circ}\right)^3 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285^\circ}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855^\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135^\circ} =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{4} (\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$



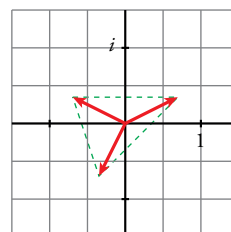
b) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}} = \sqrt[3]{\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}} = \sqrt[3]{\frac{1+3i}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i} =$
 $= \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71^\circ 34'}} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71^\circ 34' + 360^\circ k)/3} = \sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{23^\circ 51' + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{23^\circ 51'} = 0,785 + 0,347i$

$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{143^\circ 51'} = -0,693 + 0,56i$

$\sqrt[6]{\frac{2}{5}}_{263^\circ 51'} = -0,092 - 0,853i$



15 Calcula y representa las soluciones.

a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}$

b) $\sqrt[4]{-16}$

c) $\sqrt[3]{-27i}$

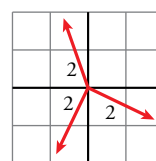
a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i} = \sqrt[3]{8300^\circ} = 2_{(300^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{100^\circ + 120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$2_{100^\circ} = -0,35 + 1,97i$

$2_{220^\circ} = -1,53 - 1,26i$

$2_{340^\circ} = 1,88 - 0,68i$

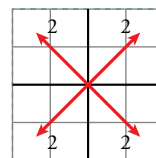


b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16180^\circ} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ + 90^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ $2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ $2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$



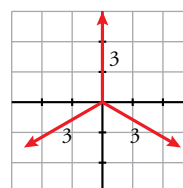
c) $\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27270^\circ} = 3_{(270^\circ + 360^\circ k)/3}; k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90^\circ} = 3i$

$3_{210^\circ} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

$3_{330^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$



16 Calcula pasando a forma polar.

a) $(1 + i\sqrt{3})^5$

b) $\frac{8}{(1-i)^5}$

c) $\sqrt[6]{-64}$

d) $\sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}}$

a) $(1 + i\sqrt{3})^5 = (2_{60^\circ})^5 = 32_{300^\circ} = 32(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) = 32\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}i$

b) $\frac{8}{(1-i)^5} = \frac{8_{0^\circ}}{(\sqrt{2}_{315^\circ})^5} = \frac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{1575^\circ}} = \frac{8_{0^\circ}}{4\sqrt{2}_{135^\circ}} = \left(\frac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135^\circ} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225^\circ} = \sqrt{2}_{225^\circ} = \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

c) $\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}} = \sqrt[6]{2^6}_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 2_{30^\circ + 60^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$2_{30^\circ} = \sqrt{3} + i$ $2_{90^\circ} = 2i$ $2_{150^\circ} = -\sqrt{3} + i$

$2_{210^\circ} = -\sqrt{3} - i$ $2_{270^\circ} = -2$ $2_{330^\circ} = \sqrt{3} - i$

d) $\sqrt{\frac{2-2i}{-3+3i}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}_{315^\circ}}{3\sqrt{2}_{135^\circ}}} = \left(\frac{2}{3}\right)_{180^\circ} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{(180^\circ + 360^\circ k)/2} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^\circ + 180^\circ k}; k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{90^\circ} = \sqrt{\frac{2}{3}}i$ $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{270^\circ} = -\sqrt{\frac{2}{3}}i$

17 Expresa en forma polar z , su opuesto $-z$, y su conjugado \bar{z} en cada uno de estos casos:

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$

b) $z = -2 - 2i$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i$

d) $z = -5$

e) $z = 7i$

f) $z = -3 - 4i$

a) $z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300^\circ}; -z = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^\circ}; \bar{z} = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$

b) $z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225^\circ}; -z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45^\circ}; \bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135^\circ}$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150^\circ}; -z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330^\circ}; \bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210^\circ}$

d) $z = -5 = 5_{180^\circ}; -z = 5 = 5_{0^\circ}; \bar{z} = -5 = 5_{180^\circ}$

e) $z = 7i = 7_{90^\circ}; -z = -7i = 7_{270^\circ}; \bar{z} = -7i = 7_{270^\circ}$

f) $z = -3 - 4i = 5_{233,13^\circ}; -z = 3 + 4i = 5_{53,13^\circ}; \bar{z} = -3 + 4i = 5_{126,87^\circ}$

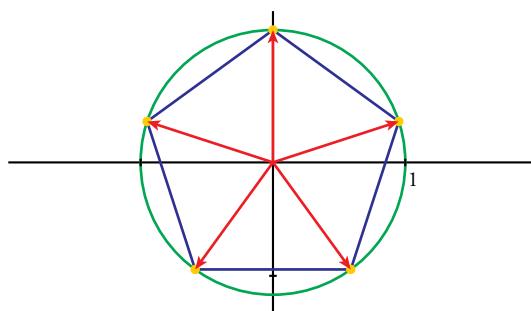
18 Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:

- a) $\sqrt[5]{i}$ b) $\sqrt[6]{-1}$ c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$

a) $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90^\circ}} = 1_{(90^\circ + 360^\circ k)/5} = 1_{18^\circ + 72^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son: $1_{18^\circ}; 1_{90^\circ}; 1_{162^\circ}; 1_{234^\circ}; 1_{306^\circ}$

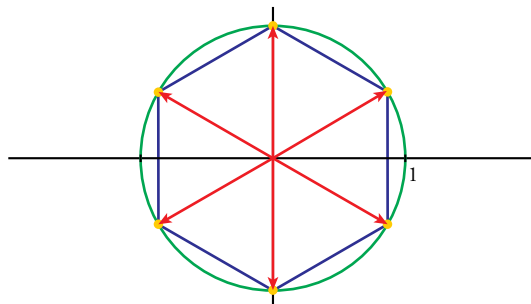
Representación del polígono (pentágono):



b) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180^\circ}} = 1_{(180^\circ + 360^\circ k)/6} = 1_{30^\circ + 60^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son: $1_{30^\circ}; 1_{90^\circ}; 1_{150^\circ}; 1_{210^\circ}; 1_{270^\circ}; 1_{330^\circ}$

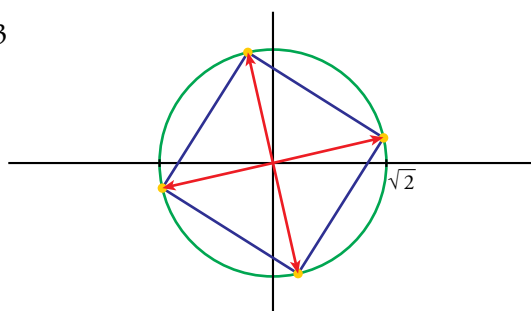
Representación del polígono (hexágono):



c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[4]{4_{30^\circ}} = \sqrt[4]{2^2_{(30^\circ + 360^\circ k)/4}} = \sqrt{2}_{7^\circ 30' + 90^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt{2}_{7^\circ 30'}; \sqrt{2}_{97^\circ 30'}; \sqrt{2}_{187^\circ 30'}; \sqrt{2}_{277^\circ 30'}$

Representación del polígono (cuadrado):



19 Calcula \bar{z}^5 y $\sqrt[4]{z}$, siendo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Primero, pasamos z a forma polar:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120^\circ \text{ porque } z \text{ está en el segundo cuadrante.}$$

Luego $z = 1_{120^\circ}$.

$$\bar{z}^5 = (1_{-120^\circ})^5 = (1_{240^\circ})^5 = (1^5)_{5 \cdot 240^\circ} = 1_{120^\circ} = z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1_{240^\circ}} = (\sqrt[4]{1})_{(240^\circ + 360^\circ k)/4}; k = 0, 1, 2, 3$$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 1_{60^\circ} = 1(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 1_{150^\circ} = 1(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{240^\circ} = 1(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{330^\circ} = 1(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Página 163

■ Ecuaciones y sistemas en \mathbb{C}

20 Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

- a) $z^2 + 4 = 0$
- b) $z^2 + z + 4 = 0$
- c) $z^2 + 3z + 7 = 0$
- d) $z^2 - z + 1 = 0$

$$a) z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i \begin{cases} z_1 = -2i \\ z_2 = 2i \end{cases}$$

$$b) z^2 + z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2} \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}$$

$$c) z^2 + 3z + 7 = 0 \rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19}i}{2} \begin{cases} z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i \\ z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases}$$

$$d) z^2 - z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

21 Resuelve estas ecuaciones:

- a) $z^5 + 32 = 0$
- b) $iz^3 - 27 = 0$
- c) $z^3 + 8i = 0$
- d) $iz^4 + 4 = 0$

$$a) z^5 + 32 = 0 \rightarrow z^5 = -32$$

$$z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/5} = 2_{36^\circ + 72^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Las cinco raíces son:

$$2_{36^\circ} \quad 2_{108^\circ} \quad 2_{180^\circ} \quad 2_{252^\circ} \quad 2_{324^\circ}$$

$$b) iz^3 - 27 = 0 \rightarrow z^3 + 27i = 0 \rightarrow z^3 = -27i$$

$$z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = 3_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 3_{90^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$3_{90^\circ} \quad 3_{210^\circ} \quad 3_{330^\circ}$$

$$c) z^3 + 8i = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8_{270^\circ}} = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/3} = 2_{90^\circ + 120^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2$$

Las tres raíces son:

$$2_{90^\circ} = 2i \quad 2_{210^\circ} = -\sqrt{3} - i \quad 2_{330^\circ} = \sqrt{3} - i$$

$$d) iz^4 + 4 = 0 \rightarrow z^4 - 4i = 0 \rightarrow z^4 = 4i$$

$$z = \sqrt[4]{4i} = \sqrt[4]{4_{90^\circ}} = \sqrt{2}_{(90^\circ + 360^\circ k)/4} = \sqrt{2}_{22^\circ 30' + 90^\circ k}; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$\sqrt{2}_{22^\circ 30'} = 1,3 + 0,5i$$

$$\sqrt{2}_{112^\circ 30'} = -0,5 + 1,3i$$

$$\sqrt{2}_{202^\circ 30'} = -1,3 - 0,5i$$

$$\sqrt{2}_{292^\circ 30'} = 0,5 - 1,3i$$

22 Resuelve las siguientes ecuaciones en \mathbb{C} :

a) $z^2 + 4i = 0$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

c) $2z^2 + 10 = 0$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

a) $z^2 + 4i = 0 \rightarrow z^2 = -4i \rightarrow z = \sqrt{-4i} = \sqrt{4}_{270^\circ} \rightarrow z = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/2}; k = 0, 1$

Las dos raíces son: $z_1 = 2_{135^\circ}, z_2 = 2_{315^\circ}$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{1 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \begin{cases} z_1 = 1 - 2i \\ z_2 = 1 + 2i \end{cases}$

c) $2z^2 + 10 = 0 \rightarrow 2z^2 = -10 \rightarrow z^2 = -5 \rightarrow z = \pm \sqrt{5}i \begin{cases} z_1 = -\sqrt{5}i \\ z_2 = \sqrt{5}i \end{cases}$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$z^2 = t$

$t^2 + 13t + 36 = 0$

$t = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{-13 \pm 5}{2} \begin{cases} t = -4 \\ t = -9 \end{cases}$

$z^2 = -4 \rightarrow z = \pm 2i$

$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm 3i$

Las soluciones son: $2i = 2_{90^\circ}; -2i = 2_{270^\circ}; 3i = 3_{90^\circ}; -3i = 3_{270^\circ}$

23 Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 - 1 = 0$

b) $z^4 + 16 = 0$

c) $z^4 - 8z = 0$

a) $z^4 - 1 = 0 \rightarrow z^4 = 1 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}_{0^\circ} = 1_{360^\circ k/4} = 1_{90^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$1_{0^\circ} = 1$

$1_{90^\circ} = i$

$1_{180^\circ} = -1$

$1_{270^\circ} = -i$

b) $z^4 + 16 = 0 \rightarrow z^4 = -16 \rightarrow z^4 = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}_{180^\circ} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ + 90^\circ k}; k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$2_{135^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$2_{315^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

c) $z^4 - 8z = 0 \rightarrow z(z^3 - 8) = 0 \begin{cases} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{cases}$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}_{0^\circ} = 2_{(360^\circ k)/3} = 2_{120^\circ k}; k = 0, 1, 2$

Las soluciones de la ecuación son: $0; 2_{0^\circ} = 2; 2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i; 2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i$

24 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 3z - w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} 3z - w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases} \xrightarrow{-3 \cdot (1.a)} \begin{cases} -9z + 3w = -3 + 3i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$$

Sumando obtenemos: $-7z = 5 - 5i \rightarrow z = -\frac{5}{7} + \frac{5}{7}i$

$3\left(-\frac{5}{7} + \frac{5}{7}i\right) - w = 1 - i \rightarrow w = -\frac{15}{7} + \frac{15}{7}i - 1 + i = -\frac{22}{7} + \frac{22}{7}i$

b)
$$\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases} \xrightarrow{-2 \cdot (1.a)} \begin{cases} -2z - 6w = -16 + 6i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases}$$

Sumando obtenemos: $-5w = -10 + 5i \rightarrow w = 2 - i$

$z + 3(2 - i) = 8 - 3i \rightarrow z = 8 - 3i - 6 + 3i = 2$

c)
$$\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases} \xrightarrow{2 \cdot (2.a)} \begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 6z - 4w = 22i \end{cases}$$

Sumando obtenemos: $11z = 33i \rightarrow z = 3i$

$5(3i) + 4w = 11i \rightarrow 4w = -4i \rightarrow w = -i$

d)
$$\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases} \xrightarrow{-2 \cdot (1.a)} \begin{cases} -4z + 10w = 10 - 4i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases}$$

Sumando obtenemos: $7w = 7 - 14i \rightarrow w = 1 - 2i$

$2z - 5(1 - 2i) = -5 + 2i \rightarrow 2z = -5 + 2i + 5 - 10i \rightarrow z = -4i$

Para resolver

25 Calcula a y b de modo que se verifique:

$(a + bi)^2 = 3 + 4i$

$(a + bi)^2 = 3 + 4i \rightarrow a^2 + bi^2 + 2abi = 3 + 4i \rightarrow$

$$\rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \rightarrow b = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a} \end{cases}$$

$a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \rightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \rightarrow a^4 - 4 = 3a^2 \rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$

$a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$a = -2 \rightarrow b = -1$

$a = 2 \rightarrow b = 1$

26 Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea un número:

a) imaginario puro. b) real.

$$(3 - 6i)(4 + bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b = (12 + 6b) + (3b - 24)i$$

a) $12 + 6b = 0 \rightarrow b = -2$

b) $3b - 24 = 0 \rightarrow b = 8$

27 Determina a para que $(a - 2i)^2$ sea un número imaginario puro.

$$(a - 2i)^2 = a^2 + 4i^2 - 4ai = (a^2 - 4) - 4ai$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$a^2 - 4 = 0 \rightarrow a = \pm 2 \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

28 Calcula x para que el resultado de $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.

$$\begin{aligned} (x + 2 + ix)(x - i) &= x^2 - xi + 2x - 2i + x^2i - xi^2 = \\ &= x^2 - xi + 2x - 2i + ix^2 + x = (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i \end{aligned}$$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

29 Calcula el valor que debe tener a para que el módulo del cociente $\frac{a+2i}{1-i}$ sea $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$$z = \frac{a+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{a+ai+2i+2i^2}{1+1} = \frac{a-2+(a+2)i}{2}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{a-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+4}{2}} \rightarrow \sqrt{\frac{a^2+4}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{a^2+4}{2} = \frac{9}{2} \rightarrow a^2 = 5 \begin{cases} a_1 = \sqrt{5} \\ a_2 = -\sqrt{5} \end{cases}$$

30 La suma de dos números complejos es $3 + i$. La parte real del primero es 2 y el cociente entre este y el segundo es un número real. Hállalos.

Sean $z = 2 + bi$ y $w = c + di$ los números complejos buscados.

$$z + w = 3 + i \rightarrow 2 + bi + c + di = 3 + i \rightarrow \begin{cases} 2 + c = 3 \rightarrow c = 1 \\ b + d = 1 \quad (1) \end{cases}$$

Por otro lado:

$$\frac{z}{w} = k \rightarrow z = kw \rightarrow 2 + bi = k(1 + di) \rightarrow \begin{cases} 2 = k \\ bi = kdi \rightarrow b = 2d \end{cases}$$

Ahora sustituimos en (1):

$$b + d = 1 \rightarrow 2d + d = 1 \rightarrow d = \frac{1}{3} \rightarrow b = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Los números buscados son $z = 2 + \frac{2}{3}i$ y $w = 1 + \frac{1}{3}i$.

31 Si $z = (i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{10})(3 + ki)$, halla el valor de k para que el módulo de z sea 5.

$i^0 + i^1 + \dots + i^{10} = \frac{i \cdot i^{10} - i^0}{i - 1}$ porque es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón i .

$$\frac{i \cdot i^{10} - i^0}{i - 1} = \frac{i^{11} - i^0}{i - 1} = \frac{-i - 1}{i - 1} = \frac{(-i - 1)(i + 1)}{(i - 1)(i + 1)} = \frac{-i^2 - i - i - 1}{i^2 - 1} = \frac{-2i}{-2} = i$$

Por tanto: $z = i \cdot (3 + ki) = -k + 3i$

$$|z| = \sqrt{(-k)^2 + 3^2} = \sqrt{k^2 + 9}$$

$$|z| = 5 \rightarrow \sqrt{k^2 + 9} = 5 \rightarrow k_1 = 2, k_2 = -2$$

32 ¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\frac{x-4i}{x+i}$?

$$\frac{x-4i}{x+i} = \frac{(x-4i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{x^2-4}{x^2+1} + \frac{-5x}{x^2+1}i$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$\frac{x^2-4}{x^2+1} = 0 \rightarrow x^2-4=0 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

33 Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos 8.

* Llámalos r_α y s_β y escribe las condiciones que los relacionan.

$$\frac{r}{s} = 3$$

$$r + s = 8$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\alpha - \beta = 0^\circ$$

Hallamos sus módulos:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8; 4s = 8; s = 2; r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha = \beta; 2\beta = \frac{\pi}{3}; \beta = \frac{\pi}{6}; \alpha = \frac{\pi}{6} \end{array}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y $2_{\pi/6}$

34 El producto de dos números complejos es 2_{90° y el cubo del primero dividido por el otro es $(1/2)_{0^\circ}$. Hállalos.

Llamamos a los números: $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 2_{90^\circ} \begin{cases} r \cdot s = 2 \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{s_\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0^\circ} \begin{cases} r^3/s = \frac{1}{2} \\ 3\alpha - \beta = 90^\circ \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ \frac{r^3}{s} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \cdot s = 2 \\ s = 2r^3 \end{array} \left. \begin{array}{l} r \cdot 2r^3 = 2 \rightarrow r^4 = 1 \rightarrow r = \begin{cases} 1 \rightarrow s = 2 \cdot 1^3 = 2 \\ -1 \text{ (no vale)} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^\circ \\ 3\alpha - \beta = 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow 4\alpha = 90^\circ + 360^\circ k \rightarrow \alpha = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{4}; k = 0, 1, 2, 3$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

Hay cuatro soluciones:

$$z_1 = 1_{22^\circ 30'} \rightarrow w_1 = 2z_1^3 = 2 \cdot 1_{67^\circ 30'} = 2_{67^\circ 30'}$$

$$z_2 = 1_{112^\circ 30'} \rightarrow w_2 = 2_{337^\circ 30'}$$

$$z_3 = 1_{202^\circ 30'} \rightarrow w_3 = 2_{607^\circ 30'} = 2_{247^\circ 30'}$$

$$z_4 = 1_{292^\circ 30'} \rightarrow w_4 = 2_{877^\circ 30'} = 2_{157^\circ 30'}$$

35 El producto de dos números complejos es -27 y uno de ellos es igual al cuadrado del otro. Cálalos.

Llamemos z y w a los complejos buscados.

$$\begin{cases} zw = -27 \rightarrow w^3 = -27 \rightarrow w = \sqrt[3]{-27} \rightarrow w = \sqrt[3]{27}_{180^\circ} = 3_{(180^\circ \cdot 360^\circ k)/3}; k = 0, 1, 2 \\ z = w^2 \end{cases}$$

• Si $k = 0 \rightarrow w_1 = 3_{60^\circ} = 3(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$$z_1 = w_1^2 = (3_{60^\circ})^2 = 9_{120^\circ} = 9(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = -\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i$$

• Si $k = 1 \rightarrow w_2 = 3_{180^\circ} = 3(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = -3$

$$z_2 = w_2^2 = (3_{180^\circ})^2 = 9_{0^\circ} = 9(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) = 9$$

• Si $k = 2 \rightarrow w_3 = 3_{300^\circ} = 3(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$$z_3 = w_3^2 = (3_{300^\circ})^2 = 9_{240^\circ} = 9(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = -\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i$$

Hemos obtenido tres soluciones del problema.

36 Halla, en función de x , el módulo de $z = \frac{1+xi}{1-xi}$.

Demuestra que $|z| = 1$ para cualquier valor de x .

$$|z| = \left| \frac{1+xi}{1-xi} \right| = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

O bien:

$$z = \frac{1+xi}{1-xi} = \frac{(1+xi)(1+xi)}{(1-xi)(1+xi)} = \frac{1+x^2+2xi}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}i$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+x^4-2x^2+4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{1} = 1$$

37 Halla dos números complejos conjugados sabiendo que su suma es 8 y que la suma de sus módulos es 10.

$$\left. \begin{array}{l} z + \bar{z} = 8 \\ |z| + |\bar{z}| = 10 \end{array} \right\} \text{ Como } |z| = |\bar{z}| \rightarrow |z| = 5$$

Si llamamos:

$$z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2} = 5 \rightarrow 16 + b^2 = 25 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Hay dos soluciones:

$$z_1 = 4 + 3i \rightarrow \bar{z}_1 = 4 - 3i$$

$$z_2 = 4 - 3i \rightarrow \bar{z}_2 = 4 + 3i$$

38 Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo que se forma al unir esos tres puntos.

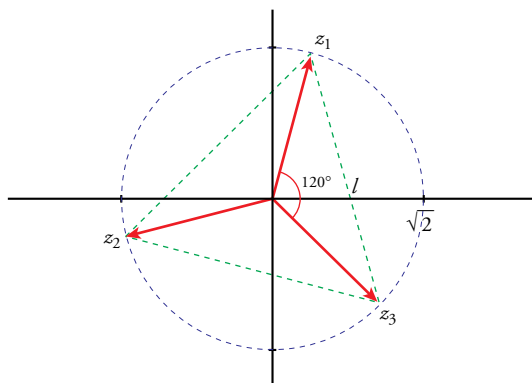
$$\sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8} 225^\circ} = \sqrt{2} (225^\circ + 360^\circ k) / 3 = \sqrt{2} 75^\circ + 120^\circ k$$

Las tres raíces son:

$$z_1 = \sqrt{2} 75^\circ$$

$$z_2 = \sqrt{2} 195^\circ$$

$$z_3 = \sqrt{2} 315^\circ$$



Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno:

$$l^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos 120^\circ = 2 + 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6$$

$$l = \sqrt{6}$$

39 Dibuja el hexágono cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[6]{-64}$.

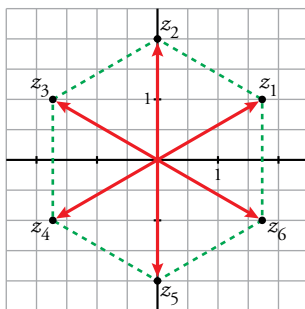
¿Obtienes el mismo hexágono con los afijos de $\sqrt[6]{64i}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[6]{-64i}$?

Compruébalo y representa los resultados obtenidos.

$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64 180^\circ} = 2_{(180^\circ + 360^\circ k) / 6}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = \sqrt{3} + i$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{90^\circ} = 2(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 2i$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{210^\circ} = 2(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = -\sqrt{3} - i$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{270^\circ} = 2(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -2i$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{330^\circ} = 2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = \sqrt{3} - i$

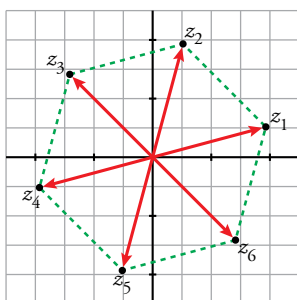
Representación gráfica:



No se obtiene el mismo hexágono porque las raíces sextas de dos números distintos son diferentes. Se obtienen hexágonos girados con respecto al primero. Veamos los siguientes casos:

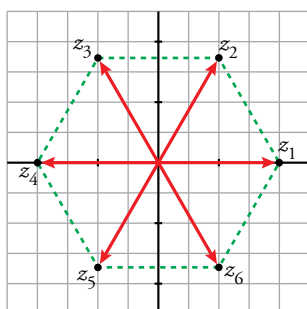
$$\sqrt[6]{64i} = \sqrt[6]{64_{90^\circ}} = 2_{(90^\circ + 360^\circ k)/6}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{15^\circ}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{75^\circ}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{135^\circ}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{195^\circ}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{255^\circ}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{315^\circ}$



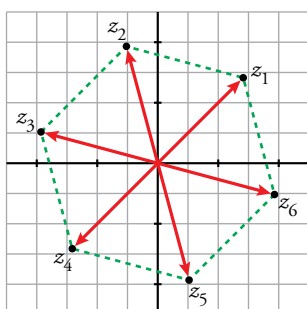
$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0^\circ}} = 2_{(0^\circ + 360^\circ k)/6}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{0^\circ}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{60^\circ}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{120^\circ}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{180^\circ}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{240^\circ}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{300^\circ}$

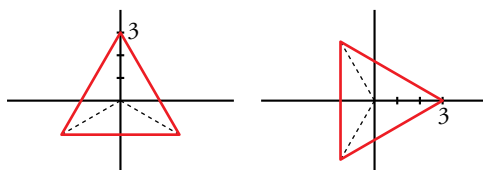


$$\sqrt[6]{-64i} = \sqrt[6]{64_{270^\circ}} = 2_{(270^\circ + 360^\circ k)/6}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{45^\circ}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{105^\circ}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{165^\circ}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{225^\circ}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{285^\circ}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{345^\circ}$



40 Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos triángulos equiláteros.



Como los afijos están en los vértices de un triángulo equilátero, los números complejos son:

a) $z_1 = 3_{90^\circ} = 3i$

$$z_2 = 3_{210^\circ} = 3(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$z_3 = 3_{330^\circ} = 3(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

b) $z_1 = 3_{0^\circ} = 3$

$$z_2 = 3_{120^\circ} = 3(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = 3_{240^\circ} = 3(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

41 ¿Pueden ser las raíces de un complejo z los números 2_{28° , 2_{100° , 2_{172° , 2_{244° y 2_{316° ? En caso afirmativo, halla z .

* Comprueba si el ángulo que forman cada dos de ellas es el de un pentágono regular.

$$\begin{aligned} 28^\circ + 72^\circ &= 100^\circ & 100^\circ + 72^\circ &= 172^\circ \\ 172^\circ + 72^\circ &= 244^\circ & 244^\circ + 72^\circ &= 316^\circ \end{aligned}$$

Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28^\circ})^5 = 32_{140^\circ}$$

42 El número complejo 3_{40° es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

Los otros vértices serán:

$$3_{112^\circ} \quad 3_{184^\circ} \quad 3_{256^\circ} \quad 3_{328^\circ}$$

El número será: $z = (3_{40^\circ})^5 = 243$

43 Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $1 + i$. Halla z y las otras raíces cúbicas.

$$1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

Las otras raíces cúbicas son:

$$\sqrt{2}_{45^\circ + 120^\circ} = \sqrt{2}_{165^\circ} \quad \sqrt{2}_{165^\circ + 120^\circ} = \sqrt{2}_{285^\circ}$$

Hallamos z :

$$z = (1 + i)^3 = (\sqrt{2}_{45^\circ})^3 = \sqrt{8}_{135^\circ} = \sqrt{8} (\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = \sqrt{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + 2i$$

44 Busca dos números complejos cuya suma sea $-3 + 3i$ y que una de las raíces cuadradas de su cociente sea $2i$.

Sean z y w los números complejos buscados. Entonces,

$$\begin{cases} z + w = -3 + 3i \\ \frac{z}{w} = (2i)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z + w = -3 + 3i \rightarrow -4w + w = -3 + 3i \rightarrow w = 1 - i \\ z = -4w \end{cases}$$

$$z = -4(1 - i) = -4 + 4i$$

45 Calcula el valor que debe tener b para que el módulo de $\frac{-3 + bi}{1 - 2i}$ sea igual a $\sqrt{2}$.

$$\frac{-3 + bi}{1 - 2i} = \frac{(-3 + bi)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-3 - 6i + bi + 2bi^2}{1 + 4} = \frac{-3 - 2b}{14} + \frac{b - 6}{14}i$$

Como el módulo de este número debe ser $\sqrt{2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{-3 - 2b}{14}\right)^2 + \left(\frac{b - 6}{14}\right)^2} &= \sqrt{2} \rightarrow \frac{\sqrt{5b^2 + 45}}{14} = \sqrt{2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{5b^2 + 45}{196} = 2 \rightarrow 5b^2 = 347 \rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{347}{5}}, b_2 = -\sqrt{\frac{347}{5}} \end{aligned}$$

46 Expresa $\cos 4\alpha$ y $\operatorname{sen} 4\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$, utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha + i \operatorname{sen} 4\alpha &= (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^4 = \cos^4 \alpha + 4i \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 6 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - 4i \cos \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha = \\ &= \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha + i(4 \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 4 \cos \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha) \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que:

$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha$$

$$\operatorname{sen} 4\alpha = 4 \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 4 \cos \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha$$

Página 164

47 Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Halla los otros vértices y la longitud de su lado.

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ corresponde al afijo del número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2_{45^\circ}$.

Para hallar los otros vértices, multiplicamos z por 1_{72° :

$$z_2 = 2_{117^\circ} = -0,91 + 1,78i \quad z_3 = 2_{189^\circ} = -1,97 - 0,31i$$

$$z_4 = 2_{261^\circ} = -0,31 - 1,97i \quad z_5 = 2_{333^\circ} = 1,78 - 0,91i$$

Los otros tres vértices serán:

$$(-0,91; 1,78) \quad (-1,97; -0,31) \quad (-0,31; -1,97) \quad (1,78; -0,91)$$

Hallamos la longitud del lado aplicando el teorema del coseno:

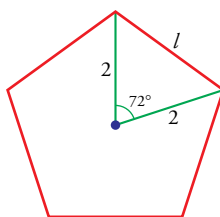
$$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cos 72^\circ$$

$$l^2 = 4 + 4 - 4 \cdot 0,31$$

$$l^2 = 8 - 1,24$$

$$l^2 = 6,76$$

$$l = 2,6 \text{ unidades}$$



48 El afijo de $3 + 2i$ es uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen de coordenadas. Halla los otros vértices y el área del cuadrado.

Si tenemos un vértice de un cuadrado centrado en el origen, para calcular los otros vértices tenemos que multiplicar por $i = 1_{90^\circ}$ y así hacer giros de 90° .

$$z_1 = 3 + 2i \quad z_2 = (3 + 2i)i = -2 + 3i \quad z_3 = (-2 + 3i)i = -3 - 2i \quad z_4 = (-3 - 2i)i = 2 - 3i$$

Los otros vértices serán: $(-2, 3)$, $(-3, -2)$ y $(2, -3)$.

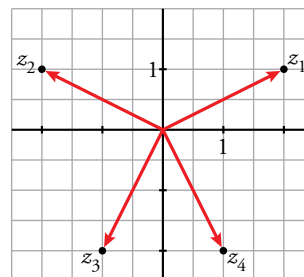
La diagonal del cuadrado mide: $2|z_1| = 2\sqrt{9+4} = 2\sqrt{13}$ porque está centrado en el origen.

El área del cuadrado es (usando la fórmula del área de un rombo):

$$A = \frac{2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}}{2} = 26 \text{ u}^2$$

49 ¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.

No, porque sus afijos no se encuentran en los vértices de un polígono regular centrado en el origen. Podemos comprobarlo en el siguiente gráfico:



50 Sean A, B, C, D los afijos de los números $z_0 = 4$; $z_1 = \frac{1+i}{2}z_0$; $z_2 = \frac{1+i}{2}z_1$; $z_3 = \frac{1+i}{2}z_2$.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de A, B, C, D ?

b) Calcula $d_0 = |z_0 - z_1|$; $d_1 = |z_1 - z_2|$; $d_2 = |z_2 - z_3|$ e interpreta geoméricamente estos números.

c) ¿Cuánto mide la línea poligonal $ABCD$?

$$a) \quad z_0 = 4 \quad z_1 = \frac{1+i}{2} \cdot 4 = 2 + 2i \quad z_2 = \frac{1+i}{2} \cdot (2 + 2i) = (1+i)^2 = 2i \quad z_3 = \frac{1+i}{2} \cdot 2i = -1 + i$$

Los afijos son: $A(4, 0)$; $B(2, 2)$; $C(0, 2)$; $D(-1, 1)$.

$$b) d_0 = |4 - (2 + 2i)| = |2 - 2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d_1 = |2 + 2i - 2i| = |2| = 2$$

$$d_2 = |2i - (-1 + i)| = |1 + i| = \sqrt{2}$$

Las distancias calculadas forman una progresión geométrica de razón $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$c) \text{ La línea poligonal } ABCD \text{ mide } 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 2$$

51 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $1 + i$ y $1 - i$

b) $5i$ y $-5i$

c) $2 - 3i$ y $2 + 3i$

d) $4 - i$ y $1 + 2i$

$$a) [x - (1 + i)][x - (1 - i)] = x^2 - (1 - i)x - (1 + i)x + (1 - i^2) = \\ = x^2 - (1 - i + 1 + i)x + (1 - i^2) = x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$b) (x - 5i)(x + 5i) = x^2 + 5xi - 5xi - 25i^2 = x^2 + 25 = 0$$

$$c) [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)] = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = \\ = x^2 - 2x + 3xi - 2x + 4 - 6i - 3xi + 6i - 9i^2 = x^2 - 4x + 13 = 0$$

d) En este caso, la ecuación de segundo grado no tendrá coeficientes reales porque las soluciones no son números complejos conjugados.

$$[x - (4 - i)][x - (1 + 2i)] = (x - 4 + i)(x - 1 - 2i) = x^2 - (5 + i)x + 6 + 7i = 0$$

52 Halla el valor que debe tener m para que $1 - 2i$ sea una solución de la ecuación $z^2 - mz + 5 = 0$.

Calculamos las soluciones de la ecuación:

$$z = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 20}}{2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2 - 20}{4}}$$

$$\text{Si } \frac{m}{2} = 1 \rightarrow m = 2 \rightarrow \frac{m^2 - 20}{4} = \frac{4 - 20}{4} = -4$$

Comprobamos ahora cuáles son las soluciones si $m = 2$.

$$z = \frac{2}{2} \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

Luego, en efecto, $1 - 2i$ es una de ellas.

53 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2z + 3i - 2 = 3 + zi$

b) $(5 + i)z = 3z + 4i - 2$

c) $(1 - i)z^2 = 1 + i$

d) $(i^{23} - i^{37})z = 2i^{22} - 3i^{19}$

$$a) 2z - zi = 3 - 3i + 2 \rightarrow z(2 - i) = 5 - 3i \rightarrow z = \frac{5 - 3i}{2 - i} = \frac{(5 - 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{13 - i}{5}$$

$$b) (5 + i)z - 3z = 4i - 2 \rightarrow (2 + i)z = 4i - 2 \rightarrow z = \frac{4i - 2}{2 + i} = \frac{2i(2 + i)}{2 + i} = 2i$$

$$c) z^2 = \frac{1 + i}{1 - i} \rightarrow z^2 = \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \rightarrow z^2 = \frac{(1 + i)^2}{2} \begin{cases} z_1 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1 + i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$$d) (-i - i)z = 2(-1) - 3(-i) \rightarrow -2iz = -2 + 3i \rightarrow z = \frac{-2 + 3i}{-2i} = -\frac{3}{2} - i$$

54 Halla los números complejos z y w que verifican cada uno de estos sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{cases}$$

a)
$$\left. \begin{array}{l} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{array} \right\} \text{Sumando miembro a miembro:}$$

$$2z = -4 + 6i \rightarrow z = -2 + 3i$$

$$w = (-1 + 2i) - (-2 + 3i) = 1 - i$$

Solución: $z = -2 + 3i$; $w = 1 - i$

b)
$$\left. \begin{array}{l} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{array} \right\} \text{Multiplicamos por } -2 \text{ la } 2.^\text{a} \text{ ecuación y sumamos:}$$

$$\left. \begin{array}{l} z + 2w = 2 + i \\ -2iz - 2w = -10 - 10i \end{array} \right\} (1 - 2i)z = -8 - 9i \rightarrow z = \frac{-8 - 9i}{1 - 2i} = 2 - 5i$$

$$w = \frac{2 + i - (2 - 5i)}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$$

Solución: $z = 2 - 5i$; $w = 3i$

55 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ iz + (1 - i)w = 1 + 3i \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} z - w = 5 - 3i \\ (2 + i)z + iw = 3 - 3i \end{cases}$$

a) Multiplicamos por $-i$ la primera ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} -iz - iw = i + 2 \\ iz + (1 - i)w = 1 + 3i \end{array} \right\} \text{Sumamos miembro a miembro:}$$

$$-iw + (1 - i)w = i + 2 + 1 + 3i \rightarrow (1 - 2i)w = 3 + 4i$$

$$w = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{1^2 - 2i^2} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$$

$$z = -1 + 2i - w = -1 + 2i + 1 - 2i = 0$$

Solución: $z = 0$; $w = -1 + 2i$

b) Multiplicamos por i la primera ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} zi - wi = 5i + 3 \\ (2 + i)z + iw = 3 - 3i \end{array} \right\} \text{Sumamos miembro a miembro:}$$

$$zi + (2 + i)z = 5i + 3 + 3 - 3i \rightarrow (2 + 2i)z = 6 + 2i$$

$$z = \frac{6 + 2i}{2 + 2i} = \frac{(6 + 2i)(2 - 2i)}{4 - 4i^2} = \frac{16 - 8i}{8} = 2 - i$$

$$w = z - 5 + 3i = 2 - i - 5 + 3i = -3 + 2i$$

Solución: $z = 2 - i$; $w = -3 + 2i$

56 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^3 + z^2 - 2 = 0$

b) $z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

a) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$$z^3 + z^2 - 2 = (z - 1)(z^2 + 2z + 2) \rightarrow z_1 = 1$$

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i \rightarrow z_2 = -1 + i, z_3 = -1 - i$$

b) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$$z^3 - 3z^2 + z + 5 = (z + 1)(z^2 - 4z + 5) \rightarrow z_1 = -1$$

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm i \rightarrow z_2 = 2 + i, z_3 = 2 - i$$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm \sqrt{-9} = \pm 3i \rightarrow z_1 = 3i, z_2 = -3i$$

$$z^2 = 16 \rightarrow z = \pm \sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow z_3 = 4, z_4 = -4$$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$$z^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$$

$$z^2 = -1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{135^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{(135 + 360^\circ k)/2}; k = 0, 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{67,5^\circ}; z_2 = \sqrt[4]{2}_{247,5^\circ}$$

$$z^2 = -1 - i = \sqrt{2}_{225^\circ} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{225^\circ}} = \sqrt[4]{2}_{(225 + 360^\circ k)/2}; k = 0, 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{112,5^\circ}; z_2 = \sqrt[4]{2}_{292,5^\circ}$$

57 Halla los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

Buscamos los números tales que $z^2 = \bar{z}$.

En forma polar, $(r_\alpha)^2 = r_{-\alpha}$

$$(r^2)_{2\alpha} = r_{-\alpha} \rightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ 2\alpha = -\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(r-1) = 0 \\ 3\alpha = 0^\circ + 360^\circ k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = 0, r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 120^\circ, \alpha_3 = 240^\circ \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1_{0^\circ}, z_3 = 1_{120^\circ}, z_4 = 1_{240^\circ} \text{ son las demás soluciones} \end{cases}$$

(Para calcular los valores de α hemos igualado 3α a $0^\circ, 360^\circ$ y 720° .)

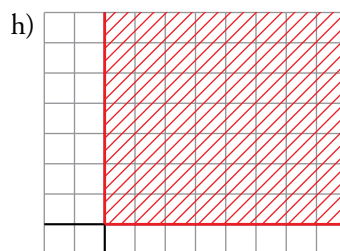
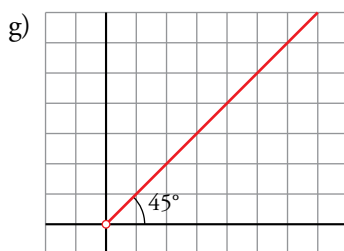
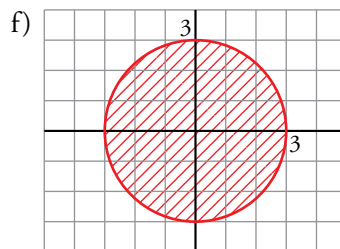
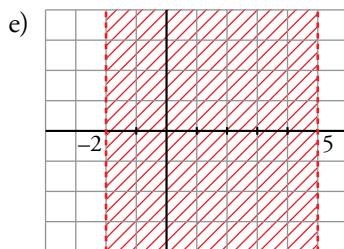
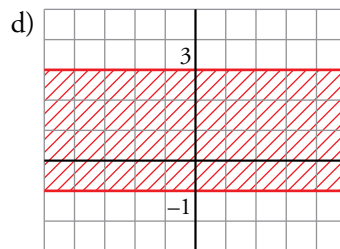
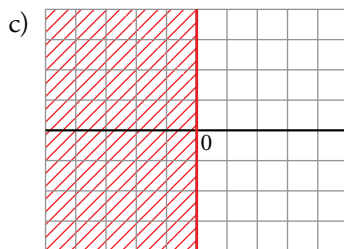
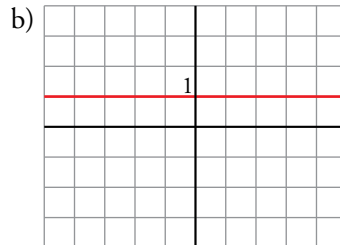
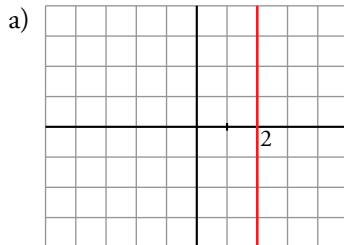
Los números son:

$$z_1 = 0 \quad z_2 = 1_{0^\circ} \quad z_3 = 1_{120^\circ} \quad z_4 = 1_{240^\circ}$$

■ Interpretación gráfica de igualdades y desigualdades entre complejos

58 Representa y describe con palabras cada una de estas familias de números complejos:

- | | |
|-----------------------|---------------------------------------|
| a) $Re z = 2$ | b) $Im z = 1$ |
| c) $Re z \leq 0$ | d) $-1 \leq Im z \leq 3$ |
| e) $-2 < Re z < 5$ | f) $ z \leq 3$ |
| g) $Arg z = 45^\circ$ | h) $0^\circ \leq Arg z \leq 90^\circ$ |



59 Representa los números complejos z tales que $z + \bar{z} = -3$.

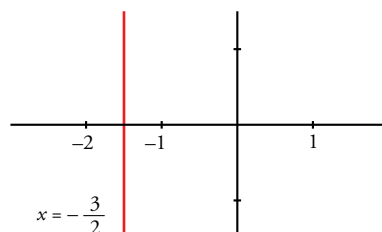
* Escribe z en forma binómica, súmale su conjugado y representa la condición que obtienes.

Llamamos $z = x + iy$.

Entonces: $\bar{z} = x - iy$

Así, $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Representación:



60 Representa los números complejos que verifican:

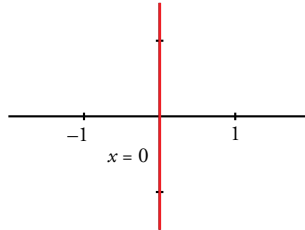
a) $\bar{z} = -z$

b) $|z + \bar{z}| = 3$

c) $|z - \bar{z}| = 4$

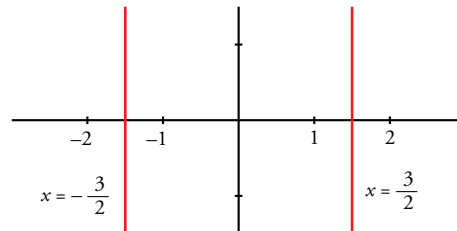
a) $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\bar{z} = -z \rightarrow x - iy = -x - iy \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ (es el eje imaginario)



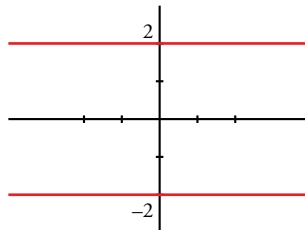
b) $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$

$|z + \bar{z}| = |2x| = 3 \begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = 3/2 \\ 2x = -3 \rightarrow x = -3/2 \end{cases}$

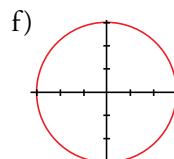
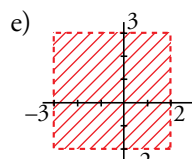
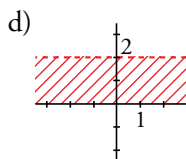
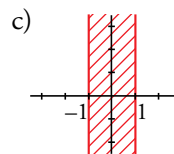
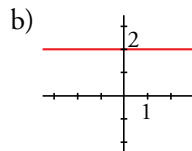
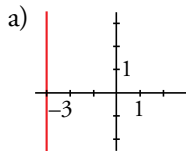


c) $z - \bar{z} = x + iy - z + iy = 2yi$

$|z - \bar{z}| = |2yi| = |2y| = 4 \begin{cases} 2y = 4 \rightarrow y = 2 \\ 2y = -4 \rightarrow y = -2 \end{cases}$



61 Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:



* En a), b) y f) es una igualdad. En c) y d), una desigualdad. En e), dos desigualdades.

a) $Re z = -3$

b) $Im z = 2$

c) $-1 \leq Re z \leq 1$

d) $0 \leq Im z < 2$

e) $\begin{cases} -3 < Re z < 2 \\ -2 < Im z < 3 \end{cases}$

f) $|z| = 3$

Cuestiones teóricas

62 ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0° ?

No, también son reales los números con argumento 180° (los negativos).

63 Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^\circ}$ y $r_{360^\circ-\alpha}$?

$$r_{\alpha+180^\circ} = -z \text{ (opuesto de } z\text{)}$$

$$r_{360^\circ-\alpha} = \bar{z} \text{ (conjugado de } z\text{)}$$

64 Comprueba que:

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

c) $\overline{kz} = k\bar{z}$, con $k \in \mathbb{R}$

$$z = a + bi = r_\alpha \rightarrow \bar{z} = a - bi = r_{360^\circ-\alpha}$$

$$w = c + di = r'_\beta \rightarrow \bar{w} = c - di = r'_{360^\circ-\beta}$$

a) $z + w = (a + c) + (b + d)i \rightarrow \overline{z+w} = (a + c) - (b + d)i$

$$\bar{z} + \bar{w} = a - bi + c - di = (a + c) - (b + d)i = \overline{z+w}$$

b) $z \cdot w = (r \cdot r')_{\alpha+\beta} \rightarrow \overline{z \cdot w} = (r \cdot r')_{360^\circ-(\alpha+\beta)}$

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (r \cdot r')_{360^\circ-\alpha+360^\circ-\beta} = (r \cdot r')_{360^\circ-(\alpha+\beta)} = \overline{z \cdot w}$$

c) $kz = ka + kbi \rightarrow \overline{kz} = ka - kbi$

$$k\bar{z} = ka - kbi = \overline{kz}$$

65 Demuestra que $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0^\circ}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r} \right)_{-\alpha} = \left(\frac{1}{r} \right)_{360^\circ-\alpha} \rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$$

66 El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real? Acláralo con un ejemplo.

Sí. Por ejemplo:

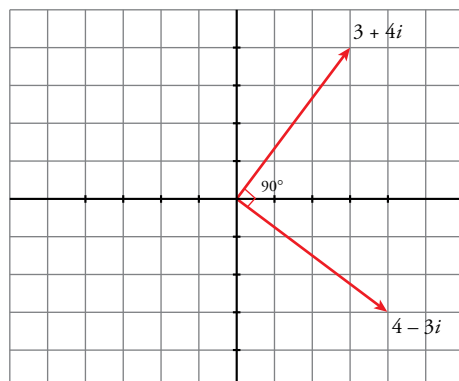
$$z = i, w = i$$

$$z \cdot w = i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$$

Página 165

67 Representa el número complejo $z = 4 - 3i$. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de 90° .

$$iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$$



68 ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

Se diferencian en 180° . Si el argumento del número es α , el de su opuesto es:

$$180^\circ + \alpha$$

69 ¿Qué condición debe cumplir un número complejo $z = a + bi$ para que $\bar{z} = \frac{1}{z}$?

* Halla $\frac{1}{z}$, e iguala a $a - bi$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = a - bi$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{a^2 + b^2} &= a \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} &= -b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{a}{a} &= a^2 + b^2 \rightarrow a^2 + b^2 = 1 \text{ (módulo 1)} \\ \text{Ha de tener módulo 1.} \end{aligned}$$

70 Sean z y w dos números complejos tales que $|z| = \sqrt{2}$ y $|w| = \sqrt{2}$. Justifica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

a) $|z + w| = 2\sqrt{2}$ b) $|3z| = 3\sqrt{2}$ c) $|z \cdot w| = 2$ d) $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Para resolver este problema debemos tener en cuenta que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$:

$$z = a + bi \rightarrow z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

a) Falso, porque $z + w$ representa la diagonal del cuadrado cuyos lados son z y w . Por tanto, su longitud no puede ser la suma de las longitudes de los lados.

b) Verdadero.

$$\text{Si } z = a + bi \rightarrow 3z = 3a + 3bi$$

$$|3z| = |3a + 3bi| = \sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} = 3\sqrt{a^2 + b^2} = 3|z| = 3\sqrt{2}$$

c) Verdadero. El módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos, tal como hemos visto en las operaciones en forma polar.

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

d) Verdadero. En forma polar $\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot 0^\circ}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r} \right)_{-\alpha}$ y, por tanto, el módulo del inverso de un número complejo es el inverso del módulo.

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

71 Si $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$, ¿qué relación debe existir entre α y β para que ocurra cada una de las siguientes afirmaciones?

a) $z \cdot w$ es imaginario puro.

b) z/w es un número real.

c) $z \cdot w$ está en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.

a) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha + \beta}$

Por tanto $\alpha + \beta = 90^\circ$ o $\alpha + \beta = 270^\circ$, es decir, $\beta = 90^\circ - \alpha$, $\beta = 450^\circ - \alpha$ o $\beta = 270^\circ - \alpha$, $\beta = 630^\circ - \alpha$.

b) $\frac{z}{w} = \frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s} \right)_{\alpha - \beta}$

Por tanto, $\alpha - \beta = 0^\circ$ o $\alpha - \beta = 180^\circ$, es decir, $\beta = \alpha$ o $\beta = \alpha - 180^\circ$.

c) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha + \beta}$

Por tanto, $\alpha + \beta = 45^\circ$ o $\alpha + \beta = 225^\circ$, es decir, $\beta = 45^\circ - \alpha$, $\beta = 405^\circ - \alpha$ o $\beta = 225^\circ - \alpha$, $\beta = 585^\circ - \alpha$.

72 Sea $z \neq 0$ un número complejo y $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Justifica que los afijos de z , zw y zw^2 son los vértices de un triángulo equilátero.

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120^\circ$$

El afijo de $zw = z \cdot (1_{120^\circ})$ es el punto que se obtiene girando z un ángulo de 120° respecto del origen de coordenadas.

De la misma forma, el afijo de $zw^2 = z \cdot (1_{240^\circ})$ es el punto que se obtiene girando z un ángulo de 240° respecto del origen de coordenadas.

Por tanto, los afijos de los tres números complejos están en los vértices de un triángulo equilátero.

Para profundizar

73 Halla los números complejos cuyo cubo coincide con el cuadrado de su conjugado.

Si el número complejo es r_α tenemos que:

$$(r_\alpha)^3 = (r_{-\alpha})^2 \rightarrow (r^3)_{3\alpha} = (r^2)_{-2\alpha} \rightarrow \begin{cases} r^3 = r^2 \\ 3\alpha = -2\alpha \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^3 - r^2 = 0 \\ 5\alpha = 0^\circ + 360^\circ k \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r^2(r-1) = 0 \\ 5\alpha = 0^\circ + 360^\circ k \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0, r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 72^\circ, \alpha_3 = 144^\circ, \alpha_4 = 216^\circ, \alpha_5 = 288^\circ \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1_{0^\circ}, z_3 = 1_{72^\circ}, z_4 = 1_{144^\circ}, z_5 = 1_{216^\circ}, z_6 = 1_{288^\circ} \text{ son las demás soluciones.} \end{cases}$$

Los números son: $0, 1_{0^\circ}, 1_{72^\circ}, 1_{144^\circ}, 1_{216^\circ}$ y 1_{288° .

74 Si el producto de dos números complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2 , ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

$$\left. \begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = r'_\beta \\ -8 = 8_{180^\circ} \\ 2 = 2_{0^\circ} \end{array} \right\} r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} = 8_{180^\circ} \rightarrow \begin{cases} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180^\circ \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \frac{r^3_{3\alpha}}{r'_\beta} = \left(\frac{r^3}{r'}\right)_{3\alpha - \beta} = 2_{0^\circ} \rightarrow \begin{cases} \frac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0^\circ \end{cases}$$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ r^3 = 2r' \end{array} \right\} \begin{array}{l} r' = \frac{8}{r} \\ r' = \frac{r^3}{2} \end{array} \rightarrow \frac{8}{r} = \frac{r^3}{2} \rightarrow 16 = r^4 \rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r' = 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 180^\circ \\ 3\alpha = \beta \end{array} \right\} \alpha + 3\alpha = 180^\circ \rightarrow 4\alpha = 180^\circ \rightarrow \begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \beta = 135^\circ \end{cases}$$

Por tanto, $z = 2_{45^\circ}$, $w = 4_{135^\circ}$

75 Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado que obtengas:

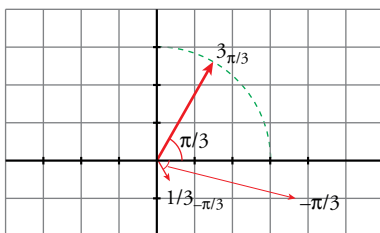
a) $3_{\pi/3}$

b) $2i$

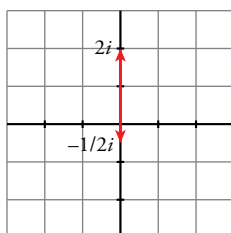
c) $-1 + i$

¿Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

a) $\frac{1}{3_{\pi/3}} = \frac{1_{0^\circ}}{3_{\pi/3}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-\pi/3} = \left(\frac{1}{3}\right)_{5\pi/3}$



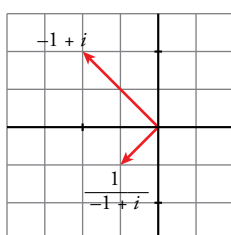
b) $\frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} = \frac{-1}{2}i = \left(\frac{1}{2}\right)_{270^\circ}$



c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$

$$\frac{1}{-1 + i} = \frac{1_{0^\circ}}{\sqrt{2}_{135^\circ}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-135^\circ} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{225^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Si $z = r_\alpha$ entonces $\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360^\circ - \alpha}$.

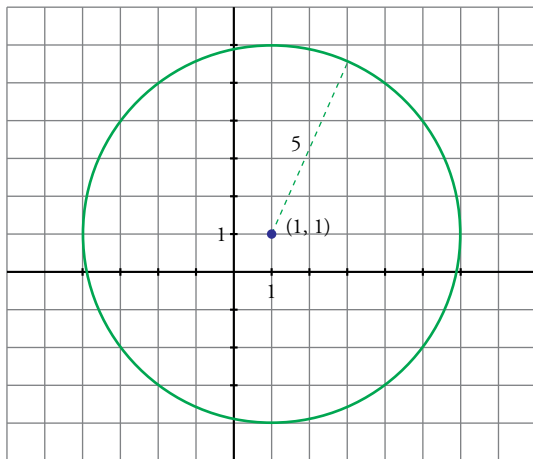


76 Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?

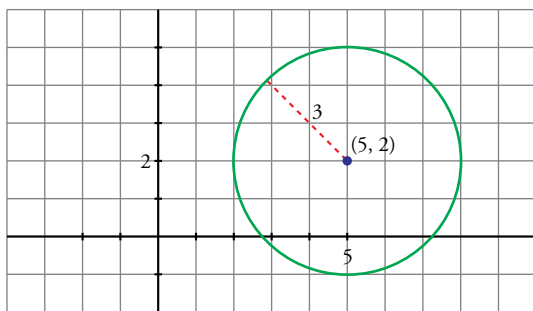
a) $|z - (1 + i)| = 5$

b) $|z - (5 + 2i)| = 3$

a) Circunferencia con centro en (1, 1) y radio 5.



b) Circunferencia con centro en (5, 2) y radio 3.



77 Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.

$$|z - (1 + i)| = 3$$

78 La suma de los números complejos $z = a + 3i$ y $w = b - 5i$ dividida por su diferencia es un número imaginario puro. Prueba que z y w han de tener el mismo módulo.

$$z + w = a + b - 2i$$

$$z - w = a - b + 8i$$

$$\frac{a + b - 2i}{a - b + 8i} = ki \text{ con } k \text{ número real} \rightarrow a + b - 2i = (a - b + 8i)ki \rightarrow$$

$$\rightarrow a + b - 2i = -8k + k(a - b)i \rightarrow \begin{cases} a + b = -8k \\ -2 = k(a - b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = -8k \\ a - b = -\frac{2}{k} \end{cases}$$

Multiplicando miembro a miembro obtenemos: $a^2 - b^2 = 16$

Por otro lado:

$$|z| = \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{a^2 + 9}$$

$$|w| = \sqrt{b^2 + (-5)^2} = \sqrt{b^2 + 25}$$

Para que los módulos sean iguales, debería ser:

$\sqrt{a^2 + 9} = \sqrt{b^2 + 25} \rightarrow a^2 + 9 = b^2 + 25 \rightarrow a^2 - b^2 = 16$ y esto es exactamente lo que hemos obtenido a partir de los datos del problema.

79 Sea z un número complejo cuyo afijo está en la bisectriz del primer cuadrante. Comprueba que

$$\frac{z-1-i}{z+1+i} \text{ es un número real.}$$

El número complejo que está en la bisectriz del primer cuadrante es de la forma $z = a + ai$.

$$\begin{aligned} \frac{a+ai-1-i}{a+ai+1+i} &= \frac{a-1+(a-1)i}{a+1+(a+1)i} = \frac{[a-1+(a-1)i] \cdot [a+1-(a+1)i]}{[a+1+(a+1)i] \cdot [a+1-(a+1)i]} = \\ &= \frac{(a-1)(a+1) - (a-1)(a+1)i + (a-1)(a+1)i - (a-1)(a+1)i^2}{(a+1)^2 + (a+1)^2} = \\ &= \frac{2(a-1)(a+1)}{2(a+1)^2} = \frac{a-1}{a+1}, \text{ que es un número real.} \end{aligned}$$

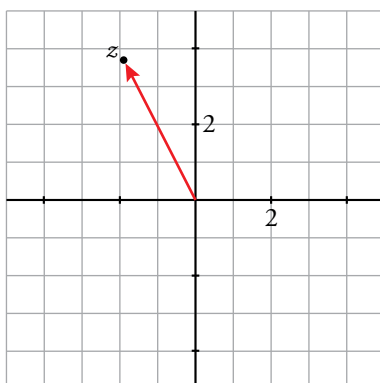
Autoevaluación

Página 165

1 Efectúa y representa la solución.

$$\frac{(3-2i)^2 - (1+i)(2-i)}{-3+i}$$

$$\begin{aligned} \frac{(3-2i)^2 - (1+i)(2-i)}{-3+i} &= \frac{9+4i^2-12i-(2-i+2i-i^2)}{-3+i} = \frac{5-12i-3-i}{-3+i} = \\ &= \frac{(2-13i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-6+13i^2-2i+39i}{9-i^2} = \frac{-19+37i}{10} = -\frac{19}{10} + \frac{37}{10}i \end{aligned}$$



2 Calcula z y expresa los resultados en forma binómica.

$$\sqrt[4]{z} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}$$

$$z = \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i} \right)^4$$

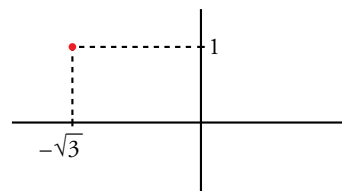
Pasamos numerador y denominador a forma polar:

$$-\sqrt{3}+i \begin{cases} r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 150^\circ \end{cases}$$

$$\sqrt{2}i \rightarrow \sqrt{2}_{90^\circ}$$

$$z = \left(\frac{2_{150^\circ}}{\sqrt{2}_{90^\circ}} \right)^4 = (\sqrt{2}_{60^\circ})^4 = 4_{240^\circ} \rightarrow z = 4(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$$

$$z = 4 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2 - 2\sqrt{3}i$$



3 Halla a y b para que se verifique la igualdad:

$$5(a - 2i) = (3 + i)(b - i)$$

$$5a - 10i = 3b - i^2 - 3i + bi \rightarrow 5a - 10i = 3b + 1 + (-3 + b)i$$

$$\text{Igualando las componentes } \begin{cases} 5a = 3b + 1 \\ -10 = -3 + b \end{cases} \rightarrow b = -7, a = -4$$

4 Resuelve la ecuación: $z^2 - 10z + 29 = 0$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 \pm 4i}{2} \begin{cases} z_1 = 5 + 2i \\ z_2 = 5 - 2i \end{cases}$$

$$\text{Soluciones; } z_1 = 5 + 2i, z_2 = 5 - 2i$$

5 Calcula el valor que debe tomar x para que el módulo de $\frac{x+2i}{1-i}$ sea igual a 2.

$$\frac{x+2i}{1-i} = \frac{(x+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{x+2i^2+xi+2i}{1-i^2} = \frac{x-2+(x+2)i}{1+1} = \frac{x-2}{2} + \frac{x+2}{2}i$$

$$\begin{aligned} \text{Módulo} &= \sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2} = 2 \rightarrow \sqrt{\frac{x^2+4}{2}} = 2 \rightarrow \frac{x^2+4}{2} = 4 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2+4=8 \rightarrow x^2=4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 2, x_2 = -2$$

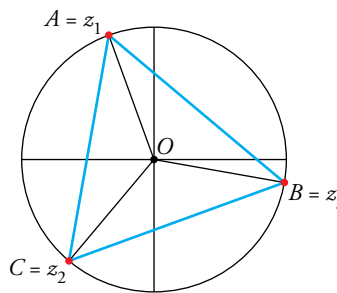
6 Halla el lado del triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} - 4i$.

$$z = \sqrt[3]{4\sqrt{3} - 4i}$$

Expresamos $4\sqrt{3} - 4i$ en forma polar:

$$\begin{cases} r = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = 8 \\ \text{tg } \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 330^\circ \end{cases} 4\sqrt{3} - 4i = 8_{330^\circ}$$

$$z = \sqrt[3]{8_{330^\circ}} = \sqrt[3]{8(330^\circ + 360^\circ k)} \begin{cases} z_1 = 2_{110^\circ} \\ z_2 = 2_{230^\circ} \\ z_3 = 2_{350^\circ} \end{cases}$$

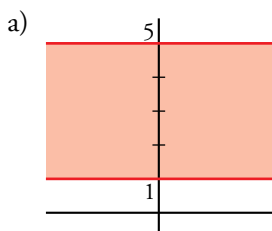


En el triángulo AOB conocemos dos lados, $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$, y el ángulo comprendido, 120° . Aplicando el teorema del coseno, obtenemos el lado del triángulo, \overline{AB} :

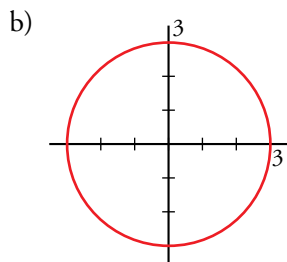
$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 12 \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{12} = 3\sqrt{3} \text{ u}$$

7 Representa gráficamente.

a) $1 \leq \text{Im } z \leq 5$

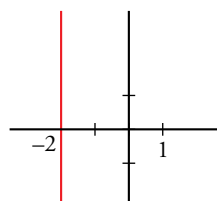


b) $|z| = 3$



c) $z + \bar{z} = -4$

c) $a + bi + a - bi = -4 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow a = -2$



8 Halla dos números complejos tales que su cociente sea 2_{150° y su producto 18_{90° .

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 2_{150^\circ} \rightarrow \frac{r}{s} = 2; \alpha - \beta = 150^\circ$$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 18_{90^\circ} \rightarrow r \cdot s = 18; \alpha + \beta = 90^\circ$$

Resolvemos los sistemas:

$$\begin{cases} \frac{r}{s} = 2 \\ r \cdot s = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = 150^\circ \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\begin{cases} r = 6 \\ s = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 120^\circ \\ \beta = -30^\circ = 330^\circ \end{cases}$$

Los números son 6_{120° y 3_{330° . Otra posible solución es: 6_{300° y 3_{150° .

9 Demuestra que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Supongamos que $z = a + bi$. Entonces:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

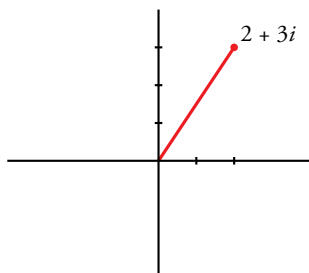
10 Calcula el valor de $\cos 120^\circ$ y de $\sen 120^\circ$ a partir del producto $1_{90^\circ} \cdot 1_{30^\circ}$.

$$1_{90^\circ} \cdot 1_{30^\circ} = 1(\cos 90^\circ + i \sen 90^\circ) \cdot 1(\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ) =$$

$$= i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1_{90^\circ} \cdot 1_{30^\circ} = 1_{120^\circ} = 1(\cos 120^\circ + i \sen 120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \sen 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

11 Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de 30° con centro en el origen.



Multiplicamos por $1_{30^\circ} = 1(\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ)$.

$$z = (2 + 3i) \cdot 1_{30^\circ} = (2 + 3i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$z = \sqrt{3} + \frac{3}{2}i^2 + i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} + \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}i$$