Resuelve

Página 301

Movimiento de una partícula

Un investigador, para estudiar el movimiento de una partícula, la ha iluminado con destellos de flash cada décima de segundo (0,1 s) durante cuatro segundos. Esta es la fotografía a tamaño real:

1. Aproxima la velocidad de la partícula en el instante $t = 2$ s hallando su velocidad media en los intervalos [2; 2,5] y [2; 2,1]. Para ello, toma medidas sobre la fotografía.

2. Calcula las velocidades medias anteriores tomando valores sobre la ecuación del movimiento de dicha partícula: $s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$

3. Halla ahora las velocidades medias en los intervalos [2; 2,001] y [2; 2,000001] tomando de nuevo valores sobre la ecuación del movimiento de la partícula. ¿Podemos considerar que esta última velocidad media es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s?

1. La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,5$ es de 12,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{12,5}{0,5} = 25 \text{ mm/s} = 0{,}025 \text{ m/s}$$

La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,1$ es de 3,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{3,5}{0,1} = 33 \text{ mm/s} = 0{,}035 \text{ m/s}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2}(2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2) = 12 \\ s_2 = \frac{1}{2}(2,5^4 - 8 \cdot 2,5^3 + 18 \cdot 2,5^2) = 13,28 \end{array}\right\} \to v_1 = \frac{13,28 - 12}{0,5} = 2,56$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \\ s_3 = \frac{1}{2}(2,1^4 - 8 \cdot 2,1^3 + 18 \cdot 2,1^2) = 12,37 \end{array}\right\} \to v_2 = \frac{12,37 - 12}{0,1} = 3,77$$

3. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \\ s_4 = \frac{1}{2}(2,001^4 - 8 \cdot 2,001^3 + 18 \cdot 2,001^2) = 12,003997 \end{array}\right\} \to v = \frac{12,003997 - 12}{0,001} = 3,997$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \\ s_5 = \frac{1}{2}(2,000001^4 - 8 \cdot 2,000001^3 + 18 \cdot 2,000001^2) = 12,000004 \end{array}\right\} \to v = \frac{12,000004 - 12}{0,000001}$$

Sí podemos considerar que esta última velocidad es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s porque el intervalo de tiempo transcurrido es tan solo una millonésima de segundo.

1 Medida del crecimiento de una función

Página 302

Hazlo tú. Halla la T.V.M. de $y = \sqrt{x-1}$ en [1, 2], [1, 5] y [1, 10].

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{0}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{T.V.M. } [1, 10] = \frac{f(10)-f(1)}{10-1} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{0}}{9} = \frac{1}{3}$$

1 ¿Verdadero o falso?

a) La T.V.M. mide el crecimiento medio de una función en un intervalo.

b) Si f es creciente en $[a, b]$, su T.V.M. en ese intervalo es positiva, y si es decreciente, su T.V.M. es negativa.

c) Si la T.V.M. de f en $[a, b]$ es 0, significa que f es constante en $[a, b]$.

a) Verdadero.

b) Verdadero. El signo de la T.V.M. depende solo del signo del numerador. Si f es creciente $f(b) > f(a)$, luego el numerador es positivo. Si f es decreciente, $f(b) < f(a)$, luego el numerador es negativo.

c) Falso. Solo podemos afirmar que $f(a) = f(b)$. Esto no quiere decir que sea constante.

2 Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:

[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8]

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{0-5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{-4-5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{0-5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{5-5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8)-f(1)}{8-1} = \frac{12-5}{7} = 1$$

3 **Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable [1, 1 + h].**

Comprueba que, dando a h los valores adecuados, se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

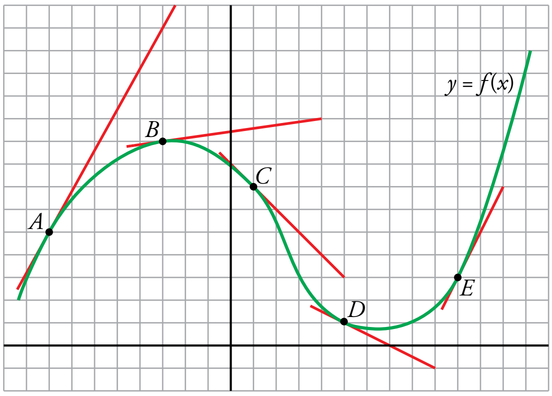
$$\text{T.V.M. } [1,\ 1+h] = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-8(1+h)+12-5}{h} = \frac{h^2-6h}{h} = \frac{h(h-6)}{h} = h-6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 303

4 **En la gráfica, en verde, de la función $y = f(x)$ adjunta, se han señalado cinco puntos: *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.**

En cada uno de ellos está trazada la recta tangente, cuya pendiente se puede calcular.



Expresa los resultados utilizando expresiones del tipo:

$f'(a) = \dots$

Por ejemplo, para el punto *B*:

$f'(-3) = \dots$

PUNTO	PENDIENTE
A	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
B	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
C	$f'(1) = -1$
D	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
E	$f'(10) = 2$

2 Obtención de la derivada a partir de la expresión analítica

Página 305

Hazlo tú. **Halla la derivada de $y = \dfrac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.**

- $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$f(1+h) = \frac{3}{1+h-2} = \frac{3}{h-1}$$

$$f(1) = \frac{3}{1-2} = -2$$

$$f(1+h) - f(1) = \frac{3}{h-1} - (-3) = \frac{3h}{h-1}$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{3h}{h-1}}{h} = \frac{3}{h-1}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$$

- $f'(-1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$$f(-1+h) = \frac{3}{-1+h-2} = \frac{3}{h-3}$$

$$f(-1) = \frac{3}{-1-2} = -1$$

$$f(-1+h) - f(-1) = \frac{3}{h-3} - (-1) = \frac{h}{h-3}$$

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\frac{h}{h-3}}{h} = \frac{1}{h-3}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$$

- $f'(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$

$$f(5+h) = \frac{3}{5+h-2} = \frac{3}{h+3}$$

$$f(5) = \frac{3}{5-2} = 1$$

$$f(5+h) - f(5) = \frac{3}{h+3} - 1 = \frac{-h}{h+3}$$

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{\frac{-h}{h+3}}{h} = -\frac{1}{h+3}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{h+3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Hazlo tú. **Halla la derivada de $y = \frac{x^2}{2} + 7x$ en los puntos de abscisas 0, 1, 2, 3, 4 y 5.**

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right) = xh + \frac{h^2}{2} + 7h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{xh + \frac{h^2}{2} + 7h}{h} = x + \frac{h}{2} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(x + \frac{h}{2} + 7\right) = x + 7$$

$f'(0) = 0 + 7 = 7$ $f'(1) = 1 + 7 = 8$ $f'(2) = 9$ $f'(3) = 10$ $f'(4) = 11$ $f'(5) = 12$

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La derivada de una función, $y = f(x)$, en $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

b) $f'(3) = 0$ significa que la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ es paralela al eje X.

c) Si $f'(2) > 0$, entonces f es creciente en el punto de abscisa 2.

a) Verdadero.

b) Verdadero. La pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es cero, luego la recta es horizontal.

c) Verdadero, debido a la inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

2 **Halla la derivada de $y = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa –2.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2} = \frac{-2+h+2}{2(-2+h)} = \frac{h}{2h-4}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2h-4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = -\frac{1}{4}$$

3 **Halla la derivada de $y = -2x + 4$ en los puntos de abscisas –3, 0, 4 y 7. Explica por qué obtienes en todos los casos el mismo resultado.**

- $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

  $f(-3+h) - f(-3) = -2(-3+h) + 4 - 10 = 6 - 2h - 6 = -2h$

  $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

  $f(h) - f(0) = -2h + 4 - 4 = -2h$

  $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

• $f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

$f(4 + h) - f(4) = -2(4 + h) + 4 - (-4) = -8 - 2h + 8 = -2h$

$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

• $f'(7) = \lim_{h \to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h}$

$f(7 + h) - f(7) = -2(7 + h) + 4 - (-10) = -14 - 2h + 14 = -2h$

$f'(7) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

Como la función es una línea recta, crece o decrece siempre de la misma forma y al ser la derivada una forma de medir el crecimiento de una función, esta debe valer lo mismo en todos los puntos.

4 **Halla la derivada de $y = 3x^2 - 5x + 1$ en los puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.**

Calculamos la derivada de forma general y la evaluamos en cada uno de los puntos pedidos.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x + h) - f(x) = 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1) =$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1 = 3h^2 + 6hx - 5h$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6hx - 5h}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + 6x - 5) = 6x - 5$

$f'(-2) = -17$

$f'(-1) = -11$

$f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 7$

$f'(3) = 13$

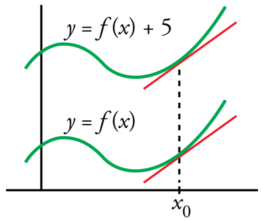
$f'(4) = 19$

$f'(5) = 25$

$f'(6) = 31$

3 Función derivada de otra

Página 306



1 **¿Verdadero o falso?**

Las rectas tangentes en un punto cualquiera, x_0, a las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f(x) + 5$ son paralelas.

Eso significa que las dos funciones tienen la misma función derivada.

Verdadero, porque al ser paralelas las rectas tangentes en cualquier punto, deben tener la misma pendiente en todos los puntos.

2 **Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y, a partir de ella, calcula $f'(4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(5)$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{3}{x+h-2} - \frac{3}{x-2}}{h} = 3 \cdot \frac{\frac{x-2-x-h+2}{(x+h-2)(x-2)}}{h} = \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-3}{4}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{3}$$

$$f'(1) = -3$$

$$f'(5) = \frac{-1}{3}$$

3 **Halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x-3}$ y calcula las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 4$ y $x = 7$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})}{h(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{x+h-3-(x-3)}{h(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{h+x-3}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{h+x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$f'(7) = \frac{1}{4}$$

4 **Halla la función derivada de $f(x) = x^3 + x^2$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3+(x+h)^2-(x^3+x^2)}{h} = \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3+h^2+2hx+x^2-x^3-x^2}{h} =$$

$$= \frac{3hx^2+3h^2x+h^3+h^2+2hx}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x) = 3x^2 + 2x$$

Página 307

5 En la fórmula que sirve para hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

di el papel que desempeña cada una de las letras que intervienen. La x es la variable independiente, ¿de qué función?

a es la abscisa del punto en el que se halla la recta tangente.

$f(a)$ es la ordenada de dicho punto.

$f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente o, también, la derivada de la función en el punto de abscisa a.

x es la variable independiente de la recta tangente.

y es la variable dependiente de dicha recta.

4 Reglas para obtener las derivadas de algunas funciones

Página 308

1 **Calcula:** a) $D(x^5)$ b) $D\left(\frac{1}{x^2}\right)$ c) $D(\sqrt[3]{x})$ d) $D(\sqrt[3]{x^2})$ e) $D\left(\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right)$

a) $D(x^5) = 5x^4$

b) $D\left(\frac{1}{x^2}\right) = D(x^{-2}) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

c) $D(\sqrt[3]{x}) = D(x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $D(\sqrt[3]{x^2}) = D(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $D\left(\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right) = D\left(\frac{x^{3/2}\cdot x^{4/3}}{x^2}\right) = D\left(x^{5/6}\right) = \frac{5}{6}x^{(5/6)-1} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 310

Hazlo tú. **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x - 7$ **b)** $g(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{3x^4}$ **c)** $h(x) = \frac{3x}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 3 = 20x^3 - 4x + 3$

b) $g(x) = \sqrt{5}\sqrt{x} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x^4} = \sqrt{5}\,x^{1/2} - \sqrt[3]{3}\,x^{4/3}$

$g'(x) = \sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} - \sqrt[3]{3}\cdot\frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h(x) = \frac{3x}{x^2 x^{1/3}} = 3x^{-4/3}$

$h'(x) = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\frac{4}{x^{7/3}} = -\frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

Hazlo tú. **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \frac{5^{4x}}{125}$ **b)** $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3}$ **c)** $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x}$

a) $f(x) = \frac{1}{125}(5^4)^x = \frac{1}{125}625^x$

$f'(x) = \frac{1}{125}625^x \ln 625 = \frac{\ln 625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(x^2+x-3) - (x^2-3x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{2x^3 - x^2 - 9x + 9 - (2x^3 - 5x^2 - x + 1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2+x-3)^2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 2 - \frac{1}{x}$

$h'(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x^2}$

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

2 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\sqrt{x^3}\, e^x = \sqrt{3}\, x^{3/2}\, e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\, e^x + x^{3/2}\, e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\, e^x + x\sqrt{x}\, e^x\right) = \sqrt{3x}\, e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot \cos x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x)\, 2^x - e^x \cos x\, 2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x \ln 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x (\cos x - \operatorname{sen} x - \ln 2 \cos x)}{2^x}$$

5 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = 3^x \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot 3^x \ln 3 \cdot \operatorname{tg} x + \frac{x \cdot 3^x}{\cos^2 x}$$

6 $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot x - \operatorname{lon}_2 x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2} = \frac{1 - \ln 2 \log_2 x}{x^2 \ln 2}$$

7 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\, x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\, 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

9 $f(x) = (\operatorname{arc\,sen} x)(x + 3)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(x + 3) + (\operatorname{arc\,sen} x) \cdot 1 = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} + \operatorname{arc\,sen} x$$

10 $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cos x - (\operatorname{arc\,sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2}} \cos x + (\operatorname{arc\,sen} x) \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sqrt{1 - x^2}\,(\operatorname{arc\,sen} x) \operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - x^2}\, \cos^2 x}$$

11 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}5^x$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}5^x + \dfrac{1}{x}5^x \ln 5 = 5^x \dfrac{x \ln 5 - 1}{x^2}$

Página 311

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

12 $f(x) = sen\,(x^2 - 5x + 7)$

$f'(x) = (2x - 5)\,cos\,(x^2 - 5x + 7)$

13 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$

14 $f(x) = sen^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(sen^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\square^2)' = 2\square \\ (sen\,\square)' = cos\,\square \\ \left(3x + \frac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$f'(x) = 2sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 6sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

También, usando la fórmula del seno del ángulo doble, podríamos dar el resultado de esta otra manera:

$f'(x) = 2sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 3sen\,(6x + \pi) = -3\,sen\,6x$

15 $f(x) = \dfrac{log\,x^2}{x}$

$f(x) = \dfrac{2\,log\,x}{x} \;\to\; f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln 10\,log\,x)}{x^2 \ln 10}$

16 $f(x) = cos\,(3x - \pi)$

$f'(x) = -3\,sen\,(3x - \pi)$

17 $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

18 $f(x) = x\,e^{2x+1}$

$f'(x) = e^{2x+1} + x\,e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1}(1 + 2x)$

19 $f(x) = \dfrac{sen\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}\,cos\,(x^2+1) + [x\,sen\,(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \dfrac{2x(1-x^2)\,cos\,(x^2+1) + x\,sen\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

5 Utilidad de la función derivada

Página 312

Hazlo tú. Halla las rectas tangentes a $y = x^3 - 2x^2$ paralelas a $y = -x$.

Buscamos las rectas de pendiente –1:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 \to f'(x) = 3x^2 - 4x$$

La ecuación $f'(x) = -1$ nos proporciona las abscisas de los puntos en los que las rectas tangentes son paralelas a la recta dada.

$$f'(x) = -1 \to 3x^2 - 4x = -1 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0 \to x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$$

$$x = \frac{1}{3} \to f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{5}{27} \to \text{Recta tangente } y = -1\cdot\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{27} \to y = -x + \frac{4}{27}$$

$$x = 1 \to f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 = -1 \to \text{Recta tangente } y = -1\cdot(x - 1) - 1 \to y = -x$$

Página 313

Hazlo tú. Halla los puntos singulares de $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ y determina los intervalos donde crece o decrece.

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \to 6x^2 - 6x - 12 = 0 \to x^2 - x - 2 = 0 \to x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

$$f(1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10 \to (-1, 10) \text{ es un punto singular.}$$

$$f(2) = 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 3 = -17 \to (2, -17) \text{ es otro punto singular.}$$

Teniendo en cuenta las ramas infinitas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = -\infty$$

Tenemos que los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ son intervalos de crecimiento. En el intervalo $(-1, 2)$ la función decrece.

Página 314

1 Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^4 - 2x - 3$ en los puntos de abscisa –1, 0 y 2.

$f(x) = x^4 - 2x - 3 \quad f'(x) = 4x^3 - 2$

- $f(-1) = 6 \quad f'(-1) = -6$

  La recta tangente en $x = -1$ es $y = -6(x + 1) + 6$, es decir, $y = -6x$.

- $f(0) = -3 \quad f'(0) = -2$

  La recta tangente en $x = 0$ es $y = -2(x - 0) - 3$, es decir, $y = -2x - 3$.

- $f(2) = 9 \quad f'(2) = 30$

  La recta tangente en $x = 2$ es $y = 30(x - 2) + 9$, es decir, $y = 30x - 51$.

2 Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x$ cuya pendiente sea 3.

Para que la pendiente de la recta tangente sea 3, debe ser $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = x^3 - 4x + 3$$

$f'(x) = 3 \rightarrow x^3 - 4x + 3 = 3 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$ son las abscisas de los puntos en los que la pendiente es 3.

$x_1 = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ La recta tangente es $y = 3x$.

$x_2 = 2 \rightarrow f(2) = 2 \rightarrow$ La recta tangente es $y = 3(x - 2) + 2$, es decir, $y = 3x - 4$.

$x_3 = -2 \rightarrow f(-2) = -10 \rightarrow$ La recta tangente es $y = 3(x + 2) - 10$, es decir, $y = 3x - 4$.

3 Halla el valor máximo de la función $y = -x^3 + 12x + 3$ en el intervalo $[0, 3]$ y en el intervalo $[-5, 3]$. Halla el mínimo en cada uno de esos intervalos.

Calculamos primero los puntos singulares de la función:

$$f'(x) = -3x^2 + 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 12 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$$

- En el intervalo [0, 3] evaluamos:

  $f(0) = 3 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El máximo se encuentra en $x = 2$ y vale 19.

  El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 3.

- En el intervalo [–5, 3] evaluamos:

  $f(-5) = 68 \quad f(-2) = -13 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El máximo se encuentra en $x = -5$ y vale 68.

  El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale –13.

4 Halla los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{tg\ 3x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x - 5}{2x + 3} = \frac{-1}{7}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{tg\ 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{(1 + tg^2\ 3x) \cdot 3} = \frac{5}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10} = 0$

6 Representación de funciones

Página 316

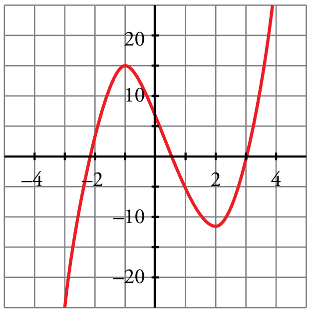
1 Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Máximo en (–1, 15).

Mínimo en (2, –12).



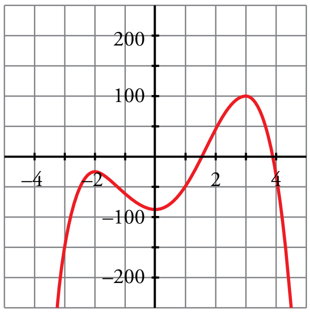
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Máximo en (–2, –26) y en (3, 99).

Mínimo en (0, –90).



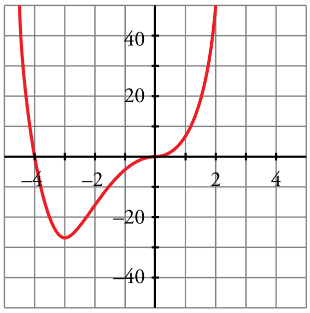
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en (–3, –27).

Punto de inflexión en (0, 0).

$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–4, 0).



Página 318

2 Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

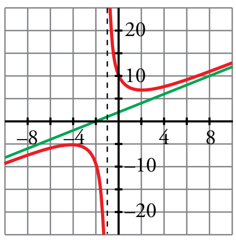
a) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x+11)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

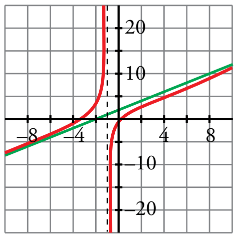
Máximo en (–4, –5). Mínimo en (2, 7).

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

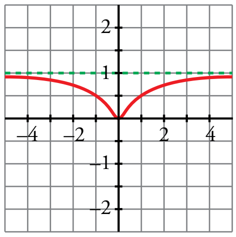


Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–3, 0)

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

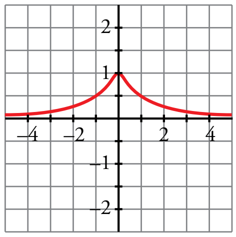
c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$



Mínimo en (0, 0).

Asíntota horizontal: $y = 1$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$

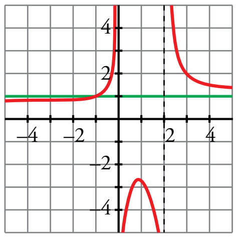


Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$$= \frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \to x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$$



Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-1}{x^2} &= -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-1}{x^2} &= -\infty \end{aligned}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

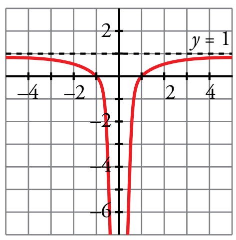
$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ es asíntota horizontal

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$



$f'(x) \neq 0 \to f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

• Corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0).

Ejercicios y problemas resueltos

Página 319

1. Función derivada a partir de la definición

Hazlo tú. Dada $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, halla $f'(x)$ aplicando la definición.

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+h)(x+1) - x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + hx + h - x^2 - xh - x}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{(x+h+1)(x+1)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Reglas de derivación

Hazlo tú. Halla $f'(x)$ siendo: $f(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$

$$f(x) = 2\,ln\frac{x+1}{x} = 2\,[ln(x+1) - ln\,x)]$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x+1} \cdot 1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x(x+1)}$$

3. Ecuación de la recta tangente en un punto

Hazlo tú. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = tg\,x$ en $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = tg\,\frac{3\pi}{4} = -1$$

$f'(x) = 1 + tg^2\,x \to f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2$ (pendiente de la recta tangente).

La ecuación de la recta tangente en $x = \dfrac{3\pi}{4}$ es $y = 2\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) - 1$, es decir, $y = 2x - \dfrac{3}{2}\pi - 1$

Página 320

4. Recta tangente paralela a una recta

Hazlo tú. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$.

Despejando y en la ecuación de la recta dada, podemos obtener su pendiente.

$y = 2x + 5 \to$ La pendiente de la recta es 2.

Las abscisas de los puntos en los que la recta tangente es paralela a la recta anterior son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 6x - 4 \to 6x - 4 = 2 \to x = 1$ es el punto en el que la tangente y la recta dada son paralelas.

Finalmente, como $f(1) = -1$, la recta buscada es $y = 2(x - 1) - 1$, es decir, $y = 2x - 3$.

5. Puntos de tangente horizontal

Hazlo tú. Halla los puntos singulares de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$ y di si son máximos o mínimos.

Hallamos las abscisas de los puntos singulares resolviendo la ecuación $f'(x) = 3x^2 - 12x$:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

Calculamos las ordenadas de estos puntos:

$$f(0) = 0 \qquad f(4) = -32$$

Los puntos singulares son (0, 0) y (4, –32).

Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2) = +\infty \rightarrow (4, -32) \text{ es un mínimo.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2) = -\infty \rightarrow (0, 0) \text{ es un máximo.}$$

6. Coeficientes de una función que tiene puntos singulares

Hazlo tú. Halla b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ pase por (1, 0) y $f'(1) = 5$.

Si f pasa por (1, 0), entonces $f(1) = 0$.

$1^3 + b \cdot 1^2 + c = 0 \rightarrow c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

$f'(1) = 5 \rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 5 \rightarrow b = 1$

Página 321

7. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

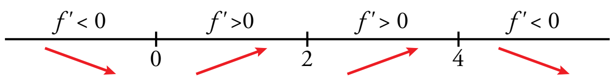
Hazlo tú. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$.

$Dom = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{2x(2 - x) - x^2(-1)}{(2 - x)^2} = \frac{4x - x^2}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{4x - x^2}{(x - 2)^2} = 0 \rightarrow 4x - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

Estudiamos los signos de f dentro del dominio de definición en los intervalos cuyos extremos son los puntos singulares.



Por tanto, f crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

8. Problema de optimización

Hazlo tú. De todos los rectángulos de 36 m de perímetro, halla las dimensiones del que tiene la mayor superficie.

Llamamos b y h a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

Como el perímetro es 36, se tiene que $2b + 2\text{h} = 36 \rightarrow \text{h} = 18 - b$

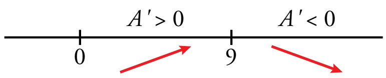
Buscamos el rectángulo de área máxima:

$$A = bh = b(18 - b)$$

Hallamos los puntos singulares:

$$A' = 0 \to A' = 18 - 2b = 0 \to b = 9$$

Estudiamos si el valor obtenido es un máximo:



Por tanto, para $b = 9$ el área es máxima.

Calculamos h: $h = 18 - 9 = 9$ y obtenemos el área máxima $A = 81\ \text{m}^2$.

Página 322

9. Estudio y representación de una función polinómica

Hazlo tú. Estudia y representa esta función:

$$f(x) = 1 + (x - 3)^3$$

- Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} [1 + (x - 3)^3] = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} [1 + (x - 3)^3] = -\infty$$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3(x - 3)^2$

$f'(x) = 0 \to 3(x - 3)^2 = 0 \to x = 3$

Como $f(3) = 1$, el punto $(3, 1)$ es el único punto singular.

- Crecimiento y decrecimiento:

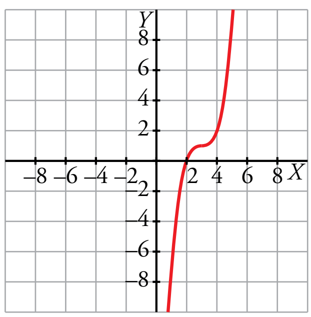
Como $f'(x) = 3(x - 3)^2 > 0$ para todo $x \neq 3$, la función crece a ambos lados de $x = 3$ y no es ni máximo ni mínimo.

- Cortes con los ejes:

$x = 0 \to y = -26$

$y = 0 \to 1 + (x - 3)^3 = 0 \to (x - 3)^3 = -1 \to x = 2$

- Gráfica:



10. Estudio y representación de una función racional

Hazlo tú. Estudia y representa esta función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}}$$

- La función no está definida en $x = 0 \to Dom = \mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntota vertical: $x = 0$

  Posición:

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

- Asíntotas horizontales y oblicuas:

  Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tiene una asíntota oblicua. Dividimos:

  $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} \to$ La asíntota es $y = 2x$

  Posición:

  Si $x \to -\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} < 0$. Curva bajo la asíntota.

  Si $x \to +\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} > 0$. Curva sobre la asíntota.

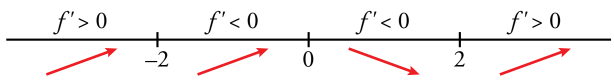
- Puntos singulares:

  $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

  $f'(x) = 0 \to \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \to 2x^2 - 8 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

  $f(-2) = -8$, $f(2) = 8$. Por tanto, $(-2, -8)$ y $(2, 8)$ son los puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:



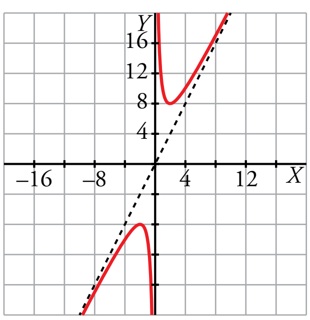
- Cortes con los ejes:

  No corta al eje OY.

  $y = 0 \to \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \to 2x^2 + 8 = 0$ No tiene solución (no cota al eje OX).

- Gráfica:

  $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$



Página 323

11. Función derivada de funciones definidas "a trozos"

Hazlo tú. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - 1 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

a) Llamamos $f_1(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$ y $f_2(x) = 2x - 5$

Ambas funciones son continuas.

$\left.\begin{array}{l} f_1(4) = \dfrac{4^2}{4} - 1 = 3 \\ f_2(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3 \end{array}\right\}$ Como ambas coinciden, la función es continua en $x = 4$.

$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = \dfrac{x}{2} \to f'_1(4) = 2 \\ f'_2(x) = 2 \to f'_2(4) = 2 \end{array}\right\}$ Como coinciden, la función es derivable en $x = 4$ y $f'(4) = 2$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

b) Llamamos $g_1(x) = 3 - x$ y $g_2(x) = x^2 + 3$

Ambas funciones son continuas.

$\left.\begin{array}{l} g_1(-1) = 3 - (-1) = 4 \\ g_2(-1) = (-1)^2 + 3 = 4 \end{array}\right\}$ Como ambas coinciden, la función es continua en $x = -1$.

$\left.\begin{array}{l} g'_1(x) = -1 \to g'_1(-1) = -1 \\ g'_2(x) = 2x \to g'_2(-1) = -2 \end{array}\right\}$ Como son distintas, la función no es derivable en $x = -1$.

La función derivada es $g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Página 324

12. Parámetros para que una función sea continua y derivable

Hazlo tú. Calcula a y b para que las siguientes funciones sean derivables en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 4x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **en $x = 2$.**

b) $g(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x < -3 \\ x^2 + bx & \text{si } x \ge -3 \end{cases}$ **en $x = -3$.**

a) Llamamos $f_1(x) = ax^2 + 1$ y $f_2(x) = 4x - b$.

Ambas funciones son continuas.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, se debe cumplir que $f_1(2) = f_2(2)$.

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 4a + 1 \\ f_2(2) = 8 - b \end{array}\right\}$ Por tanto: $4a + 1 = 8 - b$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$, se debe cumplir que $f'_1(2) = f'_2(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = 2ax \to f'_1(2) = 4a \\ f'_2(x) = 4 \to f'_2(2) = 4 \end{array}\right\} \text{Luego } 4a = 4$$

Resolvemos el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{r} 4a + 1 = 8 - b \\ 4a = 4 \end{array}\right\} \to a = 1, \; b = 3$$

b) Llamamos $g_1(x) = a - x$ y $g_2(x) = x^2 + bx$

Ambas funciones son continuas.

Para que $g(x)$ sea continua en $x = -3$, se debe cumplir que $g_1(-3) = g_2(-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} g_1(-3) = a + 3 \\ g_2(-3) = 9 - 3b \end{array}\right\} \text{Por tanto: } a + 3 = 9 - 3b$$

Para que $g(x)$ sea derivable en $x = -3$, se debe cumplir que $g'_1(-3) = g'_2(-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} g'_1(x) = -1 \to g'_1(-3) = -1 \\ g'_2(x) = 2x + b \to g'_2(-3) = -6 + b \end{array}\right\} \text{Luego } -1 = -6 + b$$

Resolvemos el sistema resultante:

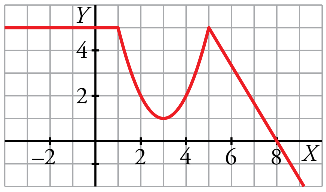
$$\left.\begin{array}{r} a + 3 = 9 - 3b \\ -1 = -6 + b \end{array}\right\} \to a = -9, \; b = 5$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 325

1. Derivadas sobre la gráfica

Observando la gráfica de esta función $y = f(x)$:



a) Hallar el valor de $f'(-2)$, $f'(3)$, $f'(6)$.

b) ¿Para qué valores de x es $f'(x) < 0$?

a) $f'(-2) = 0$ porque es constante en las proximidades de $x = -2$.

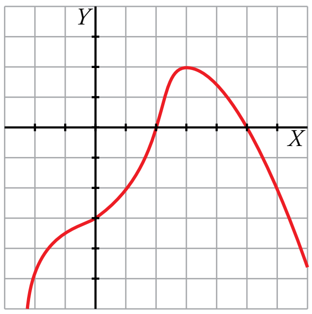
$f'(3) = 0$ porque en $x = 3$ hay un mínimo.

$f'(6) = -\dfrac{5}{3}$ porque la gráfica es la recta $y = \dfrac{-5x+40}{3}$ con pendiente $-\dfrac{5}{3}$.

b) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$ porque la función es decreciente en estos intervalos.

2. Función polinómica

Representar una función polinómica sabiendo que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, que sus puntos de tangente horizontal son (0, –3) y (3, 2), y que corta al eje X solo en $x = 2$ y en $x = 5$.



3. Triángulo rectángulo de área máxima

De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 12 m, hallar las dimensiones del que tiene el área máxima.

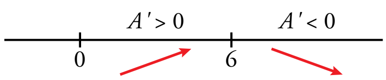
Supongamos que a y b son los catetos del triángulo rectángulo: $a + b = 12 \to b = 12 - a$.

El área del triángulo es el semiproducto de la base por la altura, luego:

$$A = \frac{ab}{2} = \frac{a(12-a)}{2}$$

Para hallar el área máxima, calculamos los puntos singulares: $A' = 0 \to A' = 6 - a = 0$.

Veamos si $a = 6$ es un máximo:

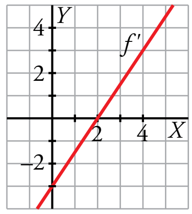


En efecto, lo es. Por tanto, si $a = 6$ y $b = 12 - 6 = 6$, se obtiene el triángulo rectángulo de área máxima.

La hipotenusa es $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$.

4. Gráfica de la función derivada

Esta es la gráfica de f', función derivada de f.



a) Obtener $f'(0)$, $f'(2)$ y $f'(4)$.

b) ¿Tiene f algún punto singular?

c) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de f.

a) $f'(0) = -3 \quad f'(2) = 0 \quad f'(4) = 3$

b) En $x = 2$ se anula la derivada primera. Además, esta es negativa a la izquierda de 2 y positiva a la derecha. Por tanto, la función pasa de decreciente a creciente en $x = 2$ y este punto es un mínimo.

c) La función decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

5. Regla de la cadena

Si $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $g(2) = 3$, $g'(2) = 1$, ¿cuál es la ecuación de la tangente a $y = g[f(x)]$ en $x = 1$?

$g[f(1)] = g(2) = 3$

$D[g[f(1)]] = g'[f(1)] \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 1 \cdot (-1) = -1$

La ecuación de la recta tangente es $y = -1(x - 1) + 3$, es decir, $y = -x + 4$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 326

Para practicar

Tasa de variación media

1 **Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:**

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2 - x)^3$ **c)** $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - f(1)}{2}$$

a) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{1/3 - 1}{2} = -\frac{1}{3} \to$ Decrece

b) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{-1 - 1}{2} = -1 \to$ Decrece

c) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{7 - 1}{2} = 3 \to$ Crece

d) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{8 - 2}{2} = 3 \to$ Crece

2 **a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \frac{1}{x + 1}$ en el intervalo [1, 1 + h].**

b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo [1; 1,5] utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

a) Para la función $f(x)$:

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-(1 + h)^2 + 5(1 + h) - 3 - 1}{h} = \frac{-1 - 2h - h^2 + 5 + 5h - 4}{h} = 3 - h$$

Para la función $g(x)$:

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1 + h + 1} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2 - h - 2}{2(2 + h)}}{h} = \frac{-1}{2h + 4}$$

b) Para la función $f(x)$:

$\text{T.V.M. } [1; 1,5] = 3 - 0,5 = 2,5$

Para la función $g(x)$:

$$\text{T.V.M. } [1; 1,5] = \frac{-1}{2 \cdot 0,5 + 4} = \frac{-1}{5}$$

3 **Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4], y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.**

Para $f(x)$: T.V.M. [2, 3] = 19

T.V.M. [3, 4] = 37

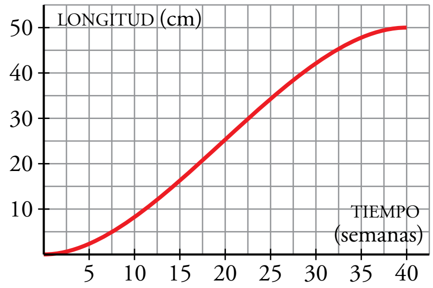
Para $g(x)$: T.V.M. [2, 3] = 18

T.V.M. [3, 4] = 54

En [2, 3] crece más $f(x)$.

En [3, 4] crece más $g(x)$.

4 **Esta gráfica muestra la longitud de un feto durante el embarazo. Estudia el crecimiento medio en los intervalos [5, 15] y [20, 30] y di en qué periodo es mayor el crecimiento:**



T.V.M: [5, 15] $= \dfrac{f(15)-f(5)}{10} = \dfrac{17-2}{10} = 1{,}5$ cm/semana

T.V.M. [20, 30] $= \dfrac{f(30)-f(20)}{10} = \dfrac{42-25}{10} = 1{,}7$ cm/semana

El crecimiento medio es mayor entre las semanas 20 y 30.

Definición de derivada

5 **Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$

d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

a) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h)^2-1-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h^2+2h)-3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3+3h^2+6h-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3h+6)}{h} = 6$$

b) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2(1+h)+1)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2h+3)^2-9}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h^2+9+12h-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4h+12)}{h} = 12$$

c) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3/(1+h)-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3-3-3h}{h(1+h)} = -3$$

d) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(1+h+2)^2}-\dfrac{1}{9}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{9-h^2-6h-9}{9(h+3)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-6h}{9h(h+3)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-6}{9(h+3)^2} = \frac{-2}{27}$$

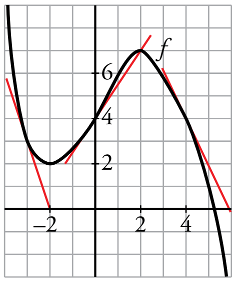
6 **Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de la tangente en $x = 2$ de las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{3x-7}$.**

• $$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{4(2+h)-(2+h)^2-4}{h} = \frac{8+4h-4-4h-h^2-4}{h} = -h$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} (-h) = 0$$

• $$\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{\dfrac{1}{3(2+h)-7}-(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{3h-1}+1}{h} = \frac{3}{3h-1}$$

$$g'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3}{3h-1} = -3$$

7 

Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = –3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.

a) ¿Cuál es el valor de $f'(–3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

c) En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

a) $f'(–3) = –3 \qquad f'(0) = \dfrac{3}{2} \qquad f'(4) = –2$

b) En $x = –2$ y $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada es positiva porque la pendiente de la tangente lo es. Análogamente, la derivada en $x = 3$ es negativa.

8 **Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:**

a) $f(x) = \dfrac{(5x-3)}{2}$

b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

a) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{5(x+h)-3}{2} - \frac{5x-3}{2}}{h} = \frac{5x+5h-3-5x+3}{2h} = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

b) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+7(x+h)-1-(x^2+7x-1)}{h} =$$

$$= \frac{x^2+2hx+h^2+7x+7h-1-x^2-7x+1}{h} = 2x + h + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h + 7) = 2x + 7$$

c) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-5(x+h)-(x^3-5x)}{h} =$$

$$= \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-5x-5h-x^3+5x}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 - 5$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 - 5) = 3x^2 - 5$$

d) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{x+h-1}{x+h} - \frac{x-1}{x}}{h} = \frac{x(x+h-1)-(x+h)(x-1)}{hx(x+h)} =$$

$$= \frac{x^2+hx-x-(x^2-x+hx-h)}{hx(x+h)} = \frac{1}{x(h+x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x(h+x)} = \frac{1}{x^2}$$

Reglas de derivación

9 **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$

b) $f(x) = 3\cos(2x + \pi)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{7x+1} + \dfrac{\sqrt{2x}}{3}$

f) $f(x) = x\, sen\, \dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

h) $f(x) = ln\, 3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \dfrac{tg\, x}{2}$

j) $f(x) = \sqrt{3}\, arc\, sen\, 2x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = x^2 + 14x - 4$

b) $f(x) = -3\cos 2x$

$f'(x) = -3(-sen\, 2x) \cdot 2 = 6 sen\, 2x$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) Teniendo en cuenta que $\dfrac{\sqrt{2x}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{x}$:

$f'(x) = \dfrac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-7}{(7x+1)^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = 1 \cdot sen\, \dfrac{x}{2} + x \cdot \cos\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = sen\, \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = (x-4)^{-1/2}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x-4)^{-3/2} = -\dfrac{1}{2(x-4)\sqrt{x-4}}$

h) $f(x) = ln\, 3 + ln\, x + e^{-x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + e^{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} - e^{-x}$

i) $f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\, x}{2}$ o también $f'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x}$

j) $f'(x) = \sqrt{3}\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-4x^2}}$

10 Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.

a) $f(x) = (5x-2)^3$

b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{3}\right)^4$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(6-x)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$

h) $f(x) = tg^3\, x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$

j) $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{x^2}{3}$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{81}\left(\dfrac{1}{x} + x\right)^4$

$$f'(x) = \frac{4}{81}\left(\frac{1}{x}+x\right)^3\left(-\frac{1}{x^2}+1\right) = \frac{4}{81}\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^3\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{4}{81}\,\frac{(x^4-1)(x^2+1)^2}{x^5}$$

c) $f(x) = (6-x)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(6-x)^{-1/3}(-1) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{6-x}}$$

d) $f(x) = \dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$

e) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}} \cdot \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^3}}\,\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}\,\frac{x(x^3-12x)}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}} \cdot \frac{x^3-12x}{(x^2-4)^2}$$

f) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{8}e^{2x+1} + \dfrac{x^3}{8}e^{2x+1} \cdot 2 = \dfrac{e^{2x+1}}{8}(2x^3 + 3x^2)$

g) $f'(x) = 3x^2\cos^2 3x + x^3 \cdot 2\cos 3x \cdot (-sen\ 3x) \cdot 3 = 3x^2[\cos^2 3x - 2x \cos 3x\ sen\ 3x] = 3x^2[\cos^2 3x - x\ sen\ 6x]$

h) $f'(x) = 3tg^2\, x^2 \cdot (1 + tg^2\, x^2) \cdot 2x = 6x\, tg^2\, x^2 \cdot (1 + tg^2\, x^2)$

i) $f(x) = \sqrt{7}\sqrt{\ln x}$

$$f'(x) = \sqrt{7} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{\ln x}}$$

j) $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{x^2+9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{x^2+9}$$

11 Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{arc\ cos\ e^x}$

b) $f(x) = log\ (sen\ x^2)$

c) $f(x) = sen^2\ x + e^{cos\ x}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x}}{2^{x-1}}$

e) $f(x) = e^{sen\ x} \cdot ln\ tg\ x$

f) $f(x) = 3\ cos\ (ln\ x)$

g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

h) $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{1-x}{1+x}$

i) $f(x) = 7^{\sqrt{x}} + \dfrac{cos\ x}{x^2}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{arc\ cos\ e^x}} \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x = \dfrac{-e^x}{2\sqrt{arc\ cos\ e^x\ (1-e^{2x})}}$

b) $f(x) = ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}} = ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ ln\ \dfrac{x}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\dfrac{x}{x^2+1}} \cdot \frac{1\,(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ \frac{x^2+1}{x}\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{2x(x^2+1)}$$

c) $f'(x) = 2sen\ x\ cos\ x + e^{cos\ x}\ (-sen\ x) = sen\ 2x - sen\ x \cdot e^{cos\ x}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \dfrac{x^{1/4}}{2^{x-1}}$

$$f'(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\dfrac{1}{4} \cdot x^{-3/4} \cdot 2^{x-1} - x^{1/4} \cdot 2^{x-1} \cdot ln\ 2 \cdot 1}{(2^{x-1})^2} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - ln\ 2\sqrt[4]{x}}{2^{x-1}} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1 - 4x\ ln\ 2}{2^{x+1} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$$

e) $f'(x) = e^{sen\ x} \cdot cos\ x \cdot ln\ tg\ x + e^{sen\ x} \cdot \dfrac{1}{tg\ x} \cdot \dfrac{1}{cos^2\ x} = e^{sen\ x}\left(cos\ x \cdot ln\ tg\ x + \dfrac{1}{sen\ x\ cos\ x}\right)$

f) $f'(x) = 3\,[-sen\ (ln\ x)] \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3\ sen\ (ln\ x)}{x}$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x}}$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}\ \dfrac{-1\,(1+x) - (1-x)\,1}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2}\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} = \dfrac{-2}{2+2x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

i) $f'(x) = 7^{\sqrt{x}} \cdot ln\ 7 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{-sen\ x \cdot x^2 - cos\ x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{ln\ 7 \cdot 7^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x\ sen\ x + 2\ cos\ x}{x^3}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x\,(1-e^{-2x})}{e^x\,(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$$f'(x) = \frac{-e^{-2x}\,(-2)\,(1+e^{-2x}) - (1-e^{-2x})\,e^{-2x}\,(-2)}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{2e^{-2x}\,(1+e^{-2x}) + 2e^{-2x}\,(1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$$

12 **Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:**

a) $f(x) = ln\ \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = ln\ \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ **c)** $f(x) = ln\ (x \cdot e^{-x})$

d) $f(x) = log\ \dfrac{(3x-5)^3}{x}$ **e)** $f(x) = log\ (tg\ x)^2$ **f)** $f(x) = log\ \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$

a) $f(x) = ln\ (x^2 + 1) - ln\ (x^2 - 1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{x^4-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}[ln\ x - ln\ (x^2+1)]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$$

c) $f(x) = ln\ x + ln\ e^{-x} = ln\ x - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

d) $f(x) = 3\ log\ (3x-5) - log\ x$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{ln\ 10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\ 10} = \frac{1}{ln\ 10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{ln\ 10} \cdot \frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{ln\ 10\ (3x^2-5x)}$$

e) $f(x) = 2\ log\ (tg\ x)$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1+tg^2\ x}{tg\ x} \cdot \frac{1}{ln\ 10} = \frac{2\ (1+tg^2\ x)}{tg\ x \cdot ln\ 10}$$

f) $f(x) = x\ ln\ x$

$$f'(x) = ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\ x + 1$$

Página 327

Recta tangente y recta normal

13 **Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función f en el punto de abscisa indicado en cada caso.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$ **en** $x = -1$ **d)** $f(x) = ln\ x$ **en** $x = e^2$

e) $f(x) = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **en** $x = \dfrac{\pi}{3}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangente es $y = -1(x-2) + 0$, es decir, $y = -x + 2$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-1}(x-2) + 0$, es decir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \dfrac{1}{4}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{4}(x-3) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/4}(x-3) + 2$, es decir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{2x-6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangente es $y = -8(x+1) - 3$, es decir, $y = -8x - 11$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-8}(x+1) - 3$, es decir, $y = \dfrac{1}{8}x - \dfrac{23}{8}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \dfrac{1}{e^2}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = -e^2 x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangente es $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$, es decir, $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

14 Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \dfrac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = ln\,(4x-1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \;\to\; 2x - 2 = 2 \;\to\; x = 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 2 \;\to\; \dfrac{2}{(x+2)^2} = 2 \;\to\; (x+2)^2 = 1 \;\to\; x_1 = -1,\; x_2 = -3$

c) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \to \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \to \sqrt{x+3} = 1 \to x = -2$

d) $f'(x) = \dfrac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \to \dfrac{4}{4x-1} = 2 \to 4x - 1 = 2 \to x = \dfrac{3}{4}$

15 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f, que sea paralela a la recta dada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ paralela a $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ paralela a $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ paralela a $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \to y = -2x - 1$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente –2 para que sea paralela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \to 2x + 4 = -2 \to x = -3$

$f(-3) = -2$ y la recta tangente es $y = -2(x+3) - 2$.

b) La recta tangente debe tener pendiente 6 para que sea paralela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \to 3x^2 - 3 = 6 \to x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \to f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \to f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \to y = 5x$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente 5 para que sea paralela.

$f'(x) = \dfrac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 5 \to \dfrac{5}{(x+2)^2} = 5 \to (x+2)^2 = 1 \to x_1 = -1,\ x_2 = -3$

Si $x = -1 \to f(-1) = -4$

La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x+1) - 4$

Si $x = -3 \to f(-3) = 6$

La recta tangente en $x = -3$ es $y = 5(x+3) + 6$

16 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen haciendo $y = 0$.

$y = 0 \to 4 - x^2 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \to f'(-2) = 4$. La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x+2)$

Si $x = 2 \to f'(2) = -4$. La recta tangente en $x = 2$ es $y = -4(x-2)$

17 **Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.**

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$

e) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

f) $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

Los puntos donde la recta tangente es horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 6x - 2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{3} + 5 = \dfrac{14}{3}$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{14}{3}$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1$

$f(0) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(1) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 0$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$

$f(0) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(3) = -27 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y = -27$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = 16 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$.

$f(2) = -16 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

e) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

$f(-1) = 1 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y = -2$.

$f(1) = 1 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 2$.

f) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento

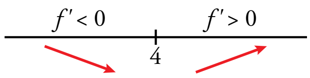
18 **Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ **b)** $f(x) = 12x - 3x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \to 2x - 8 = 0 \to x = 4$

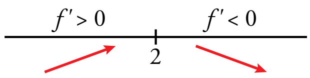


Como $f(4) = -5$, el punto $(4, -5)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 12 - 6x$

$f'(x) = 0 \to 12 - 6x = 0 \to x = 2$



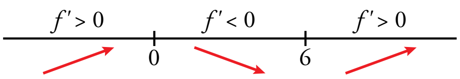
Como $f(2) = 12$, el punto $(2, 12)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento $(-\infty, 2)$. Intervalo de decrecimiento $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \to x^2 - 6x = 0 \to x = 0, \; x = 6$

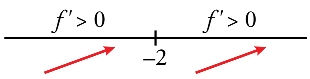
Como $f(0) = 0$ y $f(6) = -36$, los puntos $(0, 0)$ y $(6, -36)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento $(0, 6)$.

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 + 12x + 12 = 0 \to x = -2$



Como $f(-2) = -8$, el punto $(-2, -8)$ es un punto singular.

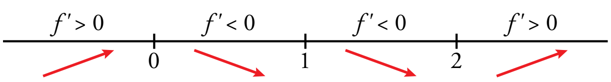
Intervalo de crecimiento $\mathbb{R}$.

e) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \to x = 0, \; x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento $(0, 1) \cup (1, 2)$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

No tiene puntos singulares. Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq -2$ y la función no está definida en $x = -2$, los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

19 **Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:**

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$, la función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 0$ y no está definida en $x = 0$, los intervalos de decrecimiento son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq 0$, el intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ en su dominio de definición, el intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

20 **Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$ **b)** $y = 3x^2 - x^3$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 10$ **d)** $y = -3x^4 - 12x$

e) $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$ **f)** $y = \dfrac{x^3 + 4}{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 4x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{3},\; x = 1$

Como $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{58}{27}$ y $f(1) = 2$, los puntos $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ y $(1, 2)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$$ Por tanto $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ es un máximo y $(1, 2)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x - 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$$ Por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo y $(2, 4)$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 0,\ x = 2$

Como $f(-2) = -6$, $f(0) = 10$ y $f(2) = -6$, los puntos $(-2, -6)$, $(0, 10)$ y $(2, -6)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (-2, -6) \text{ y } (2, -6) \text{ son mínimos.}$$

El punto $(0, 10)$ debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow -12x^3 - 12 = 0 \rightarrow x = -1$

Como $f(-1) = 9$ el punto $(-1, 9)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (-1, 9) \text{ es un máximo.}$$

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

Como $f(0) = 3$, el punto $(0, 3)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \text{ Por tanto, } (0, 3) \text{ es un máximo.}$$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2}$

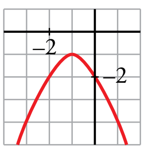
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

Como $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

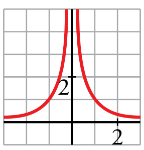
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Por tanto, } \left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right) \text{ es un mínimo.}$$

21 **Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:**

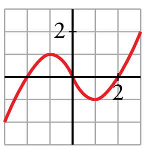
a)



b)



c)



a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

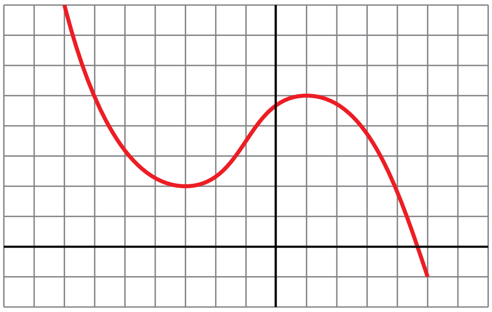
$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gráficas de funciones polinómicas y racionales

22 **Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que:**

- **Es continua.**
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **Sus puntos de tangente horizontal son (–3, 2) y (1, 5).**

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.



(–3, 2) es un mínimo.

(1, 5) es un máximo.

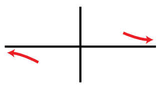
23 **De una función polinómica sabemos que:**

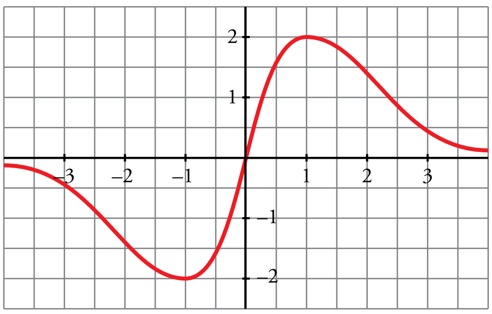
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es igual a 0 solo en (–2, 2) y en (2, –1).**
- **Corta a los ejes solo en (0, 0) y en (4, 0).**

Represéntala gráficamente.

24 **Representa una función continua $y = f(x)$ de la que sabemos que:**

- **Sus puntos de tangente horizontal son (–1, –2) y (1, 2).**
- **Sus ramas infinitas son así:**





25 **Comprueba que la función $y = (x-1)^3$ pasa por los puntos (0, –1), (1, 0) y (2, 1). Su derivada se anula en el punto (1, 0). ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?**

$f'(x) = 3(x-1)^2$: $f(0) = -1 \to$ pasa por (0, –1)

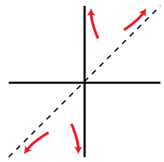
$f(1) = 0 \to$ pasa por (1, 0)

$f(2) = 1 \to$ pasa por (2, 1)

$f'(1) = 0$

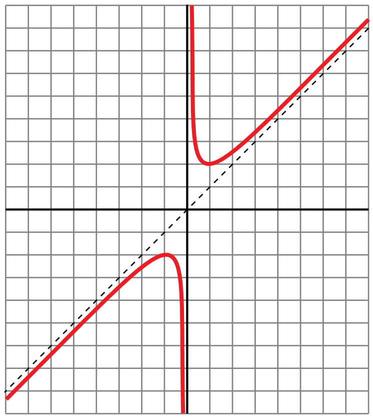
El punto (1, 0) no es ni máximo ni mínimo.

26 **Comprueba que la función $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, (–1, –2) y (1, 2); sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración. Represéntala.**



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x = -1,\ x = 1$



Puntos (–1, –2) y (1, 2).

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asíntota vertical en $x = 0$.

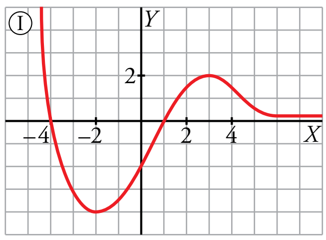
Asíntota oblicua en $y = x$.

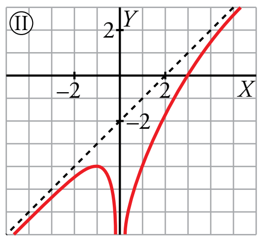
Página 328

27 **Observa estas gráficas y describe:**

a) Sus ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva con respecto a ellas.

b) Sus puntos singulares, crecimiento y decrecimiento.





a) • Función I

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y la función queda por encima de la asíntota.

• Función II

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. En ambos casos, la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ por los dos lados.

b) • Función I

El punto (–2, –4) es un mínimo. El punto (3, 2) es un máximo.

Hay otro punto singular, (0,5; –1), pero no es ni máximo ni mínimo.

• Función II

Solo tiene un punto singular, el máximo (–1, –4).

28 **Dada la función $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ comprueba que:**

- **Tiene derivada nula en (0, 0).**
- **La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.**
- **La posición de la curva respecto a la asíntota es:**

  Si $x \to -\infty$, $y < 2$

  Si $x \to +\infty$, $y < 2$

Represéntala.

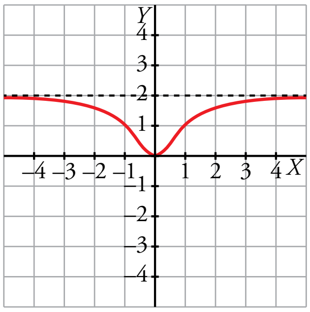
- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \to$ La derivada en (0, 0) es nula.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 \to$ La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

- $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

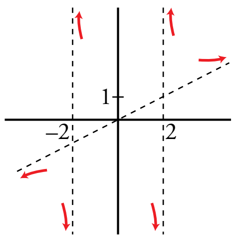
  Como la diferencia siempre es negativa, la función queda por debajo de la asíntota $y = 2$.

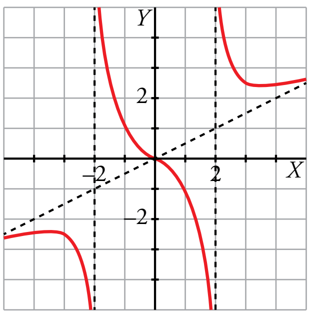


29 **Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:**

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right),\ (0, 0),\ \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas a la derecha.





30 **Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

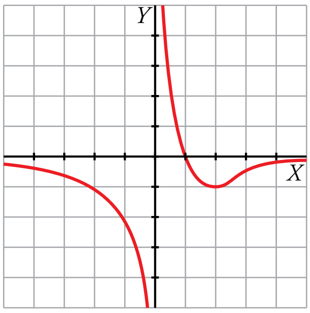
- **Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$**
- **Corta al eje X en $x = 1$.**
- **Asíntota horizontal: $y = 0$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asíntota vertical: $x = 0$**

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$
- **Mínimo en $(2, -1)$.**



31 **Representa $y = f(x)$ de la que conocemos:**

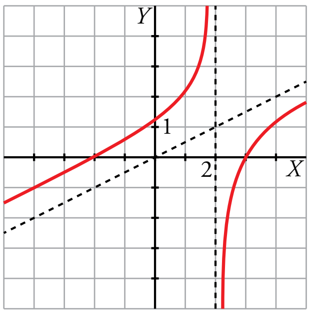
- **Asíntota vertical: $x = 2$**

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$
- **Asíntota oblicua: $y = x/2$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < x/2$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) > x/2$
- **Cortes con los ejes: $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$**



Para resolver

32 **a) Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.**

b) Halla las coordenadas del vértice de una parábola cualquiera $y = ax^2 + bx + c$.

a) $f'(x) = 2x + 6 = 0 \to x = -3$

Punto $(-3, 2)$.

b) $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \to 2ax + b = 0 \to x = \dfrac{-b}{2a}$ es la abscisa del vértice.

$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ es la ordenada de vértice.

33 **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \to 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \to 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \to 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

34 **Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \to f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \to g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \to x = 2$$

Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 13 \to y = 10x - 7$

Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 16 \to y = 10x - 4$

35 **Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \to 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 2 \to b = \ \ 0 \\ f(1) = 1 \to 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

36 **La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?**

Despejamos y de la ecuación de la recta tangente: $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

$f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente en $x = 2$, es decir, $f'(2) = \frac{4}{3}$.

Como la recta tangente y la curva pasan por el punto de tangencia, $f(2) = \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} = 3$.

37 **Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por $(0, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, -1)$ vale 0.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \to 1 = c \\ f(2) = -1 \to -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \to 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

38 **Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y las ramas infinitas:**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = x^4 + 4x^3$ **c)** $f(x) = 12x - x^3$ **d)** $f(x) = -x^4 + 4x^2$

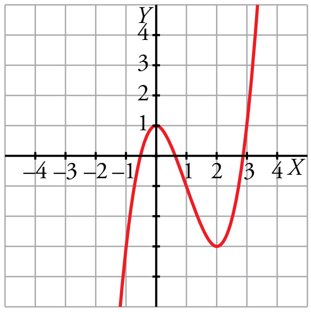
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

$f(0) = 2,\ f(2) = -3 \rightarrow$ Los puntos singulares son (0, 1) y (2, –3).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$



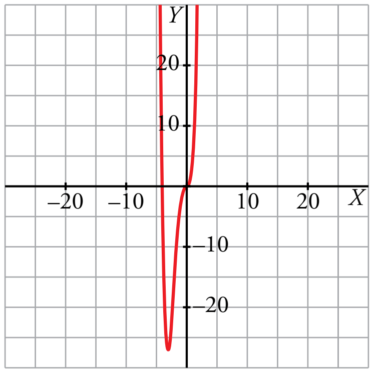
b) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = -3,\ x = 0$

$f(-3) = -27,\ f(0) = 0 \rightarrow$ Los puntos singulares son (–3, –27) y (0, 0).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$



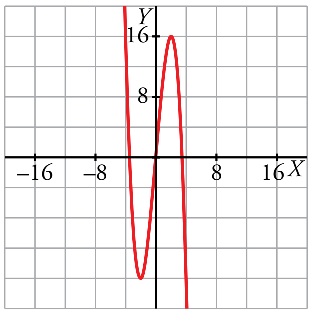
c) $f'(x) = 12 - 3x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = -16,\ f(2) = 16 \rightarrow$ Los puntos singulares son (–2, –16) y (2, 16).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$



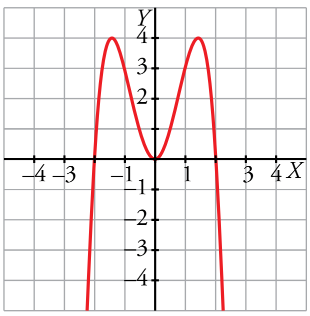
d) $f'(x) = -4x^3 + 8x$

$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^3 + 8x = 0 \rightarrow x = -\sqrt{2},\ x = 0,\ x = \sqrt{2}$

$f\left(-\sqrt{2}\right) = 4,\ f(0) = 0,\ f\left(\sqrt{2}\right) = 4 \rightarrow$ Los puntos singulares son $\left(-\sqrt{2}, 4\right)$, (0, 0) y $\left(\sqrt{2}, 4\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$



39 **Estudia y representa.**

a) $y = x^3 - 3x + 2$ **b)** $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ **c)** $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$ **d)** $y = x^4 - 8x^2 + 2$

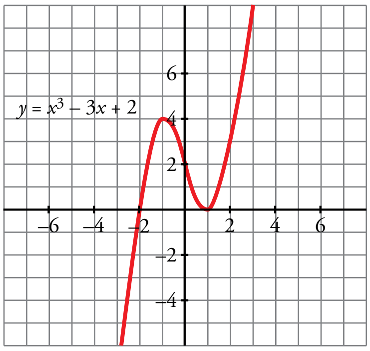
a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \;\to\; x = \pm 1$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \;\to\; (1, 0) \\ f(-1) = 4 \;\to\; (-1, 4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$



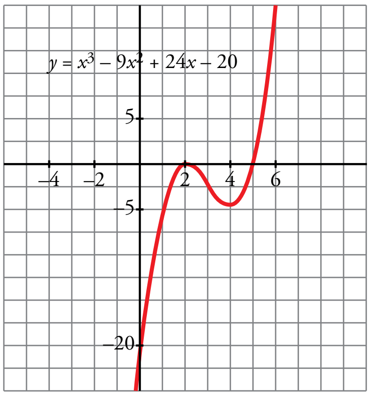
b) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -4 \;\to\; (4, -4) \\ f(2) = 0 \;\to\; (2, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = +\infty$$

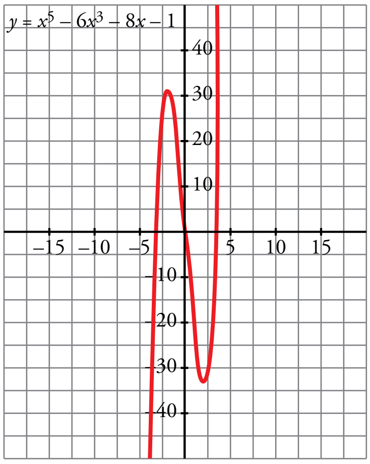


c) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \begin{cases} x = 2 \;\to\; f(2) = -33 \;\to\; (2, -33) \\ x = -2 \;\to\; f(-2) = 31 \;\to\; (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

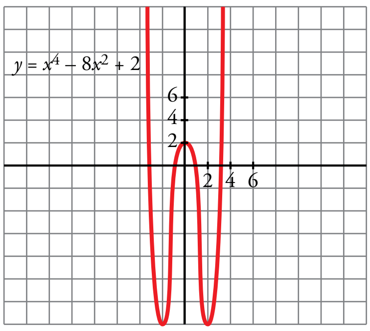


d) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \begin{cases} x = 0 \;\to\; f(0) = 2 \;\to\; (0, 2) \\ x = 2 \;\to\; f(2) = -14 \;\to\; (2, -14) \\ x = -2 \;\to\; f(-2) = -14 \;\to\; (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$

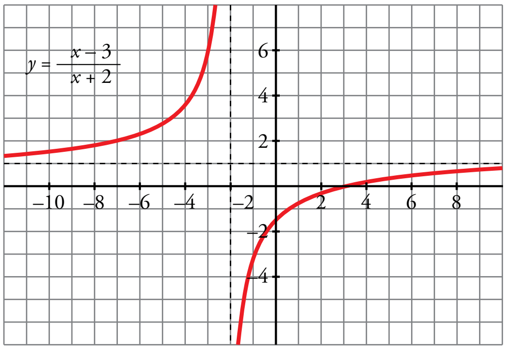


40 **Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

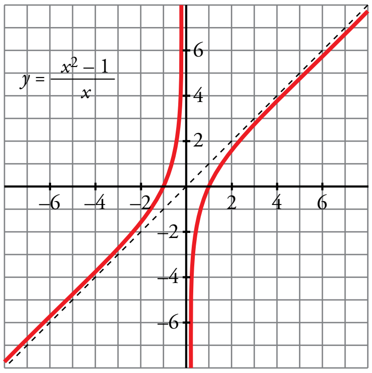
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$.



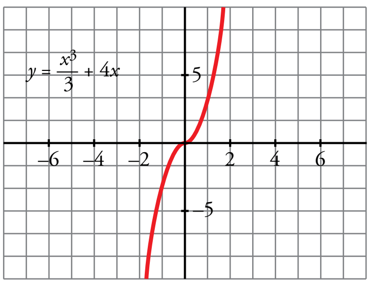
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $(1, 0)$, $(-1, 0)$



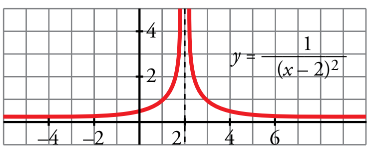
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es $(0, 0)$.



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



41 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ **b)** $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ **c)** $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

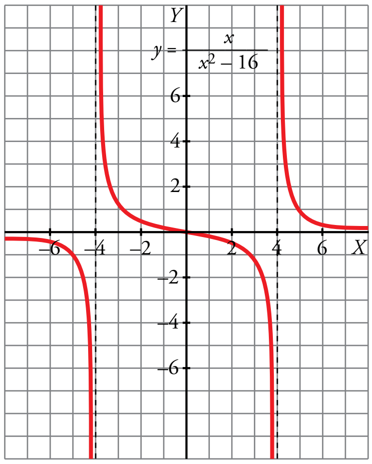
d) $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 2}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

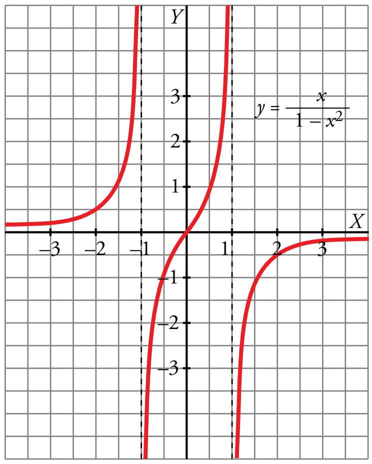


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

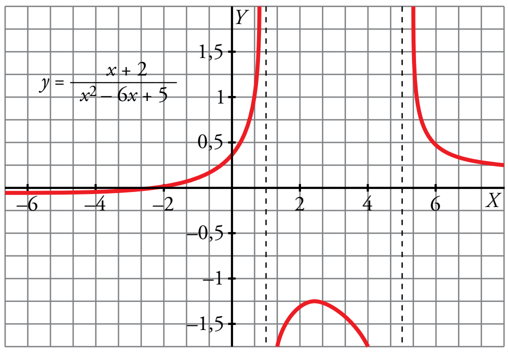
Asíntotas verticales: $x = 5$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–6,58; –0,052), (2,58; –1,197)



d) $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$

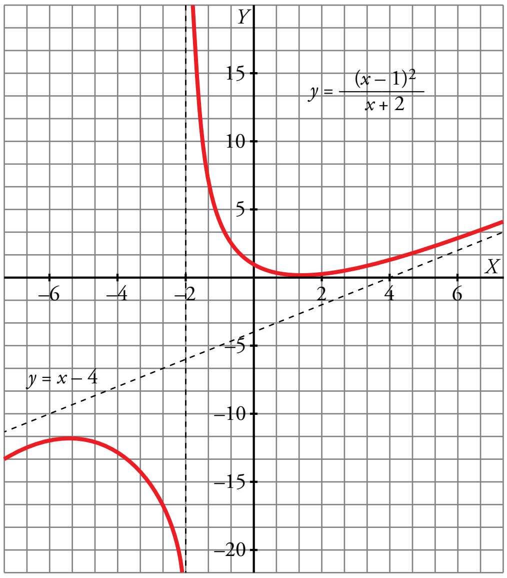
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

(1, 0), (–5, 12)



e) $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$

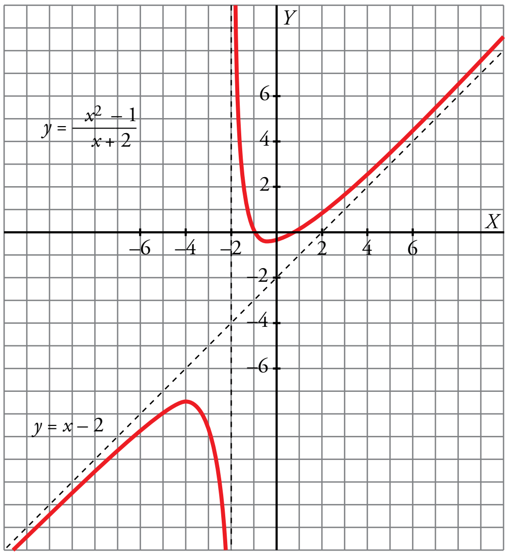
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–0,26; –0,54), (–3,73; –7,46)



f) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

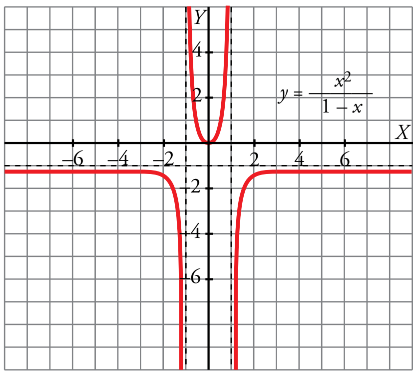
Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

(0, 0)



Página 329

42 **Halla las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$

a) $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

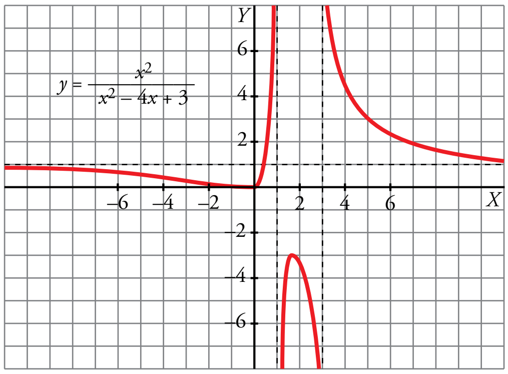
Asíntotas verticales: $x = 3,\ x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0),\ \left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$



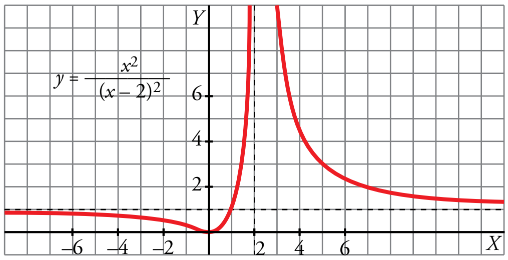
b) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x-2)^3}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son: $(0, 0)$



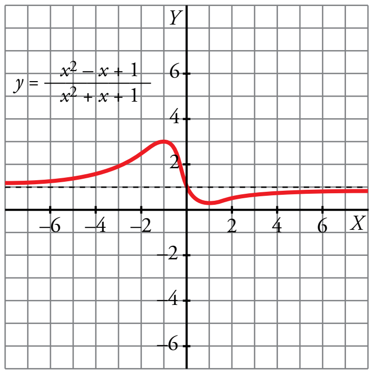
c) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$\left(1, \dfrac{1}{3}\right),\ (-1, 3)$

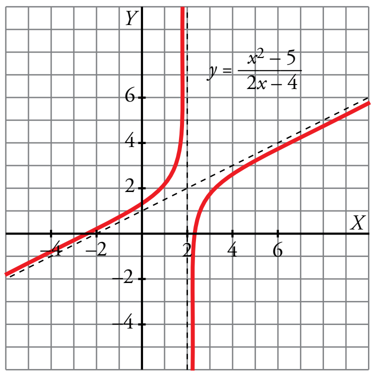


d) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{(2x - 4)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



43 **Calcula el valor de a para que $f(x) = ln\left(\dfrac{x^2}{x+a}\right)$ verifique que $f'(2) = 0$.**

$f(x) = 2ln\, x - ln\,(x + a)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+a} \to f'(2) = 1 - \dfrac{1}{2+a}$

$f'(2) = 0 \to 1 - \dfrac{1}{2+a} = 0 \to a = -1$

44 **Dada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a f en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$.**

Como la recta tangente en $x = -2$ es $y = 2x - 3$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 2(-2) - 3 = -7 \\ f'(-2) = 2 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$f'(-2) = 2 \to 6(-2)^2 + 24(-2) + a = 2 \to a = 26$

$f(-2) = -7 \to 2(-2)^3 + 12(-2)^2 + 26(-2) + b = -7 \to b = 13$

45 **Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.**

- Pendiente de la recta tangente:

  $f'(x) = 2x - 5 \to f'(1) = -3$

- Punto de tangencia: $x = 1$; $y = 1 - 5 + k \to (1, -4 + k)$
- Ecuación de la recta tangente:

  $y = -4 + k - 3(x - 1)$

- Para que pase por (0, 0), debe verificarse:

  $0 = -4 + k + 3 \to k = 1$

46 **Halla los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas.**

Si la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje OX, su pendiente es $tg\, 45° = 1$.

Buscamos los puntos donde $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$f'(x) = 1 \to 3x^2 - 6x + 1 = 1 \to x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = -2$, los puntos (0, 0) y (2, –2) son los que cumplen las condiciones del problema.

47 **Dada la parábola $y = 5 + 6x - 3x^2$, se traza la cuerda que une los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.**

$f(0) = 5$ y $f(3) = -4$. Por tanto, la pendiente de la cuerda que pasa por estos puntos es $\dfrac{-4-5}{3-0} = -3$.

Tratamos de encontrar el punto que cumple la igualdad $f'(x) = -3$:

$f'(x) = 6 - 6x$

$f'(x) = -3 \to 6 - 6x = -3 \to x = \dfrac{3}{2}$

Como $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 5 + 6 \cdot \dfrac{3}{2} - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{29}{4}$, la recta tangente es $y = -3\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{29}{4}$.

48 **El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$**

El coste medio por unidad es: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

a) $M(q) = \dfrac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$$M'(q) = \frac{(6q+5)\,q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} = \frac{6q^2 + 5q - 3q^2 - 5q - 75}{q^2} = \frac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \;\to$$

$\to q^2 = 25 \;\to\; q = 5$ unidades

Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175$; $M(5) = 35$

49 **La función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2 + 9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).**

a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

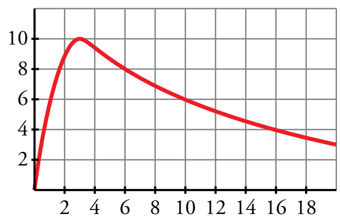
c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

a) $f'(x) = \dfrac{60\,(x^2+9) - 60x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-60x^2 + 540}{(x^2+9)^2} = 0 \;\to\; x = 3$ ($x = -3$ no está en el dominio).

Máximo en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \;\to$ asíntota horizontal: $y = 0$

La gráfica sería:



b) Beneficio máximo en $x = 3 \;\to$ A los 3 años.

El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

50 **Aplica la regla de L'Hôpital para resolver los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{sen\ x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ x}{5x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\ x}{x^2 + 5x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{ln\,(2x+1)}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - sen\ x}{sen\ x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x + tg\ x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{sen\ x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{cos\ x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\ x}{5x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + tg^2 x}{5} = \dfrac{1}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2 + 5x - 1} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{2x+5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(2x+5)} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln(2x+1)} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\dfrac{2}{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x(2x+1)}{2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\cos x} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + \operatorname{tg} x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1 + 1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{2}$

51 **Halla los límites siguientes:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4[x - \ln(1+x)]}{x \ln(1+x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2(e^x - 1)e^x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2e^{2x} - 2e^x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{4e^{2x} - 2e^x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4[x - \ln(1+x)]}{x \ln(1+x)} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\left[1 - \dfrac{1}{1+x}\right]}{\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 \cdot \dfrac{x}{1+x}}{\dfrac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{(1+x)\ln(1+x) + x} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{\ln(1+x) + \dfrac{1+x}{1+x} + 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

52 **Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, halla a y b para que f pase por el punto (1, 3) y en ese punto la tangente sea paralela a la recta $y = 4x + 1$.**

Pasa por (1, 3) $\to f(1) = 3 \to a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 3 \to a + b = 3$

Para que la recta tangente sea paralela a la recta dada, $f'(1) = 4$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 4 \to 3a \cdot 1^2 + b = 4 \to 3a + b = 4$

Ahora, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ 3a + b = 4 \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$$

53 **Determina, en cada caso, los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo que se indica.**

a) $y = x^2 - 6x - 4,\quad x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5,\quad x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2,\quad x \in [-2, 4]$

d) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1},\quad x \in [0, 2]$

Hallamos los puntos singulares que quedan dentro de los diferentes intervalos, evaluamos en ellos y en los extremos de los intervalos.

a) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

$f(0) = -4 \quad f(3) = -13 \quad f(5) = -9$

El máximo se encuentra en $x = 0$ y vale -4.

El mínimo se encuentra en $x = 3$ y vale -13.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(-1) = -24 \quad f(2) = 3 \quad f(4) = 83$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 83.

El mínimo se encuentra en $x = -1$ y vale -24.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0, \ x = 2$

$f(-2) = -20 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(4) = 16$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 16.

El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale -20.

d) $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = -1, \ x = 1$

$f(0) = 0 \quad f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2} \quad f(2) = \dfrac{2}{5}$

El máximo se encuentra en $x = 1$ y vale $\dfrac{1}{2}$.

El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 0.

54 **Halla los máximos y los mínimos de las funciones $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

- $y = sen\ x$

$f'(x) = cos\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}, \ x = \dfrac{3\pi}{2}$

$f(0) = 0 \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \quad f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad f(2\pi) = 0$

El máximo se encuentra en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y vale 1.

El mínimo se encuentra en $x = \dfrac{3\pi}{2}$ y vale -1.

- $y = cos\ x$

$f'(x) = -sen\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \rightarrow x = 0, \ x = \pi, \ x = 2\pi$

$f(0) = 1 \quad f(\pi) = -1 \quad f(2\pi) = 1$

Los máximos se encuentran en $x = 0$ y $x = 2\pi$ y valen 1.

El mínimo se encuentra en $x = \pi$ y vale -1.

55 **Estudia el crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y sus mínimos:**

a) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$

b) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

c) $y = ln\,(x^2 + 1)$

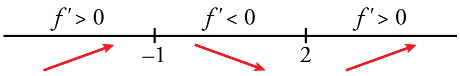
d) $y = x\,ln\,x$

a) Puntos singulares:

$f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = e^x(x^2 - x - 2)$

$f'(x) = 0 \;\to\; e^x(x^2 - x - 2) = 0 \;\to\; x^2 - x - 2 = 0 \;\to\; x = -1,\; x = 2$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(-1) = \dfrac{5}{e} \;\to\; \left(-1, \dfrac{5}{e}\right)$ es un máximo.

$f(2) = -e^2 \;\to\; (-1, -e^2)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

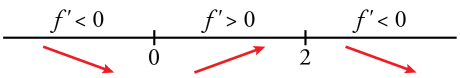
Intervalos de decrecimiento $(-1, 2)$.

b) Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2x - x^2}{e^x} = 0 \;\to\; x = 0,\; x = 2$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

$f(2) = \dfrac{4}{e^2} \;\to\; \left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

Intervalos de crecimiento $(0, 2)$.

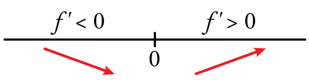
Intervalos de decrecimiento $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0 \;\to\; x = 0$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento $(0, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento $(-\infty, 0)$.

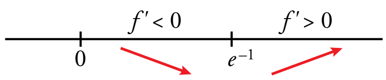
d) $Dom = (0, +\infty)$

Puntos singulares:

$f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \ln x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = e^{-1}$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(e^{-1}) = -e^{-1} \;\rightarrow\; (e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento $(e^{-1}, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento $(0, e^{-1})$.

56 **Prueba que existe un punto de la curva $y = arc\ tg\ \dfrac{x-1}{x+1}$ en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

La bisectriz del primer cuadrante tiene pendiente 1. Por tanto, el punto en el que la recta tangente es paralela a ella, cumple la ecuación.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{x^2+1} = 1 \;\rightarrow\; x = 0$$

$f(0) = -\dfrac{\pi}{4} \;\rightarrow\;$ En el punto $\left(0, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

57 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} e^x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Llamemos $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ y $f_2(x) = -2x + 5$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 1 \\ f_2(2) = 1 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $f(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$f'_1(x) = 2x - 2$ y $f'_2(x) = -2$

$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = 2 \\ f'_2(2) = -2 \end{array}\right\}$ Como $f'_1(2) \neq f'_2(2)$, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

La derivada queda así:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Llamemos $g_1(x) = 2x - 5$ y $g_2(x) = \sqrt{x-2}$. Ambas funciones son continuas y derivables donde están definidas.

$\left.\begin{array}{l} g_1(3) = 1 \\ g_2(3) = 1 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $g(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$g'_1(x) = 2$ y $g'_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$\left.\begin{array}{l} g'_1(3) = 2 \\ g'_2(3) = 1/2 \end{array}\right\}$ Como $g'_1(3) \neq g'_2(3)$, la función $g(x)$ no es derivable en $x = 3$.

La derivada queda así:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) Llamemos $h_1(x) = e^x + 2$ y $h_2(x) = x^2 + x + 3$. Ambas funciones son continuas y derivables.

$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = 3 \\ h_2(0) = 3 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $h(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$h'_1(x) = e^x$ y $h'_2(x) = 2x + 1$

$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 1 \\ h'_2(0) = 1 \end{array}\right\}$ Como $h'_1(0) = h'_2(0)$, la función $h(x)$ es derivable en $x = 0$ y $h'(0) = 1$.

La derivada queda así:

$$h'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

58 Calcula, en cada caso, los valores de m y n para que las funciones siguientes sean derivables en $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} mx^2 + nx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2nx - 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \le 0 \\ mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $j(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - nx - 4 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

a) Llamemos $f_1(x) = x^2 - 5x + m$ y $f_2(x) = -x^2 + nx$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 2$ debe ser:

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = -6 + m \\ f_2(2) = -4 + 2n \end{array}\right\} \to -6 + m = -4 + 2n$

$f'_1(x) = 2x - 5$ y $f'_2(x) = -2x + n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 2$ debe ser:

$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = -1 \\ f'_2(2) = -4 + n \end{array}\right\} \to -1 = -4 + n$

Resolvemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} -6 + m = -4 + 2n \\ -1 = -4 + n \end{array}\right\} \to$ Los valores son $m = 8$, $n = 3$.

b) Llamemos $g_1(x) = mx^2 + nx - 3$ y $g_2(x) = 2nx - 4$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 1$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(1) = m + n - 3 \\ g_2(1) = 2n - 4 \end{array}\right\} \to m + n - 3 = 2n - 4$$

$g'_1(x) = 2mx + n$ y $g'_2(x) = 2n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 1$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} g'_1(1) = 2m + n \\ g'_2(1) = 2n \end{array}\right\} \to 2m + n = 2n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} m + n - 3 = 2n - 4 \\ 2m + n = 2n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 1,\ n = 2.$$

c) Llamemos $h_1(x) = (x - 1)^3$ y $h_2(x) = mx + n$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 0$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = -1 \\ h_2(0) = n \end{array}\right\} \to n = -1$$

$h'_1(x) = 3(x - 1)^2$ y $h'_2(x) = m$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 0$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 3 \\ h'_2(0) = m \end{array}\right\} \to m = 3$$

d) Llamemos $j_1(x) = mx^2 + 3x$ y $j_2(x) = x^2 - nx - 4$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = -2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} j_1(-2) = 4m - 6 \\ j_2(-2) = 2n \end{array}\right\} \to 4m - 6 = 2n$$

$j'_1(x) = 2mx + 3$ y $j'_2(x) = 2x - n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = -2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} j'_1(-2) = -4m + 3 \\ j'_2(-2) = -4 - n \end{array}\right\} \to -4m + 3 = -4 - n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4m - 6 = 2n \\ -4m + 3 = -4 - n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 2,\ n = 1.$$

Página 330

59 Dada las funciones $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$ y $f(x) = e^{2x}$ halla, en cada caso, f', f'', f''', f^{IV}. ¿Cuál será la derivada enésima de cada una de las funciones dadas?

• $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$

$f'(x) = 4x^3 - 10x + 6$

$f''(x) = 12x^2 - 10$

$f'''(x) = 24x$

$f^{IV}(x) = 24$

$f^{V}(x) = 0$ y, desde esta, todas las derivadas sucesivas siguientes.

• $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2\,e^{2x}$

$f''(x) = 4\,e^{2x}$

$f'''(x) = 8\,e^{2x}$

$f^{IV}(x) = 16\,e^{2x}$

La fórmula general, teniendo en cuenta que los coeficientes son potencias de 2, es:

$f^{n}(x) = 2^n e^{2x}$

60 Halla dos números positivos cuya suma sea 100 y su producto sea máximo.

Sean x e y dos números positivos.

$x + y = 100 \rightarrow y = 100 - x$

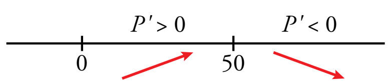
El producto es $P = xy = x(100 - x) = 100x - x^2$

Buscamos que el producto sea máximo:

$P' = 100 - 2x$

$P' = 0 \rightarrow 100 - 2x = 0 \rightarrow x = 50 \rightarrow y = 100 - 50 = 50$

Ahora comprobamos si el valor $x = 50$ es un máximo:



Por tanto, cuando $x = y = 50$ se obtiene el producto máximo que es, $P = 2\,500$.

61 Calcula dos números cuya suma sea 50 y tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.

Sean x e y dos números.

$x + y = 50 \rightarrow y = 50 - x$

La suma de los cuadrados es $S = x^2 + y^2 = x^2 + (50 - x)^2 = 2x^2 - 100x + 2\,500$

Buscamos que la suma de cuadrados sea mínima:

$S' = 4x - 100$

$S' = 0 \rightarrow 4x - 100 = 0 \rightarrow x = 25 \rightarrow y = 50 - 25 = 25$

Ahora comprobamos si el valor $x = 25$ es un mínimo:

$S' < 0$ | 25 | $S' > 0$

Por tanto, cuando $x = y = 25$ se obtiene la suma de cuadrados mínima que es, $S = 1\,250$.

62 **Encuentra dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima.**

Sean x, y los números positivos.

$xy = 100 \rightarrow y = \dfrac{100}{x}$

La suma es $S = x + y = x + \dfrac{100}{x}$

Queremos encontrar la suma mínima:

$S' = 1 - \dfrac{100}{x^2}$

$S' = 0 \rightarrow 1 - \dfrac{100}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 10 \rightarrow x = 10$ (solo es válido el resultado positivo)

Veamos si es un mínimo:

0 | $S' < 0$ | 10 | $S' > 0$

Por tanto, cuando $x = 10$, $y = \dfrac{100}{10} = 10$, se obtiene la suma mínima, que es $S = 20$.

63 **Halla la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 30 cm cuya área sea la mayor posible.**

* ***Llama x a la mitad de la base.***

Si llamamos x a la mitad de la base y h a la altura del triángulo, el lado desigual mide $2x$ y cada uno de los lados iguales mide $\dfrac{30 - 2x}{2} = 15 - x$.

Por el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{(15 - x)^2 - x^2} = \sqrt{225 - 30x}$

El área del triángulo es $A = \dfrac{2x\sqrt{225 - 30x}}{2} = x\sqrt{225 - 30x}$

$$A' = \sqrt{225 - 30x} + \frac{x(-30)}{2\sqrt{225 - 30x}} = \frac{225 - 30x - 15x}{\sqrt{225 - 30x}} = \frac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}}$$

$$A' = 0 \rightarrow \frac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}} = 0 \rightarrow 225 - 45x = 0 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

Comprobamos si hemos obtenido un máximo.

0 | $A' > 0$ | 5 | $A' < 0$

En efecto, $x = 5$ cm es un máximo. La base mide 10 cm, la altura mide $h = \sqrt{225 - 150} = 5\sqrt{3}$ cm y el área máxima es $A = 25\sqrt{3}$ cm^2.

64 **Con 100 m de valla queremos delimitar una parcela rectangular aprovechando una pared, de modo que solo tengamos que vallar tres de sus lados. Calcula las dimensiones de la parcela de área máxima que podemos vallar.**

Llamamos x a los lados del rectángulo perpendiculares a la pared e y al lado paralelo a ella.

$2x + y = 100 \to y = 100 - 2x$

El área del rectángulo es:

$A = xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

Queremos hallar el valor que da lugar al área máxima:

$A' = 100 - 4x$

$A' = 0 \to 100 - 4x = 0 \to x = 25$ m

Comprobamos que es un máximo:

$A' > 0$ $\quad$ $A' < 0$

0 $\nearrow$ 25 $\searrow$

Por tanto, el área máxima se da si $x = 25$ m, $y = 100 - 50 = 50$ m y es $A = 25 \cdot 50 = 1\,250$ m^2.

65 **Halla los lados del rectángulo de área máxima entre todos los que tienen la diagonal igual a 12 cm.**

Llamemos x, y a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

$x^2 + y^2 = 12^2 \to y = \sqrt{144 - x^2}$

El área del rectángulo es:

$A = xy = x\sqrt{144 - x^2}$

Hallamos el valor que da el área máxima:

$$A' = \sqrt{144 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = \frac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}}$$

$A' = 0 \to \dfrac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = 0 \to 144 - 2x^2 = 0 \to$ Obtenemos solo una solución válida: $x = 6\sqrt{2}$ cm.

Comprobamos que es un máximo:

$A' > 0$ $\quad$ $A' < 0$

0 $\nearrow$ $6\sqrt{2}$ $\searrow$

Los lados $x = 6\sqrt{2}$ cm, $y = \sqrt{144 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$ cm nos dan el rectángulo de área máxima, que es $A = 72$ cm^2.

66 **Se quiere construir un barril cilíndrico con una capacidad de 150 *l*. Halla el radio y la altura del cilindro para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.**

Sean r y h el radio y la altura del cilindro, respectivamente.

$\pi r^2 \text{h} = 150 \to \text{h} = \dfrac{150}{\pi r^2}$

La cantidad de chapa es igual a la suma del área lateral más las áreas de las tapas:

$$A = 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 = 2\left(\pi r \frac{150}{\pi r^2} + \pi r^2\right) = 2\left(\frac{150}{r} + \pi r^2\right)$$

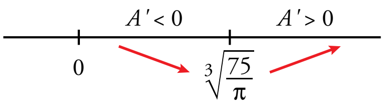
Hallamos el valor que da el área mínima.

$$A' = 2\left(-\frac{150}{r^2} + 2\pi r\right)$$

$$A' = 0 \;\to\; -\frac{150}{r^2} + 2\pi r = 0 \;\to\; 2\pi r = \frac{150}{r^2} \;\to\; r^3 = \frac{150}{2\pi} \;\to\; r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}} \;\to$$

$$\to\; h = \frac{150}{\pi r^2} = \frac{150}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$$

Comprobamos que $r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ es un mínimo:



Por tanto, las medidas son $r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ dm, $h = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ dm.

67 **De todos los ortoedros de base cuadrada y área total igual a 20 cm² halla las dimensiones del que tiene el mayor volumen.**

Supongamos que x es el lado de la base cuadrada y que y es la altura del ortoedro.

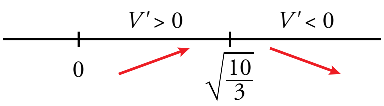
El área total es igual a 20 cm² $\to$ $2x^2 + 4xy = 20 \;\to\; y = \frac{10 - x^2}{2x}$

El volumen del ortoedro es $V = x^2 y = x^2\,\frac{10 - x^2}{2x} = \frac{10x - x^3}{2}$.

Hallamos el valor de x que da el volumen máximo.

$$V' = \frac{10 - 3x^2}{2}$$

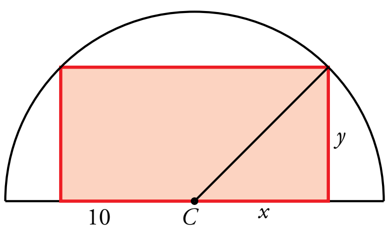
$$V' = 0 \;\to\; \frac{10 - 3x^2}{2} = 0 \;\to\; x = \sqrt{\frac{10}{3}}$$ (el resultado negativo no tiene sentido).



La altura es $y = \frac{10 - \sqrt{10/3}^2}{2\sqrt{10/3}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$ y el volumen máximo, $V = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$ cm³.

68 **En un semicírculo de radio 10 cm se inscribe un rectángulo. Calcula las dimensiones de dicho rectángulo para que su área sea máxima.**

Sean x e y la semibase y la altura del rectángulo, respectivamente.



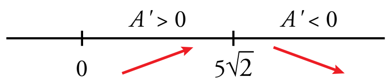
$$x^2 + y^2 = 10^2 \;\to\; y = \sqrt{100 - x^2}$$

El área es $A = 2x\sqrt{100 - x^2}$

Hallamos el valor de x que da el área máxima:

$$A' = 2\left(\sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}\right) = 2\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

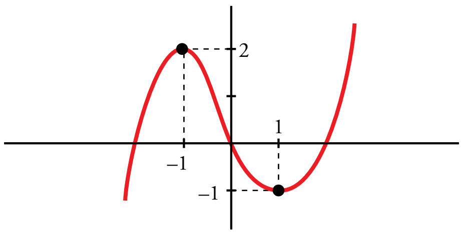
$A' = 0 \rightarrow 2\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0 \rightarrow 100-2x^2 = 0 \rightarrow x = 5\sqrt{2}$ (el resultado negativo no tiene sentido).



Si $x = 5\sqrt{2}$ cm $\rightarrow y = \sqrt{100-(5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$ cm y el área máxima es $A = 50$ cm^2.

Cuestiones teóricas

69 **Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo [–1, 1] y positiva para cualquier otro valor de x.**



70 **Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?**

Existen infinitas.

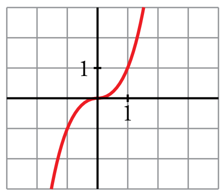
$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

71 **Esta es la gráfica de la función $y = x^3$.**

a) ¿Tiene algún punto singular?

b) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$?

c) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en $x = 0$?

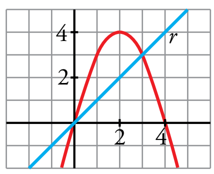


a) El punto (0, 0) tiene tangente horizontal. Este es el único punto singular.

b) La función es creciente en $x = 0$.

c) La recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

72 **¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en el que la tangente sea paralela a la recta r? En caso afirmativo, hállalo.**



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4-2x \\ \text{Pendiente de la recta} = 1 \end{array}\right\} 4-2x = 1 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$

73 **Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es $x = \dfrac{-b}{2a}$.**

$f'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$

74 **Sabiendo que $f'(2) = 0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?**

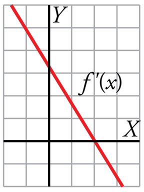
a) La función f tiene máximo o mínimo en $x = 2$.

b) La recta tangente en $x = 2$ es horizontal.

c) La función pasa por el punto $(2, 0)$.

La correcta es la b).

75



Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.

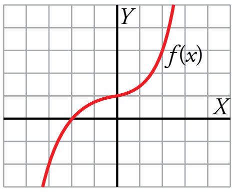
a) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

a) Sí, en $x = 2$, puesto que $f'(2) = 0$.

b) Si $x < 2$ es creciente, pues $f' > 0$; y si $x > 2$ es decreciente, pues $f' > 0$.

76



Observa la gráfica de la función $y = f(x)$.

¿Cuál será la gráfica de una función $y = g(x)$ tal que $g'(x) = f'(x)$ y $g(0) = -1$?

Como $f(0) = 1$, debe ser $g(x) = f(x) - 2$, es decir, sería la misma gráfica que la de $f(x)$ pero desplazada dos unidades hacia abajo. De esta forma:

$g(0) = f(0) - 2 = 1 - 2 = -1$

$g'(x) = D[f(x) - 2] = f'(x)$

77 **Sabemos que $f'(x) = \dfrac{1}{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Halla, si es posible:**

a) $Df[g(2)]$

b) $Df[g(x)]$

c) $Dg[f(2)]$

a) $Df[g(2)] = Df(2^2 + 1) = Df(5) = \dfrac{1}{5-3} = \dfrac{1}{2}$

b) $Df[g(x)] = Df(x^2 + 1) = \dfrac{1}{x^2+1-3} = \dfrac{1}{x^2-2}$

c) No es posible porque no se puede determinar $f(2)$.

78 **Sabemos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ y $h(x) = e^{f(x)}$. ¿Cuál de estos tres valores corresponde a $h'(0)$?:**

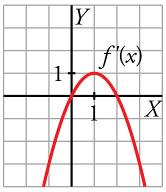
a) $\dfrac{1}{e}$ **b) 0** **c) 1**

$h'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

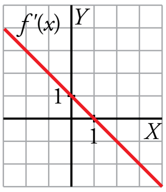
Por tanto, $h'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$, que se corresponde con b).

79 **¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una curva que tiene un máximo en $x = 1$? ¿Por qué?:**

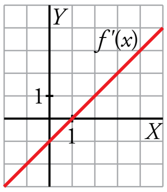
a)



b)

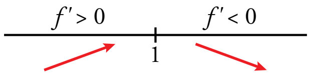


c)



La gráfica del apartado b), porque $f'(1) = 0$.

Además,



En consecuencia, $x = 1$ es un máximo.

80 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en $x = a$.

b) Si $f'(a) = 0$, entonces f no crece ni decrece en $x = a$.

c) Si f es decreciente en $x = a$, entonces $f'(a) < 0$.

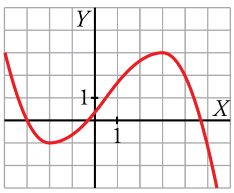
a) Verdadero.

b) Falso. Hay funciones con puntos singulares donde la función es creciente. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en el punto singular (0, 0).

c) Falso. La función $f(x) = -x^3$ siempre es decreciente y $f'(0) = 0$.

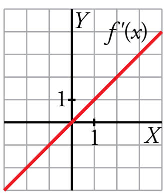
Página 331

81 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**

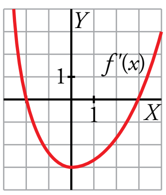


¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de $f'(x)$? Justifícalo:

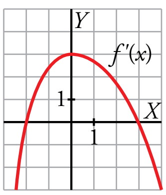
a)



b)



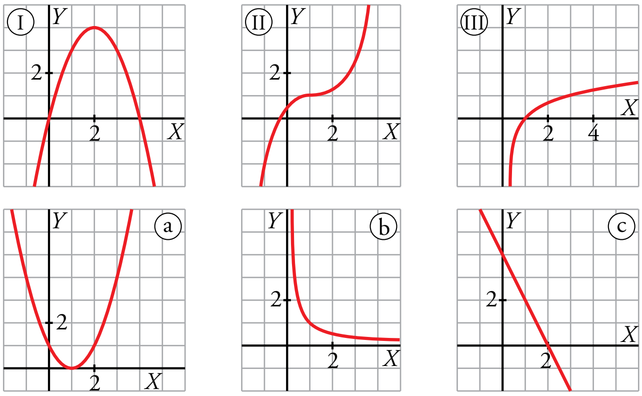
c)



La gráfica del apartado c), porque $f'(-2) = f'(3) = 0$ al ser $x = -2$ y $x = 3$ puntos singulares de $f(x)$.

Como $f(x)$ crece en el intervalo $(-2, 3)$, $f'(x) > 0$ y esto solo curre en el apartado c). El resto de la gráfica de c) es coherente con la de $f(x)$.

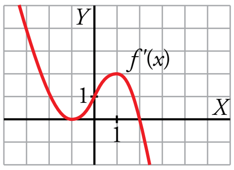
82 **Asocia a cada una de las gráficas I, II, III la gráfica de su función derivada.**

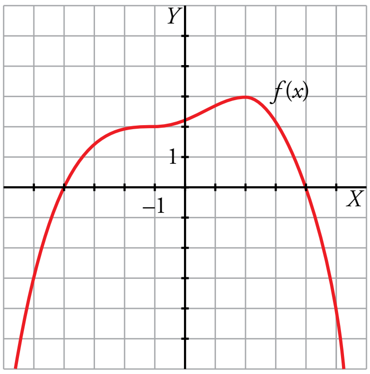


I → c II → a III → b

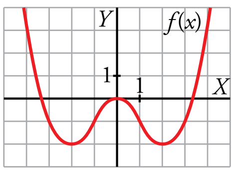
Para profundizar

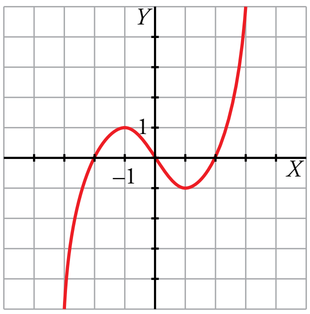
83 **Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$ y que tiene por gráfica de su función derivada $f'(x)$ la siguiente:**





84 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y representa de forma aproximada la función $y = f'(x)$.**





85 **Halla las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ y estudia la posición de la curva con respecto a ellas. Calcula los puntos singulares y representa la función.**

Asíntotas oblicuas:

Como la función no es un cociente de polinomios, hallamos las asíntotas oblicuas usando límites.

Recordemos que si la asíntota es $y = ax + b$, entonces:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = 0$$

Cuando $x \to +\infty$, la asíntota oblicua es $y = x$.

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \text{ (porque } x \text{ es negativa)}$$

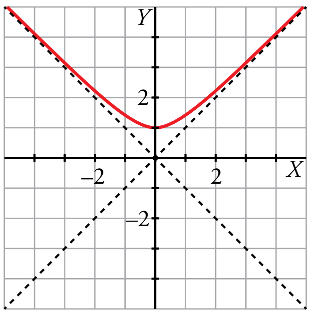
$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - (-x)\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = 0$$

Cuando $x \to -\infty$, la asíntota oblicua es $y = -x$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Esta derivada solo se anula si $x = 0$. Como $f(0) = 1$, el único punto singular es (0, 1).



86 **Prueba que la función $f(x) = \sqrt{x}$ no tiene derivada en $x = 0$.**

El dominio de definición de $f(x)$ es el intervalo (0, +∞), por tanto, para poder usar la definición de derivada, solo podemos calcular el límite por la derecha.

La derivada en $x = 0$ debería ser el límite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}h}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Como el límite anterior no existe, la función $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $x = 0$.

87 **Dada la función:** $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ ln\,(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$**, determina los valores de** a, b **y** c **para que la función sea continua, tenga un máximo en** $x = -1$ **y la tangente en** $x = -2$ **sea paralela a la recta** $y = 2x$**.**

Llamamos $f_1(x) = ax^2 + bx + c$ y $f_2(x) = ln\,(x + 1)$. Ambas funciones son continuas y derivables donde están definidas.

Para que sea continua en $x = 0$, debe ocurrir que $f_1(0) = f_2(0)$.

$$\left.\begin{aligned} f_1(0) &= c \\ f_2(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \to c = 0$$

Para que tenga un máximo en $x = -1$, debe ocurrir que $f'(-1) = 0$, es decir, $f'_1(-1) = 0$.

$f'_1(x) = 2ax + b$

$2a(-1) + b = 0 \to -2a + b = 0$

Para que la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$, debe ser $f'(-2) = 2$, es decir, $f'_1(-2) = 2$.

Por tanto, $2a(-2) + b = 2 \to -4a + b = 2$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -2a + b &= 0 \\ -4a + b &= 2 \end{aligned}\right\} \to a = -1,\ b = -2$$

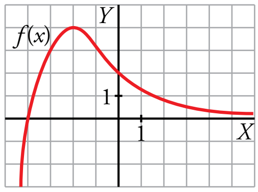
La función es $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \le 0 \\ ln\,(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ahora podemos comprobar que el punto $(-1, 1)$ es un máximo de $f(x)$ estudiando $f'_1(x) = -2x - 2$ en el intervalo de definición de $f_1(x)$.

Autoevaluación

Página 331

1 Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde.



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

a) $\text{T.V.M. } [0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a –1. Por tanto, $f'(0) = -1$.

2 Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$$

$$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3 Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $y = ln\left(\dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}\right)$ **c)** $y = cos^2\, \pi x$ **d)** $y = \left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^3$

a) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - 4x^{-3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^3}$$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + ln\, e^{-x} = ln\, x - ln\, 3 - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

c) $f'(x) = 2\pi\, cos\, \pi x(-sen\, \pi x) = -2\pi\, cos\, \pi x \cdot sen\, \pi x$

d) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^2 D\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right) = 3\dfrac{x^4}{(x-2)^2} \cdot \dfrac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{3x^4(x^2 - 4x)}{(x-2)^4}$

4 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = ln\, x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Punto de tangencia: $x = 1,\ y = ln\, 1^2 = 0 \ \to\ P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \ \to\ f'(1) = 2$

Ecuación: $y = 0 + 2(x - 1) \ \to\ y = 2x - 2$

5 **Halla los puntos singulares de la función $y = 2 + (1 - x)^3$. ¿Tiene máximo o mínimo relativo esa función?**

$f(x) = 2 + (1 - x)^3 \ \to\ f'(x) = 3(1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2$

$f'(x) = 0 \ \to\ -3(1 - x)^2 = 0 \ \to\ 1 - x = 0 \ \to\ x = 1$

$f(1) = 2 + (1 - 1)^3 = 2$

Punto singular: (1, 2).

Como $f'(x) = -3(1 - x)^2$ es menor que 0 para cualquier valor de $x \neq 1$, f es decreciente en todo su dominio y, por tanto, el punto singular no es máximo ni mínimo.

6 **Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$**

a) Estudia las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

b) Halla los máximos y los mínimos.

c) Represéntala.

a) • Asíntotas verticales. Recta $x = 2$ porque este valor anula el denominador pero no el numerador.

IZQUIERDA: $\dfrac{1{,}99^2 - 2 \cdot 1{,}99 + 4}{2 - 1{,}99} = 398 \ \to\ f(x) \to +\infty$

DERECHA: $\dfrac{2{,}01^2 - 2 \cdot 2{,}01 + 4}{2 - 2{,}01} = -402 \ \to\ f(x) \to -\infty$

• Ramas infinitas. Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$\dfrac{x^2 - 2x + 4}{-x + 2} = -x - \dfrac{4}{x - 2} \ \to$ La recta $y = -x$ es la asíntota oblicua.

$f(x) - (-x) = -\dfrac{4}{x - 2}$

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-x) > 0 \ \to$ La función está encima de la asíntota.

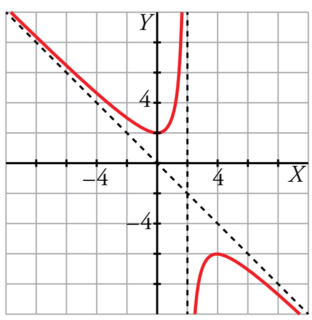
Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-x) < 0 \ \to$ La función está debajo de la asíntota.

b) $f'(x) = \dfrac{(2x - 2)(2 - x) - (x^2 - 2x + 4) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2}$

$f'(x) = 2 \ \to\ \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2} = 0 \ \to\ -x^2 + 4x = 0 \ \to\ x = 0,\ x = 4$

$f(0) = 0,\ f(4) = -6 \ \to$ Los puntos (0, 2) y (4, –6) son puntos singulares, donde el primero es un mínimo y el segundo es un máximo.

c)



7 **Representa la función $f(x) = x^3 - 12x + 16$.**

$y = x^3 - 12x + 16$ es una función polinómica, por ello es continua en $\mathbb{R}$.

- Ramas infinitas:

$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 12$

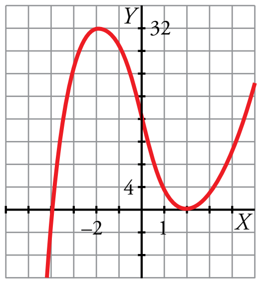
$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right.$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 3 + 16 = 0 \to (2, 0)$

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \to (-2, 32)$

Los puntos singulares son $(2, 0)$ y $(-2, 32)$.

Esta es su gráfica:



8 **Estudia y representa $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.**

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$. Posición $\left\langle \begin{array}{l} x \to 0^-,\ f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+,\ f(x) \to -\infty \end{array} \right.$

Asíntota horizontal:

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1$; $y = 1$. Posición $\left\langle \begin{array}{l} x \to +\infty,\ f(x) < 1 \\ x \to -\infty,\ f(x) < 1 \end{array} \right.$

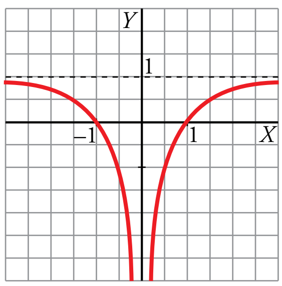
Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x\,x^2 - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2)^2} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{2}{x^3} = 0$. No tiene solución.

No tiene puntos singulares.

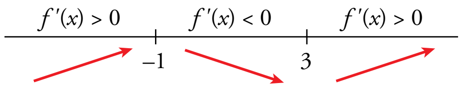
Esta es su gráfica:



9 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.**

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Buscamos los valores de x para los que $f'(x) > 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$



Intervalos de crecimiento de f: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Intervalos de decrecimiento de f: $(-1, 3)$

La función tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.

10 **Calcula el valor de b y c para que la función $y = x^3 + bx^2 + c$ tenga un punto singular en $P(2, -3)$.**

Si $P(2, -3)$ es un punto singular, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -3 \\ f'(2) = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 + b \cdot 2^2 + c = -3 \\ 3 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4b + c = -11 \\ 4b = -12 \end{array}\right\} \rightarrow b = -3, \ c = 1$$

11 **Halla dos números cuya suma sea 34 y tales que su producto sea máximo.**

Supongamos que los números son x e y:

$x + y = 34 \rightarrow y = 34 - x$

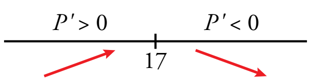
Buscamos el producto máximo:

$P = xy = x(34 - x) = 34x - x^2$

$P' = 34 - 2x$

$P' = 0 \rightarrow 34 - 2x = 0 \rightarrow x = 17 \rightarrow y = 17$

Comprobamos que el valor obtenido es un máximo del producto



Por tanto, los números son $x = 17$, $y = 17$ y el producto máximo es 289.