Resuelve

Página 247

Familias de funciones

Ya conoces muchas familias de funciones: sus nombres, cómo son sus expresiones analíticas y qué forma tienen sus gráficas.

Asocia cada nombre de familia con su representación gráfica y con su expresión analítica general.

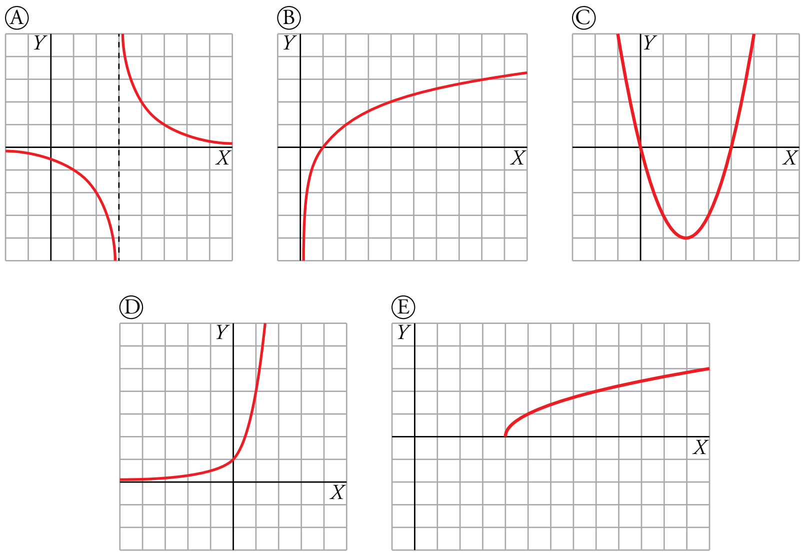
1. F. cuadrática

2. F. raíz

3. F. de proporcionalidad inversa

4. F. exponencial

5. F. logarítmica



I. $y = \sqrt{x-4}$ **II.** $y = 4^x$ **III.** $y = x^2 - 4x$ **IV.** $y = \log_2 x$ **V.** $y = \dfrac{2}{x-3}$

$1 \to C \to III$

$2 \to E \to I$

$3 \to A \to V$

$4 \to D \to II$

$5 \to B \to IV$

1 Las funciones y su estudio

Página 249

1 ¿Verdadero o falso?

a) El dominio de definición de una función nunca puede ser $\mathbb{R}$.

b) El dominio de definición de $y = -\sqrt{x}$ es $[0, +\infty)$.

c) El dominio de definición de $y = \sqrt{-x}$ es $(-\infty, 0]$.

a) Falso. Por ejemplo, el dominio de la función cuadrática $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ es $\mathbb{R}$.

b) Verdadero. Siempre que $x \geq 0$ la función está definida.

c) Verdadero. Cuando $x \leq 0$, se tiene que $-x \geq 0$ y la función está definida correctamente.

2 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ **b)** $y = \sqrt{x - 1}$ **c)** $y = \sqrt{1 - x}$ **d)** $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ **f)** $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$ **g)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$ **h)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

i) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4 - x^2}}$ **j)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ **k)** $y = x^3 - 2x + 3$ **l)** $y = \dfrac{1}{x}$

m) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **n)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **ñ)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ **o)** $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

p) El área de un círculo de radio variable, r, es $A = \pi r^2$.

a) Para que esté definida debe ocurrir que $x^2 - 1 \geq 0$. Ahora resolvemos la inecuación y se tiene que $Dom = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

b) $[1, +\infty)$

c) $(-\infty, 1]$

d) $[-2, 2]$

e) La raíz cúbica está definida independientemente del signo del radicando. Como este es un polinomio de 2.º grado, también está siempre definido. Por tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

f) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

g) Por un lado, $x \geq 1$ para que se pueda definir la raíz. Pero, además, $x \neq 1$ para que no se produzca una división entre 0. Por tanto, $Dom = (1, +\infty)$.

h) Razonando de forma análoga al apartado anterior, $x \leq 1$ y $x \neq 1$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 1)$.

i) En esta ocasión la raíz cúbica siempre está definida, pero para que lo esté el cociente, el denominador no puede ser 0.

$x^2 - 4 = 0 \ \rightarrow\ x_1 = -2,\ x_2 = 2$ y el dominio de definición es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

j) Por una parte, $x^2 - 4 \geq 0$, que ocurre siempre que x esté en $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Pero x no puede ser ni 2 ni –2 para no dividir entre 0. Luego el dominio es $Dom = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

k) Su dominio es $\mathbb{R}$, ya que siempre está definida.

l) $\mathbb{R} - \{0\}$

m) $\mathbb{R} - \{0\}$

n) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

ñ) Como la ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución, el dominio de definición es $Dom = \mathbb{R}$.

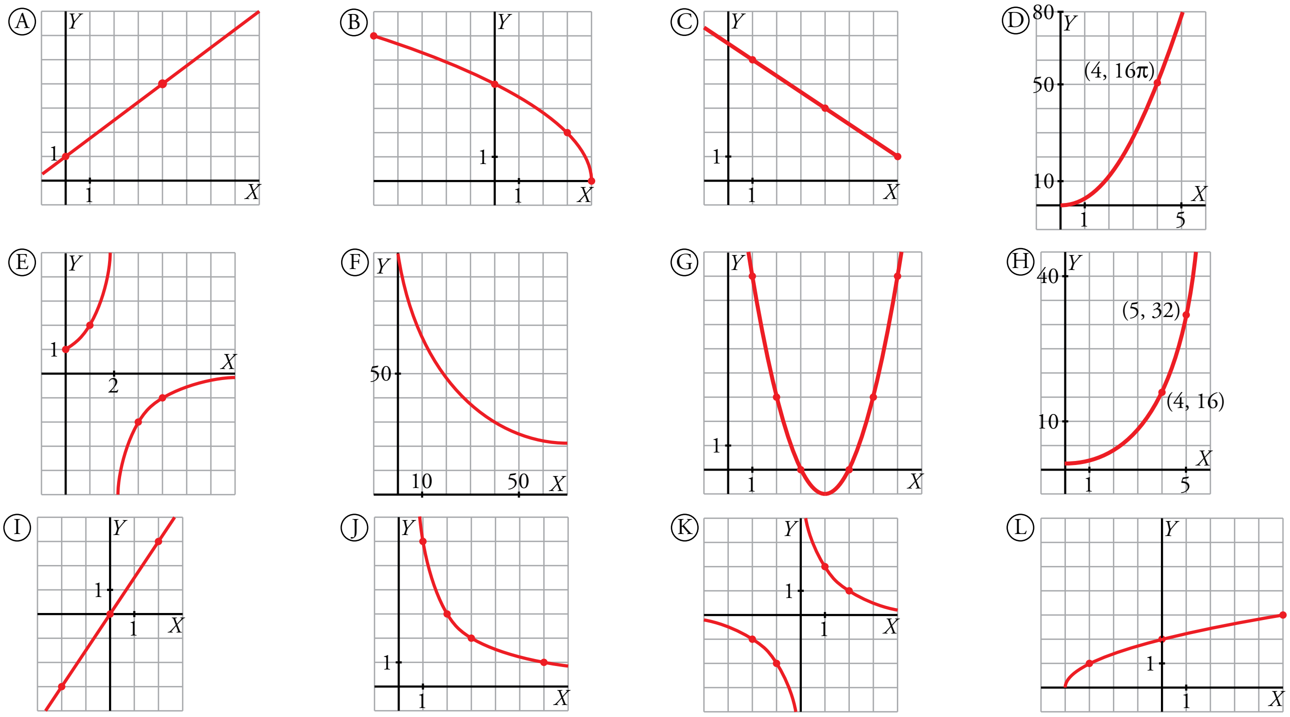
o) La ecuación $x^3 + 1 = 0$ tiene una única solución, $x = -1$. Luego el domino es $Dom = \mathbb{R} - \{-1\}$.

p) Por el contexto de la función, estará definida en $(0, +\infty)$ ya que el radio es siempre un número positivo.

2 Familias de funciones elementales

Página 253

1 Asocia a cada una de las siguientes gráficas una ecuación.



LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORCIONALIDAD INVERSA	RADICALES	EXPONENCIALES
L_1 $y = \frac{3}{2}x$	C_1 $y = x^2 - 8x + 15$	PI_1 $y = \frac{1}{x}$	R_1 $y = \sqrt{2x+4}$	E_1 $y = 2^x$
L_2 $y = -\frac{2}{3}(x-1)+5$	C_2 $y = (x+3)(x+5)$	PI_2 $y = \frac{2}{2-x}$	R_2 $y = \sqrt{x+4}$	E_2 $y = 0{,}5^x$
L_3 $3x + 2y = 0$	C_3 $y = x^2,\ x > 0$	PI_3 $y = \frac{2}{x}$	R_3 $y = 2\sqrt{4-x}$	E_3 $y = 20 + 80 \cdot 0{,}95^x$
L_4 $y = \frac{3}{4}x + 1$	C_4 $y = \pi x^2,\ x > 0$	PI_4 $y = \frac{6}{x},\ x > 0$	R_4 $y = -\sqrt{4+x}$	E_4 $y = 3^x$

$A \to L_4$ $\quad B \to R_3$ $\quad C \to L_2$ $\quad D \to C_4$

$E \to PI_2$ $\quad F \to E_3$ $\quad G \to C_1$ $\quad H \to E_1$

$I \to L_1$ $\quad J \to PI_4$ $\quad K \to PI_3$ $\quad L \to R_2$

2 Cada uno de los siguientes enunciados se corresponde con una gráfica de entre las del ejercicio anterior. Identifícala.

1. Superficie, en centímetros cuadrados, de un círculo. Radio, en centímetros.

2. Aumento de una lupa. Distancia al objeto, en centímetros.

3. Temperatura de un cazo de agua que se deja enfriar desde 100 °C. Tiempo, en minutos.

4. Número de amebas que se duplican cada hora. Se empieza con una.

5. Longitud de un muelle, en decímetros. Mide 1 dm y se alarga 75 mm por cada kilo que se le cuelga.

6. Dimensiones (largo y ancho, en centímetros) de rectángulos cuya superficie es de 6 cm².

1\. D $\quad$ 2. E $\quad$ 3. F $\quad$ 4. H $\quad$ 5. A $\quad$ 6. J

3 ¿Verdadero o falso?

a) En una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, cuanto mayor es a, más ancha es la parábola que la representa.

b) Las gráficas de $y = 5x^2 + bx + c$ son idénticas, aunque pueden estar situadas en posiciones distintas.

c) Todas las parábolas de ecuación $y = ax^2 + c$ tienen su vértice en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Falso. Por ejemplo, la función cuadrática $y = 4x^2$ es más estrecha que la función $y = x^2$.

b) Verdadero. Como la anchura de la parábola está determinada por el término de x^2, los otros solo influyen en la posición de la parábola respecto de los ejes de coordenadas.

c) Verdadero. Como no tiene término en x, la abscisa del vértice es $\frac{0}{2a} = 0$.

4 ¿Verdadero o falso?

a) Las funciones $y = -\sqrt{kx}$ se representan mediante medias parábolas con el eje paralelo al eje Y.

b) El dominio de definición de $y = -a\sqrt{x+b}$ es $[-b, +\infty)$.

c) Los ejes X e Y son asíntotas de las funciones $y = \frac{k}{x}$.

d) El dominio de definición de $y = \frac{k}{a+x}$ es $\mathbb{R} - \{k\}$.

a) Falso. El eje de estas medias parábolas es el eje X.

b) Verdadero. La función está definida si $x + b \geq 0$, es decir, si $x \geq -b$. Por tanto, el dominio de definición es el intervalo dado.

c) Verdadero.

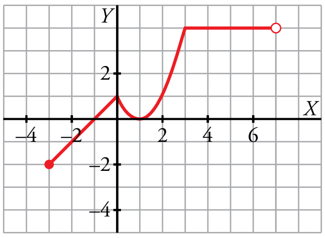
d) Falso. La función no está definida si $a + x = 0 \rightarrow x = -a$. El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-a\}$.

3 Funciones definidas "a trozos"

Página 254

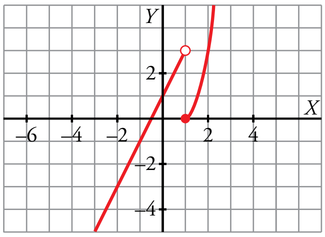
1 **Representa esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in [0, 3] \\ 4 & x \in (3, 7) \end{cases}$$

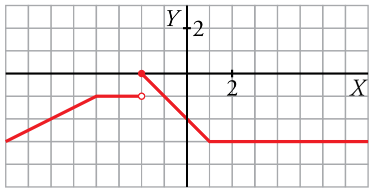


2 **Haz la representación gráfica de la siguiente función:**

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



3 **Escribe la expresión analítica que corresponde a la siguiente gráfica:**



Primer tramo:

- Recta que pasa por los puntos $(-6, -2)$ y $(-4, -1)$.
- La pendiente es $\dfrac{-1-(-2)}{-4-(-6)} = \dfrac{1}{2}$ y la ecuación es $y - (-1) = \dfrac{1}{2}(x - (-4))$.

Segundo tramo:

- $y = -1$

Tercer tramo:

- Pertenece a una recta que pasa por $(0, -2)$ y $(1, -3)$.
- La pendiente es $\dfrac{-3-(-2)}{1-0} = -1$ y la ecuación es $y - (-2) = -x$.

Cuarto tramo: $y = -3$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & \text{si } x < -4 \\ -1 & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ -x - 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Página 255

Practica

***Ent*(7,5) = 7**

***Ent*(–4) = –4**

***Ent*(–5,3) = –6 ¡atención!**

Continúa:

***Ent*(6,48)**	***Ent*(7)**	***Ent*(–3,9)**	***Ent*(–11,3)**	***Ent*(–8)**
Ent(6,48) = 6	*Ent*(7) = 7	*Ent*(–3, 9) = –4	*Ent*(–11, 3) = –12	*Ent* (–8) = –8

Practica

***Mant*(7,68) = 0,68**

***Mant*(–8) = 0**

***Mant*(–7,68) = 0,32**

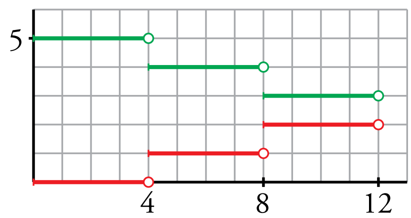
Continúa:

***Mant*(3,791)**	***Mant*(–6,94)**	***Mant*(2)**	***Mant*(–4,804)**
Mant(3,791) = 0,791	*Mant*(–6,94) = 0,06	*Mant*(2) = 0	*Mant*(–4,804) = 0,196

4 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a la función $y = Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica verde corresponde a la función $y = 5 + Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero.

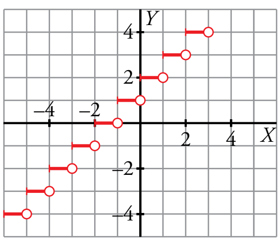
b) Falso. La gráfica verdes es $y = 5 - Ent\left(\frac{x}{4}\right)$

5 **Representa:**

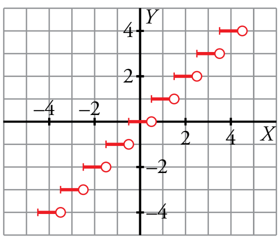
a) $y = Ent(x) + 2$

b) $y = Ent(x + 0,5)$

a) $y = Ent\,(x) + 2$



b) $y = Ent\,(x + 0,5)$

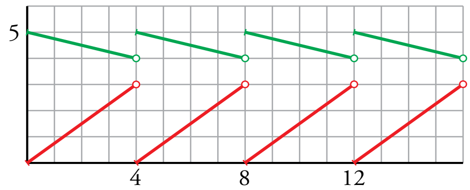


6 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant(4x)$.

c) La gráfica verde corresponde a $y = 5 - Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero

b) Falso

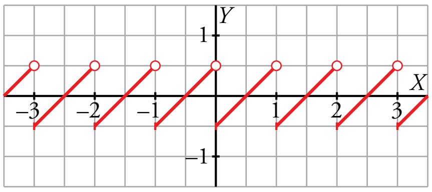
c) Verdadero

7 **Representa:**

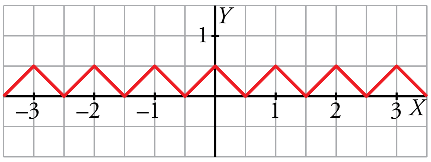
a) $y = Mant(x) - 0{,}5$

b) $y = |Mant(x) - 0{,}5|$

a) $y = Mant\ (x) - 0{,}5$



b) $y = |Mant\ (x) - 0{,}5|$



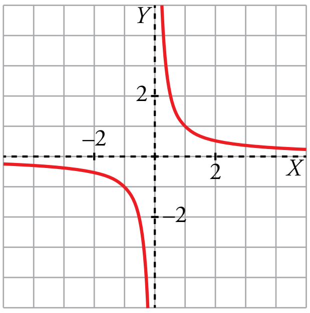
4 Transformaciones elementales de funciones

Página 256

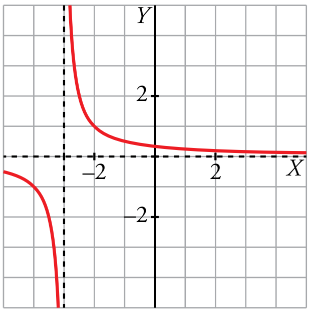
1 Representa sucesivamente:

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x+3}$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x+3}$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x+3} + 8$

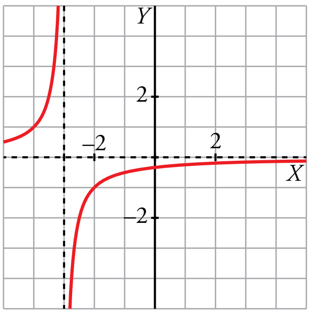
a)



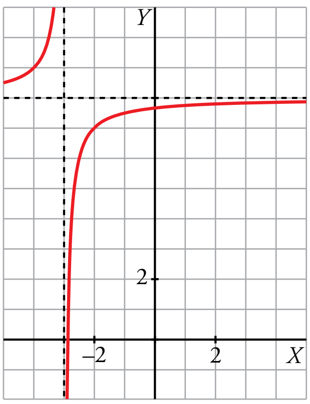
b) Se obtiene desplazando la gráfica anterior tres unidades a la izquierda.



c) Es la simétrica de la anterior respecto del eje *X*.



d) Es igual a la anterior trasladándola 8 unidades hacia arriba.



Página 257

2 **Si $y = f(x)$ pasa por (3, 8), di un punto de:**

$$y = f(x) - 6,\ y = f(x+4),\ y = \frac{1}{2}f(x),\ y = 2f(x),\ y = -f(x),\ y = f(-x),\ y = -2f(-x) + 3$$

$y = f(x) - 6 \rightarrow (3, 2)$ $\quad$ $y = f(x+4) \rightarrow (-1, 8)$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}f(x) \rightarrow (3, 4)$

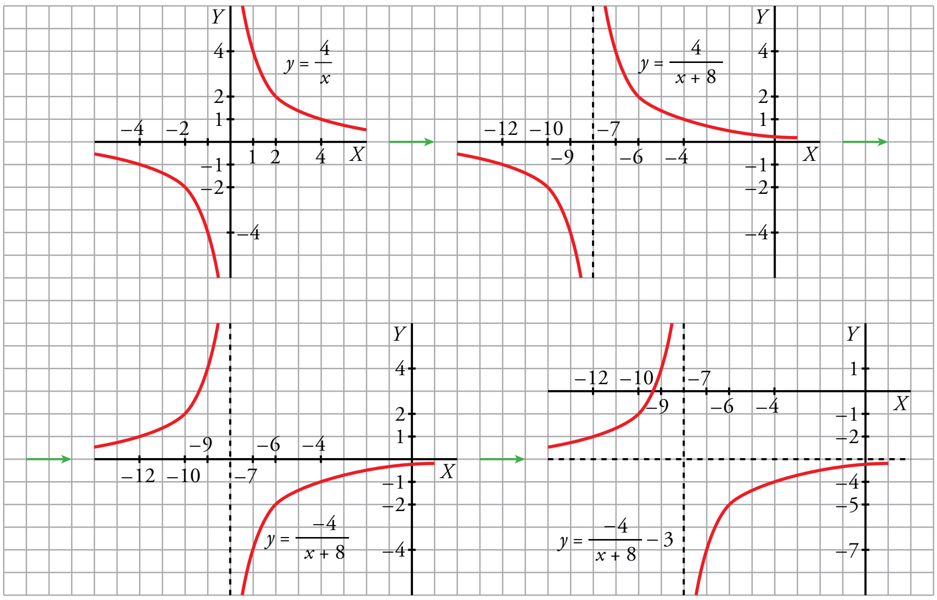
$y = 2f(x) \rightarrow (3, 16)$ $\quad$ $y = -f(x) \rightarrow (3, -8)$ $\quad$ $y = f(-x) \rightarrow (-3, 8)$

$y = -2f(-x) + 3 \rightarrow (-3, -13)$

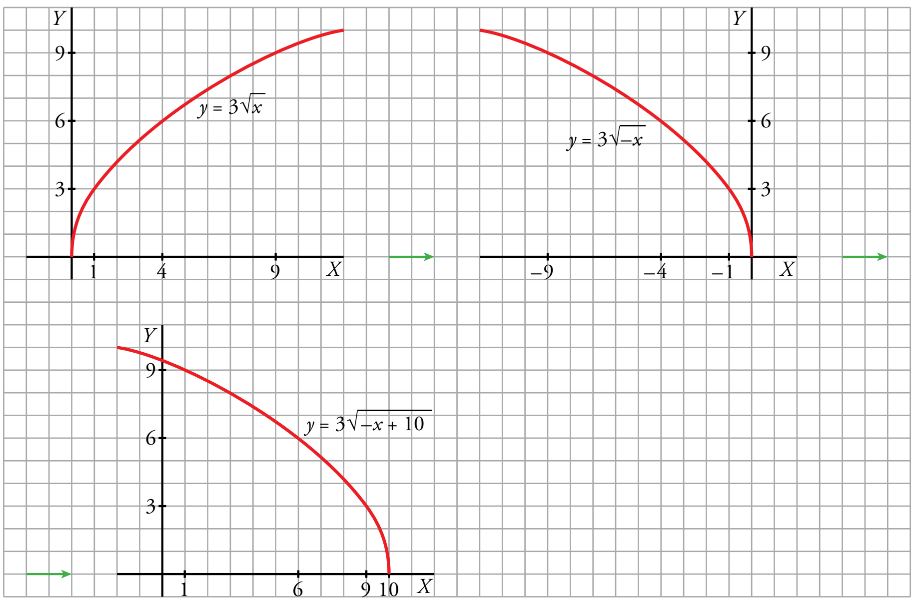
3 **Representa:**

a) $y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$ $\qquad$ **b)** $y = 3\sqrt{-x+10}$

a) Representamos $y = \dfrac{4}{x} \rightarrow y = \dfrac{4}{x+8} \rightarrow y = -\dfrac{4}{x+8} \rightarrow y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$



b) Representamos $y = 3\sqrt{x} \rightarrow y = 3\sqrt{-x} \rightarrow y = 3\sqrt{-(x-10)}$



5 Composición de funciones

Página 258

1 **Si $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, obtén las expresiones de $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.**

Halla $f[g(4)]$ y $g[f(4)]$.

$f[g(x)] = f[x^2] = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = g[x^2 - 5x + 3] = (x^2 - 5x + 3)^2$

$f[g(4)] = 179; \; g[f(4)] = 1$

2 **Si $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$, obtén las expresiones de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.**

Halla el valor de estas funciones en $x = 0$ y $x = \pi/4$.

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(sen\ x) = sen\ x + \frac{\pi}{2}$

$f \circ f(x) = f[f(x)] = f(sen\ x) = sen\ (sen\ x)$

$g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = x + \pi$

$f \circ g(0) = sen\ \frac{\pi}{2} = 1$

$g \circ f(0) = sen\ 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$f \circ f(0) = sen\ (sen\ 0) = 0$

$g \circ g(0) = 0 + \pi = \pi$

$f \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$g \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2} + \pi}{2}$

$f \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(sen\ \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}65$

$g \circ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

6 Función inversa o recíproca de otra

Página 259

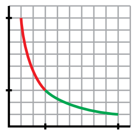
1 ¿Verdadero o falso?

a) La función recíproca de $y = x$ es $y = \dfrac{1}{x}$.

b) Cada una de las funciones $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$ es recíproca de sí misma.

c) La inversa de $y = \dfrac{9}{x}$, $x \in [3, 9]$ es $y = \dfrac{9}{x}$, $x \in [1, 3]$.

d) Si una función es creciente, su recíproca es decreciente.



a) Falso. Las gráficas de esas funciones no son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, puesto que una es recta y la otra es curva.

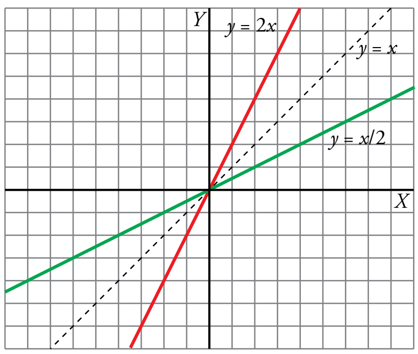
b) Verdadero. Si $f(x) = x$ y calculamos $f \circ f(x) = f[f(x)] = f(x) = x$, vemos que f es recíproca de sí misma.

Análogamente, si $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y calculamos $g \circ g(x) = g[g(x)] = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1/x} = x$, vemos que g es recíproca de sí misma.

c) Verdadero. Podemos comprobarlo en el gráfico. La gráfica verde es simétrica, respecto de la bisectriz del primer cuadrante, de la gráfica roja.

d) Falso. Por ejemplo, la recíproca de la función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, es la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, y ambas son crecientes.

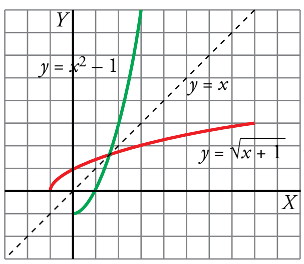
2 Representa $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{2}$ y comprueba que son inversas.



3 Comprueba que hay que descomponer $y = x^2 - 1$ en dos ramas para hallar sus inversas. Averigua cuáles son.

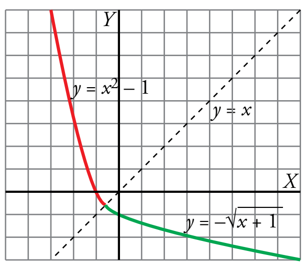
a) $y = x^2 - 1$ si $x \geq 0$

$y^{-1} = \sqrt{x+1}$



b) $y = x^2 - 1$ si $x < 0$

$y^{-1} = -\sqrt{x+1}$



4 **Comprueba que la función recíproca de $y = 2x + 4$ es $y = \frac{1}{2}x - 2$.**

Llamemos $f(x) = 2x + 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 2\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 4 = x$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x + 4) = \frac{1}{2}(2x + 4) - 2 = x$$

Luego $g = f^{-1}$.

Página 260

5 **¿Verdadero o falso?**

La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2 x$, $x > 1$.

Falso. La función recíproca de $y = 2^x$, $x > 0$ es $y = log_2 x$, $x > 0$.

6 **Halla la función recíproca de:**

$$y = log_2 x, \quad x \in [8, 32]$$

La función recíproca es $y = 2^x$, $x \in [3, 5]$.

7 Funciones arco

Página 262

1 ¿Verdadero o falso?

a) La función $y = arc\ tg\ x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ es la recíproca de la función $y = tg\ x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) En las calculadoras científicas (tienen que estar puestas en modo RAD), las funciones *sin*$^{-1}$, *cos*$^{-1}$, *tan*$^{-1}$ responden exactamente (coinciden) con las funciones *arc sen*, *arc cos* y *arc tg*.

a) Verdadero. Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

b) Verdadero. Los valores que da la calculadora están en los intervalos correspondientes de cada una de las funciones.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 263

1. Ecuación y representación de una parábola

Hazlo tú. **Escribe la ecuación de la parábola que tiene el vértice en (2, –4) y pasa por el punto (3, –3).**

Si la parábola es $y = ax^2 + bx + c$ tenemos que:

$$\frac{-b}{2a} = 2 \to b = -4a$$

Por otro lado:

$$-4 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \to -4 = 4a + 2b + c$$

$$-3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \to -3 = 9a + 3b + c$$

Resolvemos el sistema:

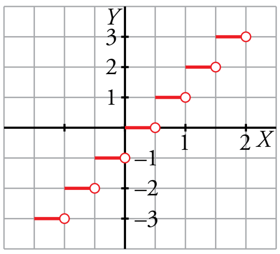
$$\begin{cases} b = -4a \\ -4 = 4a + 2b + c \\ -3 = 9a + 3b + c \end{cases} \to a = 1,\ b = -4,\ c = 0 \to y = x^2 - 4x$$

Página 264

3. Función "parte entera"

Hazlo tú. **Representa la función $f(x) = Ent\,(2x)$.**

Esta gráfica es como la de la función parte entera, pero contraída a la mitad en el sentido del eje horizontal.



4. Valor absoluto de una función

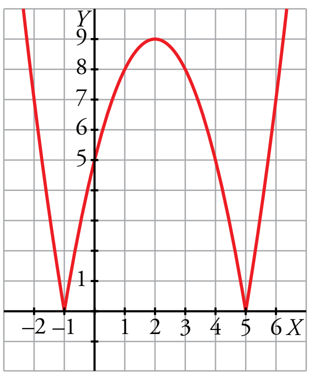
Hazlo tú. **Define por intervalos y representa:**

a) $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

b) $f(x) = x - |x|$

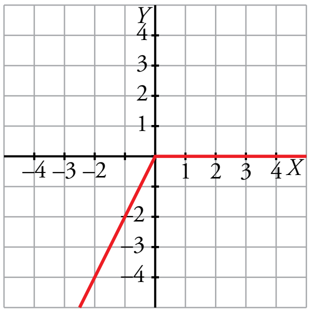
a) La parábola $y = x^2 - 4x - 5$ tiene su vértice en el punto (2, –9). Es negativa entre –1 y 5. Luego en ese intervalo su gráfica es $-f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \le -1 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si } -1 < x \le 5 \\ x^2 - 4x - 5 & \text{si } 5 < x \end{cases}$$



b) Por la definición de la función valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x-(-x) & \text{si } x<0 \\ x-x & \text{si } 0 \le x \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$



Página 265

5. Composición y función inversa

Hazlo tú. Halla $g \circ f$ y $f \circ g$, siendo $f(x) = 3x^2 - 5$ y $g(x) = \sqrt{2^{x-1}}$.

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(3x^2 - 5) = \sqrt{2^{3x^2-5-1}} = \sqrt{2^{3x^2-6}}$$

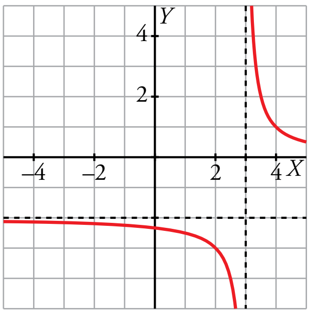
$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{2^{x-1}}) = 3\sqrt{2^{x-1}}^2 - 5 = 3 \cdot 2^{x-1} - 5$$

6. Representación de hipérbolas

Hazlo tú. Representa la función $y = \dfrac{-2x+7}{x-3}$.

$y = \dfrac{-2x+7}{x-3} = -2 + \dfrac{1}{x-3}$ (efectuando la división entre el numerador y el denominador).

Por tanto, la gráfica es como la de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazándola 2 unidades hacia abajo y 3 unidades a la derecha.



Ejercicios y problemas guiados

Página 266

1. Interpolación lineal

El porcentaje de hogares españoles que tenían teléfono móvil era, en 2006, del 80,5 y en 2009, del 88,2. Estimar el porcentaje que había en 2008.

La pendiente de la recta es $\dfrac{88,2-80,5}{2\,009-2\,006}=2,57$. Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2\,006;\ 80,5)$ y $B(2\,009;\ 88,2)$ es:

$$y-80,5=2,57(x-2\,006)\ \rightarrow\ y=2,57(x-2\,006)+80,5\ \rightarrow\ y=2,57x-5\,074,9$$

Si $x=2\,08\ \rightarrow\ y=2,57\cdot 2\,008-5\,074,9=85,6$

2. Una función cuadrática

Los costes de producción de un cierto producto (en euros) de una empresa, vienen dados por:

$$C=40\,000+20q+q^2$$

siendo q el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520 euros.

a) Expresar en función de q el beneficio de la empresa y representarlo gráficamente.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

a) $B(q)=520q-(40\,000+20q+q^2)=-q^2+500q-40\,000$

b) El beneficio es máximo en el vértice de la parábola anterior, ya que tiene las ramas hacia abajo.

La abscisa del vértice es $\dfrac{-500}{-2}=250$ y el beneficio será:

$B(250)=-250^2+500\cdot 250-40\,000=22\,500$ €

3. Una función polinómica

Considerar todos los conos cuya generatriz mide 15 cm.

a) Escribir la función que nos da el volumen del cono según lo que mide su altura, x.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

a) Usando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$R=\sqrt{15^2-x^2}=\sqrt{225-x^2}$

Luego $V(x)=\dfrac{1}{3}\pi x\left(\sqrt{225-x^2}\right)^2=\dfrac{\pi(225x-x^3)}{3}$

b) La altura es un número positivo que no puede ser mayor que la generatriz. Por tanto, el dominio de definición de $V(x)$ es $Dom=(0,\ 15)$.

4. Función logística

La función $f(x)=\dfrac{12\,000}{1+499(1{,}09^{-x})}$ da las ventas totales de un videojuego x días después de su lanzamiento. ¿En qué día se llegó a 6 000 juegos vendidos?

Tenemos que hallar el valor de x tal que:

$$\frac{12\,000}{1+499(1,09^{-x})}=6000\ \rightarrow\ \frac{12\,000}{6\,000}=1+499(1,09^{-x})\ \rightarrow\ 2-1=499(1,09^{-x})\ \rightarrow\ \frac{1}{499}=1,09^{-x}$$

Tomando logaritmos y despejando:

$$\frac{\log 499}{\log 1,09}=x\ \rightarrow\ x=72\text{ días}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 267

Para practicar

Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \dfrac{2}{(x+5)^2}$

b) $y = \dfrac{3x+2}{x^3+x}$

c) $y = \dfrac{x}{x^2-x+2}$

d) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

a) La función no está definida cuando $x = -5$. Su dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-5\}$.

b) $x^3 + x = 0$, tiene como única solución $x = 0$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) La función no está definida cuando $x^2 - x + 2 = 0$, que no tiene solución. Por tanto, el dominio es $Dom = \mathbb{R}$.

d) Las fracciones no se pueden evaluar ni en $x = 0$ ni en $x = -2$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

2 Estudia el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{2x+5}$

b) $y = \sqrt{7-x}$

c) $y = \sqrt{x^2+3x+4}$

d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

a) Para que esté definida debe ser $2x + 5 \ge 0$, cuya solución es $\left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$. Su dominio es este intervalo, $Dom = \left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) En este caso $x \le 7$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 7]$.

c) $x^2 + 3x + 4 \ge 0 \to Dom = \mathbb{R}$

d) Para que ambas raíces existan simultáneamente debe cumplirse a la vez que $x \ge 1$ y $x \ge 2$. El dominio es $Dom = [2, +\infty)$.

3 Di cuál es el dominio de definición de:

a) $y = 3 + 2^{1-x}$ **b)** $y = \log_2 (x+3)$ **c)** $y = \ln (2-x)$ **d)** $y = \sqrt{2^x}$

a) Su dominio es $\mathbb{R}$ porque la función exponencial siempre está definida.

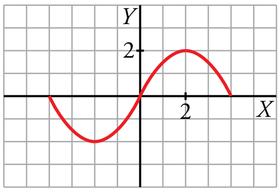
b) Para que exista el logaritmo, su argumento debe ser positivo. Por tanto, $x + 3 > 0$ y el dominio es $Dom = (-3, +\infty)$.

c) Análogamente al caso anterior, $x < 2$. Su dominio es $Dom = (-\infty, 2)$.

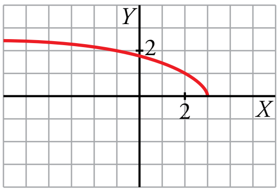
d) La función exponencial siempre toma valores positivos. Por tanto, la raíz siempre se puede evaluar y el dominio de definición de esta función es $Dom = \mathbb{R}$.

4 **Observa las gráficas de estas funciones e indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:**

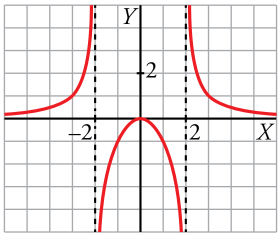
a)



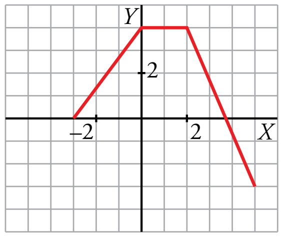
b)



c)



d)



a) Dominio: $[-4, 4]$ Recorrido: $[-2, 2]$

b) Dominio: $(-\infty, 3]$ Recorrido: $[0, +\infty)$

c) Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Recorrido: $\mathbb{R}$

d) Dominio: $[-3, 5]$ Recorrido: $[-3, 4]$

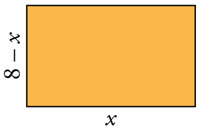
5 **La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t, hasta que vuelve al suelo. ¿Cuál es su dominio de definición?**

Necesitamos calcular el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo. Para ello es necesario resolver la ecuación:

$80 + 64t - 16t^2 = 0$, que tiene una solución posible, $t = 5$.

Como el tiempo no puede ser negativo, el dominio es $Dom = [0, 5]$.

6



Escribe el área de este rectángulo de perímetro 16 cm en función de su base *x*.

¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ¿Y su recorrido?

La función área es $A(x) = x(8 - x) = 8x - x^2$, que es un función cuadrática.

Su dominio es $Dom = (0, 8)$.

El valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\dfrac{-8}{-2} = 4$. Este valor es $A(4) = 16$. Por tanto, el recorrido de la función es el intervalo $(0, 16]$.

7 **La temperatura de un paciente, desde que comienza su enfermedad hasta que vuelve a tener 37 °C ha evolucionado según la función $T = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37$, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la enfermedad. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?**

Calculamos los días en los que tiene 37 °C.

$-0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37 = 37 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 12$

Es decir, a los 12 días vuelve a tener 37 °C de temperatura. El dominio es el intervalo $[0, 12]$.

Como se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, el valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\dfrac{-1{,}2}{-0{,}2} = 6$.

La temperatura máxima es $-0{,}1 \cdot 6^2 + 1{,}2 \cdot 6 + 37 = 40{,}6$ °C.

En consecuencia, el recorrido es el intervalo $[37; 40{,}6]$.

Funciones elementales

8 **Asocia a cada gráfica su expresión analítica.**

a) $y = 1{,}5^x$

b) $y = \sqrt{x+2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{3} - 1$

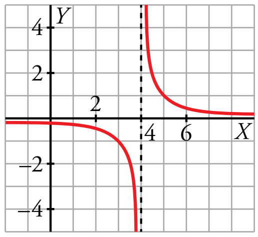
d) $y = \dfrac{1}{x-4}$

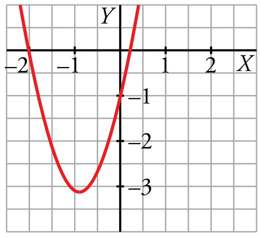
e) $y = 3x^2 + 5x - 1$

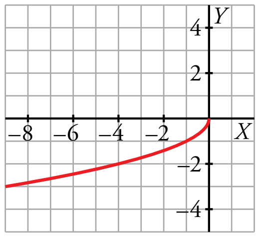
f) $y = 0{,}75^x$

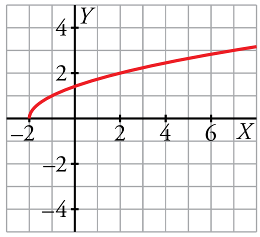
g) $y = \log_2 x$

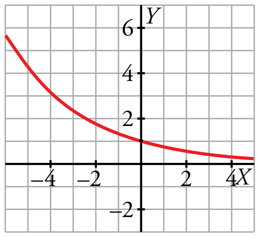
h) $y = -\sqrt{-x}$

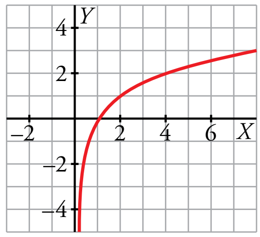
I


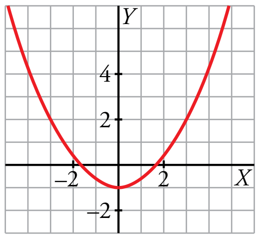
II


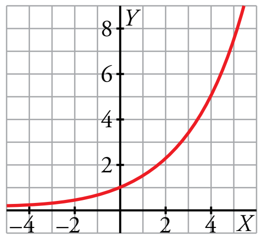
III


IV


V


VI


VII


VIII


a) VIII

b) IV

c) VII

d) I

e) II

f) V

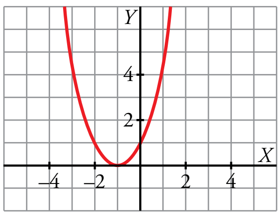
g) VI

h) III

9 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:**

a) $y = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ **c)** $y = -x^2 + 3x - 5$ **d)** $y = -1{,}5x^2 - 3x - 2$

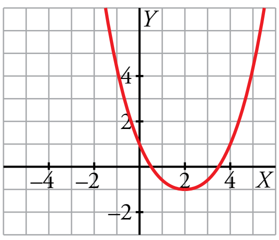
a)



Vértice: (–1, 0)

Cortes con los ejes: (–1, 0), (0, 1)

b)



Vértice: abscisa $= \dfrac{2}{1} = 2$; ordenada $= 0{,}5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = -1$

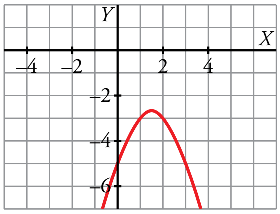
Corte con el eje vertical: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

Corte con el eje horizontal:

$y = 0 \;\rightarrow\; 0{,}5x^2 - 2x + 1 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{1} = 2 \pm \sqrt{2} \;\rightarrow\; x_1 = 2 + \sqrt{2};\; x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

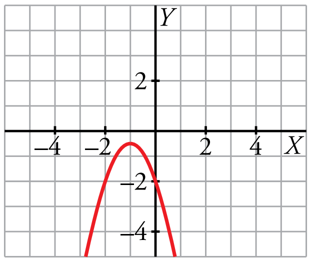
c)



Vértice: $\left(\frac{3}{2}, \frac{-11}{4}\right)$

Cortes con los ejes: (–5, 0)

d)



Vértice: abscisa = $\frac{3}{-3}$ = –1; ordenada = $-1{,}5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2 = -0{,}5$

Corte con el eje vertical: $x = 0 \;\rightarrow\; y = -2$

Corte con el eje horizontal: $y = 0 \;\rightarrow\; 1{,}5x^2 - 3x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{-3}$

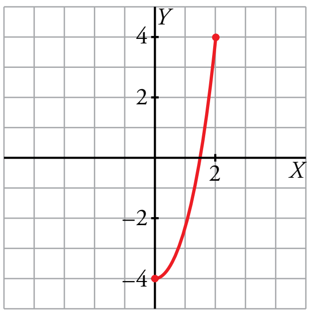
No corta al eje horizontal. Podemos evaluar ahora en algún punto cercano al vértice; por ejemplo, (–2, –2), (0, –2).

10 **Representa estas funciones en el intervalo indicado:**

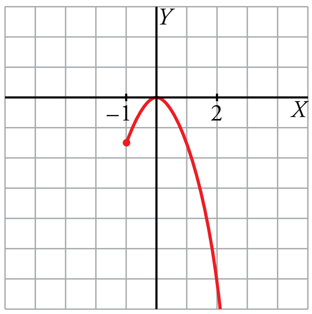
a) $y = 2x^2 - 4$, **[0, 2]** **b)** $y = -\frac{3x^2}{2}$, $x \ge -1$ **c)** $y = \frac{1}{x}$, $x < 0$

d) $y = 0{,}6^x$, **[–3, 3]** **e)** $y = log_2\, x$, **(0, 7]** **f)** $y = \sqrt{x}$, **[0, 1]**

a) $y = 2x^2 - 4$, [0, 2]

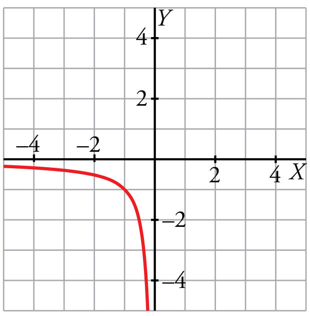


b) $y = -\frac{3x^2}{2}$, $x \ge -1$



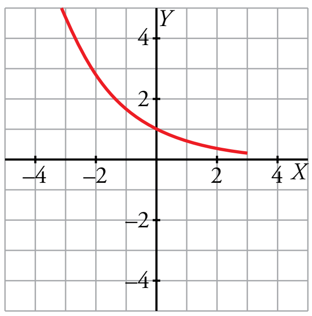
c) $y = \frac{1}{x}$, $x < 0$

Se trata de una rama de la función de proporcionalidad inversa y su gráfica es:



d) $y = 0{,}6^x$, [–3, 3]

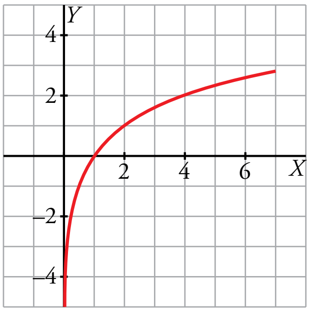
Es una función exponencial con base menor que 1. Mediante una tabla de valores obtenemos:



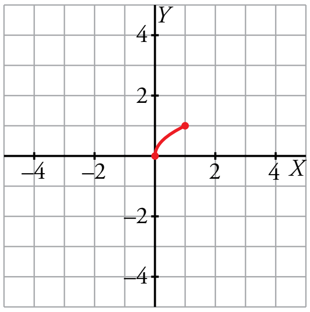
x	y
–3	4,6
–1	1,67
0	1
1	0,6
3	0,21

e) $y = log_2\, x$, $(0, 7]$

Es un fragmento de la función logaritmo en base 2.



f) $y = \sqrt{x}$, $[0, 1]$



Página 268

Funciones definidas "a trozos"

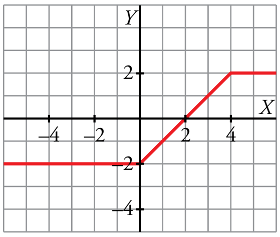
11 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

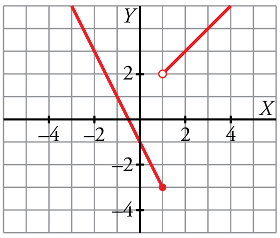
b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

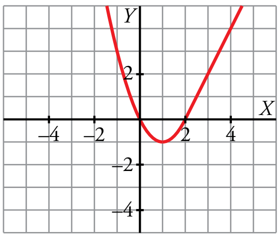
a)



b) Construimos una tabla de valores para cada recta y obtenemos la gráfica.



c) Hallamos el vértice de la parábola, (1, –1), y los puntos de corte, (0, 0) y (2, 0) (primer trozo). Construimos una tabla de valores para el segundo trozo y obtenemos:

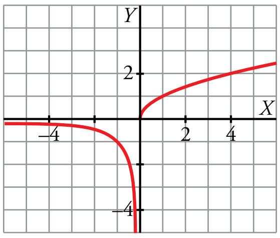


12 **Representa.**

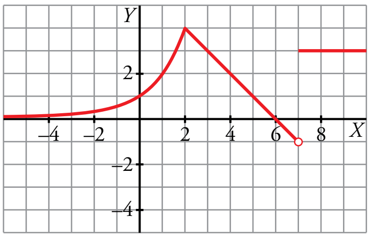
a) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ -x+6 & \text{si } 2 \leq x < 7 \\ 3 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$

a) Está formada por dos trozos de funciones ya representadas en ocasiones anteriores.



b)



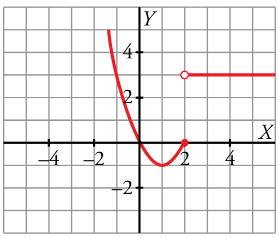
13 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

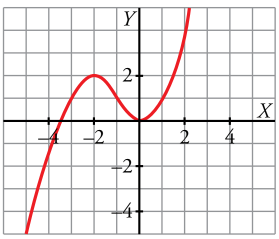
b) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

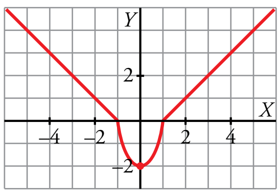
a)



b)

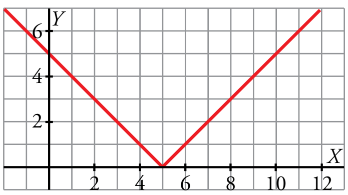


c)



14 **Representa la función** $y = |x - 5|$ **y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:**

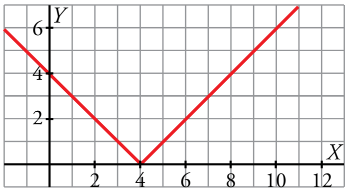
$y = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$



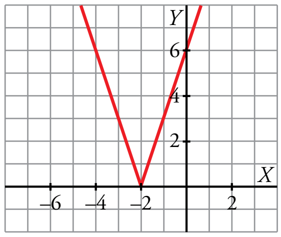
15 **Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones "a trozos":**

a) $y = |4 - x|$ **b)** $y = |3x + 6|$ **c)** $y = \left|\dfrac{x-3}{2}\right|$ **d)** $y = |-x - 1|$

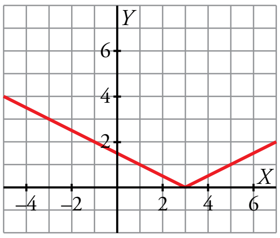
a)



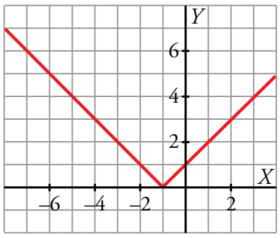
b)



c)



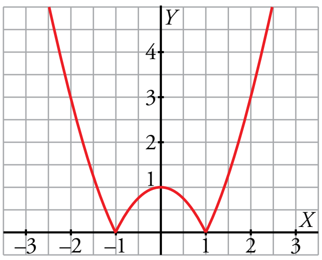
d)



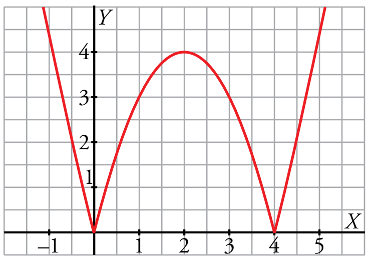
16 **Representa estas funciones:**

a) $y = |x^2 - 1|$ **b)** $y = |x^2 - 4x|$ **c)** $y = |x^2 + 2x - 3|$ **d)** $y = |x^2 - 2x + 1|$

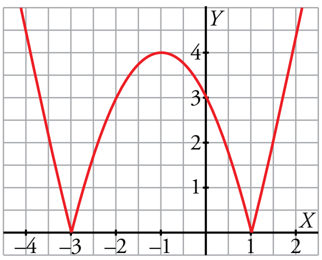
a)



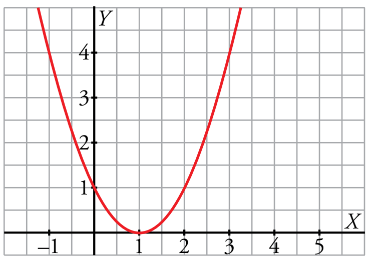
b)



c)



d)

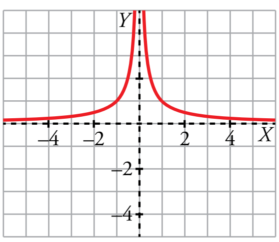


17 **Representa.**

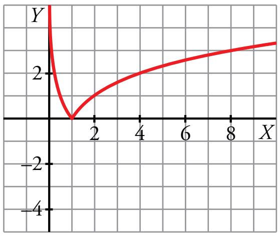
a) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$ **b)** $y = |log_2\, x|$ **c)** $y = \dfrac{|x|}{x}$ **d)** $y = 2|x| + x$

La función valor absoluto de $f(x)$ mantiene la parte positiva de la gráfica y convierte la parte negativa de $f(x)$ en $-f(x)$, es decir, en la simétrica de $f(x)$ respecto del eje horizontal.

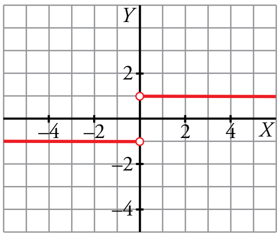
a)



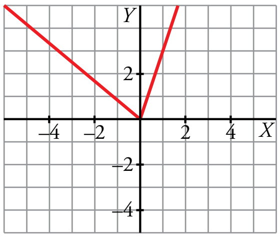
b)



c) $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



d) $y = 2|x| + x = \begin{cases} 2(-x) + x & \text{si } x < 0 \\ 2x + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

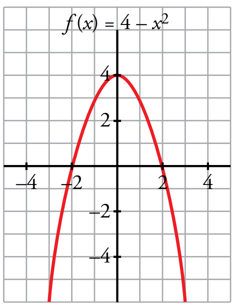


Transformaciones de una función

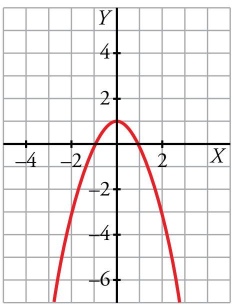
18 **Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 3$

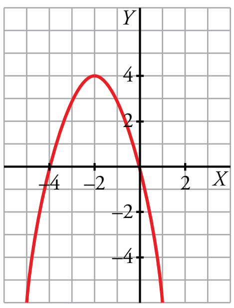
b) $h(x) = f(x + 2)$



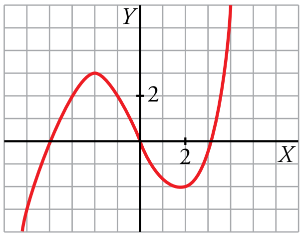
a)



b)



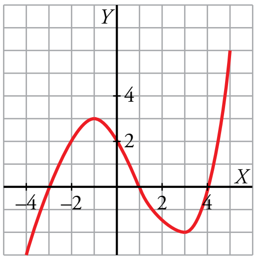
19 **Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:**



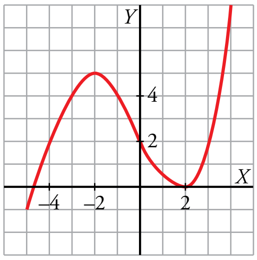
Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = f(x - 1)$ **b)** $y = f(x) + 2$

a)

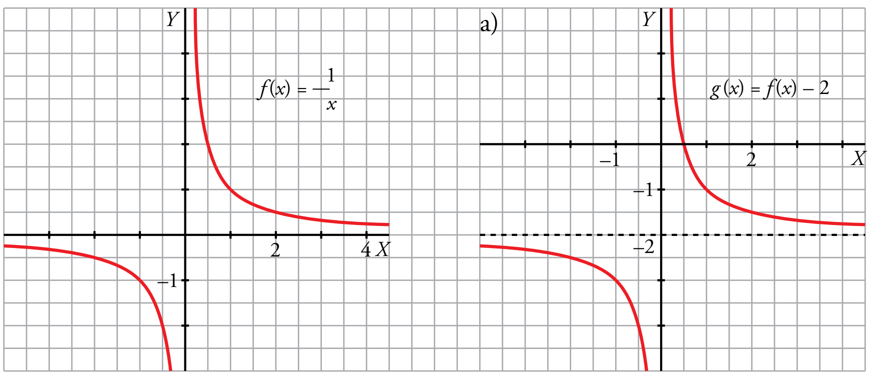


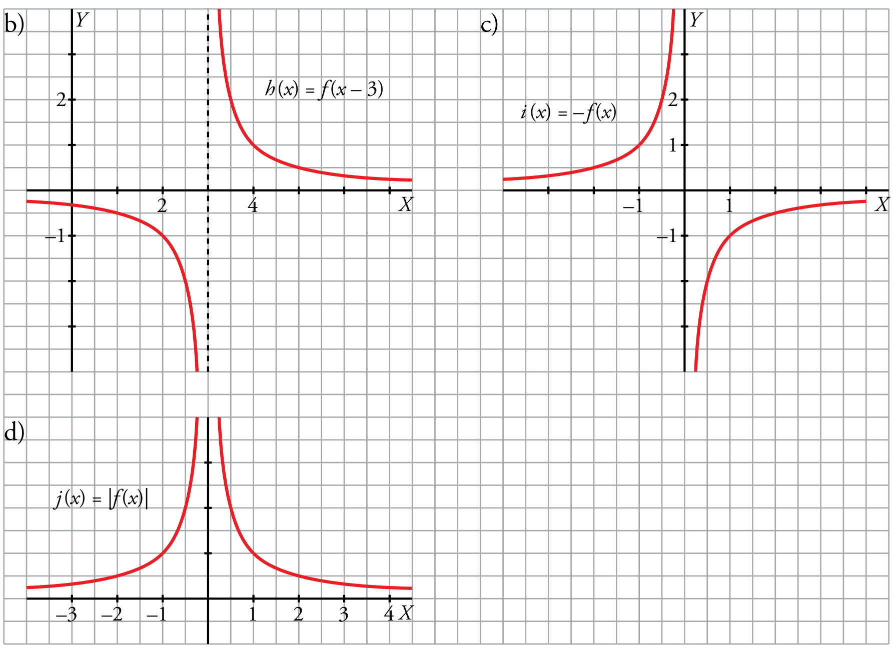
b)



20 **A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

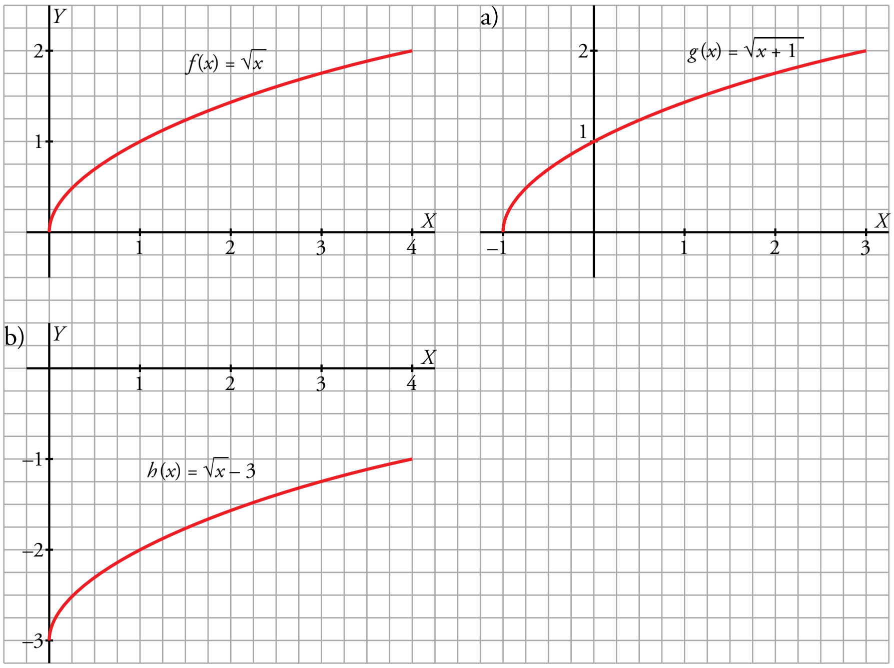
a) $g(x) = f(x) - 2$ **b)** $h(x) = f(x - 3)$ **c)** $i(x) = -f(x)$ **d)** $j(x) = |f(x)|$





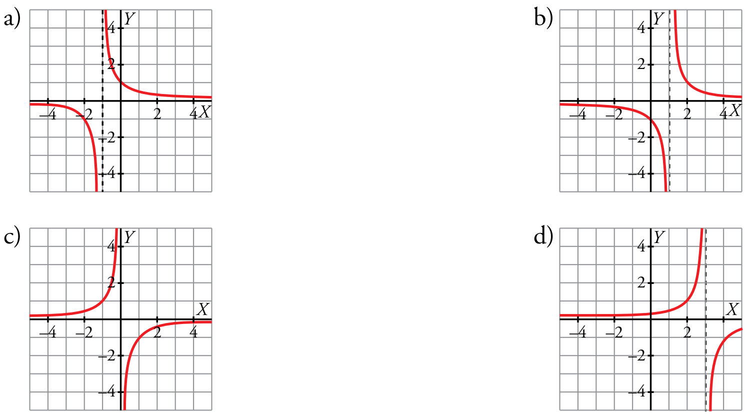
21 **Representa la función** $f(x) = \sqrt{x}$ **y dibuja a partir de ella:**

a) $g(x) = f(x + 1)$ **b)** $h(x) = f(x) - 3$



22 **Representa las siguientes funciones:**

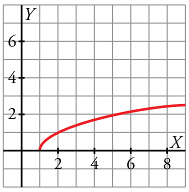
a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x-3}$



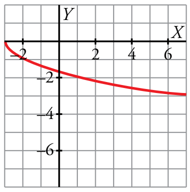
23 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x - 1}$ **b)** $y = -\sqrt{x + 3}$ **c)** $y = 2 + \sqrt{x}$ **d)** $y = 1 - \sqrt{x}$

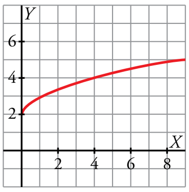
a)



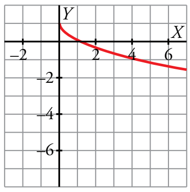
b)



c)



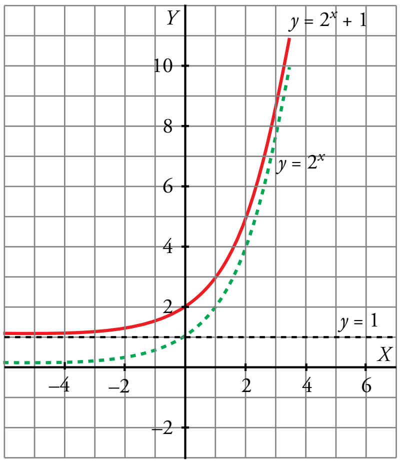
d)



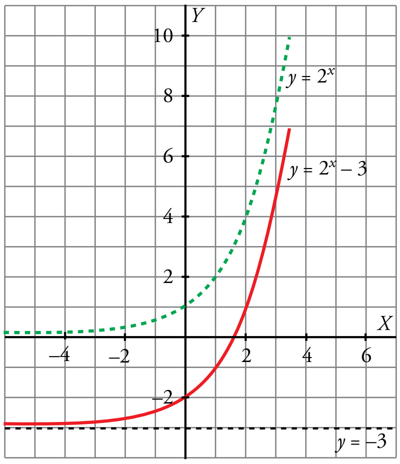
24 **Representa estas funciones:**

a) $y = 2^x + 1$ **b)** $y = 2^x - 3$ **c)** $y = 2^{x-1}$ **d)** $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$ **e)** $y = 1 - 2^x$ **f)** $y = 2^{-x}$

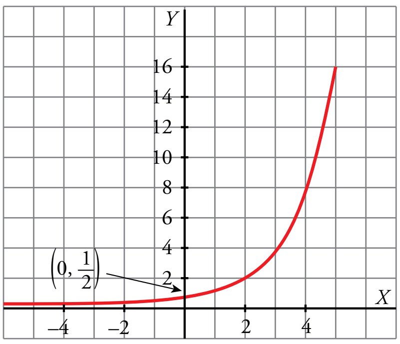
a)



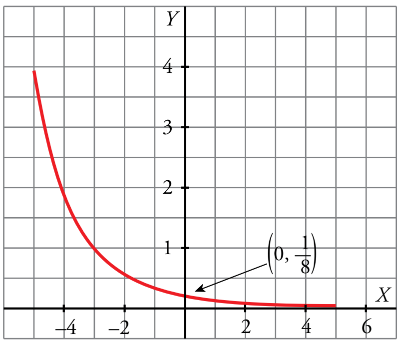
b)



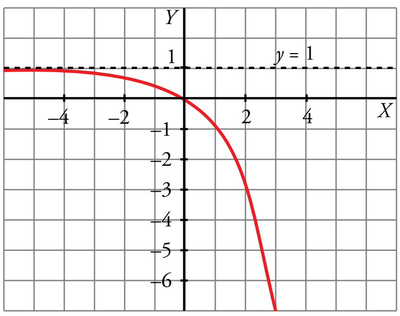
c)



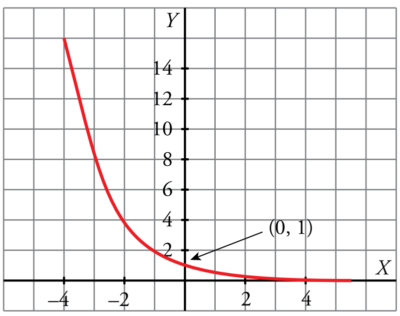
d)



e)



f)

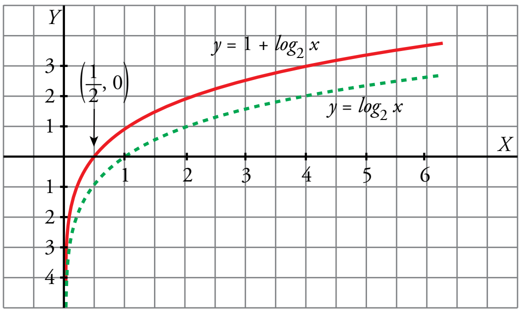


25 **Representa las siguientes funciones a partir de la gráfica de $y = log_2\, x$:**

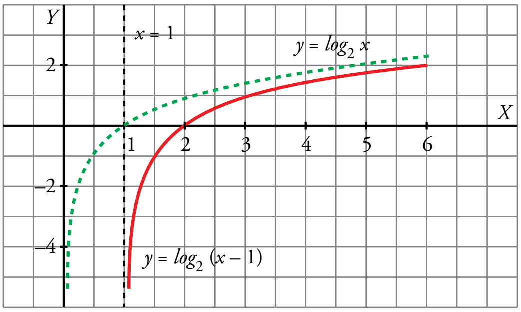
a) $y = 1 + log_2\, x$ **b)** $y = log_2\,(x - 1)$

c) $y = -log_2\, x$ **d)** $y = log_2\,(-x)$

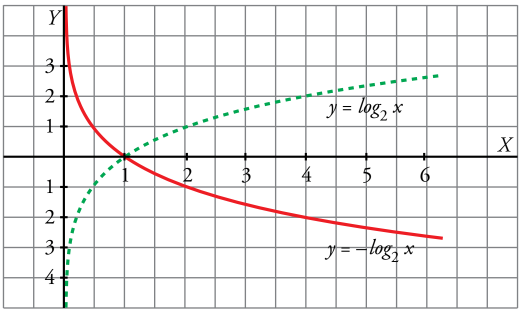
a)



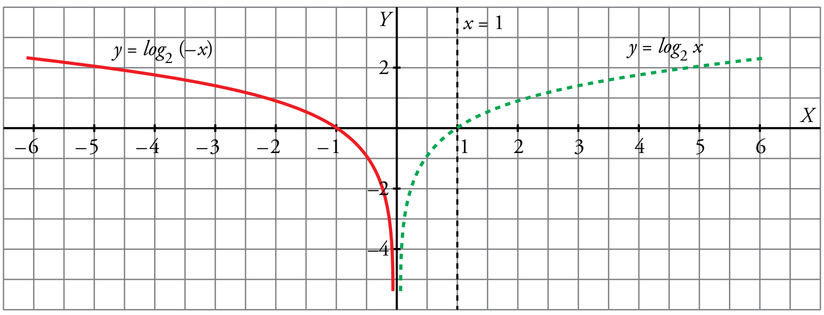
b)



c)

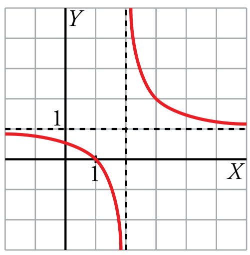


d)



26 **La expresión analítica de esta función es del tipo** $y = \dfrac{1}{x - a} + b$.

Observa la gráfica y di el valor de a **y** b.



$a = 2$

$b = 1$

Página 269

Composición y función inversa

27 **Dadas las funciones**

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = \frac{3}{x-2} \qquad h(x) = \sqrt{x-3}$$

obtén las expresiones de:

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $f \circ h$

d) $g \circ h$ **e)** $h \circ f$ **f)** $h \circ g$

Halla, si es posible, el valor de las funciones obtenidas en $x = 5$ y en $x = 0$.

a) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{3}{x-2}\right) = \left(\frac{3}{x-2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{(x-2)^2} + 1 = \frac{x^2 - 4x + 13}{(x-2)^2}$

$f \circ g(5) = \frac{5^2 - 4 \cdot 5 + 13}{(5-2)^2} = 2$

$f \circ g(0) = \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 13}{(0-2)^2} = \frac{13}{4}$

b) $g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x^2 + 1) = \frac{3}{x^2 + 1 - 2} = \frac{3}{x^2 - 1}$

$g \circ f(5) = \frac{3}{5^2 - 1} = \frac{1}{8}$

$g \circ f(0) = \frac{3}{0^2 - 1} = -3$

c) $f \circ h(x) = f[h(x)] = f(\sqrt{x-3}) = \sqrt{x-3}^2 + 1 = x - 2$

$f \circ h(5) = 5 - 2 = 3$

$f \circ h(0) = 0 - 2 = -2$

d) $g \circ h(x) = g[h(x)] = g(\sqrt{x-3}) = \frac{3}{\sqrt{x-3} - 2}$

$g \circ h(5) = \frac{3}{\sqrt{5-3} - 2} = \frac{3}{\sqrt{2} - 2}$

$g \circ h(0)$ no existe.

e) $h \circ f(x) = h[f(x)] = h(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 3} = \sqrt{x^2 - 2}$

$h \circ f(5) = \sqrt{5^2 - 2} = \sqrt{23}$

$h \circ f(0)$ no existe.

f) $h \circ g(x) = h[g(x)] = h\left(\frac{3}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{3}{x-2} - 3} = \sqrt{\frac{-3x + 9}{x-2}}$

$h \circ g(5)$ no existe.

$h \circ g(0)$ no existe.

28 **Explica cómo a partir de las funciones**

$$f(x) = 2^{x-1} \qquad g(x) = \sqrt{x} + 2 \qquad h(x) = \frac{1}{x-3}$$

se pueden obtener estas otras:

a) $m(x) = 2^{\sqrt{x}+1}$

b) $n(x) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$

c) $p(x) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$

e) $r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

f) $s(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$

a) $m(x) = f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}+2) = 2^{\sqrt{x}+2-1} = 2^{\sqrt{x}+1}$

b) $n(x) = g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2^{x-1}) = \sqrt{2^{x-1}} + 2$

c) $p(x) = g \circ h(x) = g[h(x)] = g\left(\frac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-3}} + 2$

d) $q(x) = f \circ h(x) = f[h(x)] = f\left(\frac{1}{x-3}\right) = 2^{\frac{1}{x-3}-1} = 2^{\frac{4-x}{x-3}}$

e) $r(x) = h \circ g(x) = h[g(x)] = h(\sqrt{x}+2) = \frac{1}{\sqrt{x}+2-3} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

f) $s(x) = h \circ g \circ f(x) = h \circ g[f(x)] = h \circ g(2^{x-1}) = h(\sqrt{2^{x-1}}+2) = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}+2-3} = \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}-1}$

29 **Halla la función inversa de las siguientes funciones:**

a) $y = 3x - 2$

b) $y = \frac{x+3}{2}$

c) $y = \sqrt{2x+1}$

d) $y = 1 + 2^x$

e) $y = 2 + \log_3 x$

f) $y = 4 - x^2, \; x \ge 0$

a) $y = 3x - 2 \;\rightarrow\; x = 3y - 2 \;\rightarrow\; y = \frac{x+2}{3}$

b) $y = \frac{x+3}{2} \;\rightarrow\; x = \frac{y+3}{2} \;\rightarrow\; y = 2x - 3$

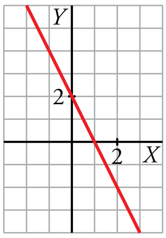
c) $y = \sqrt{2x+1} \;\rightarrow\; x = \sqrt{2y+1} \;\rightarrow\; y = \frac{x^2-1}{2}$

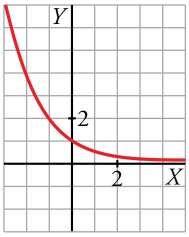
d) $y = 1 + 2^x \;\rightarrow\; x = 1 + 2^y \;\rightarrow\; y = \log_2(x-1)$

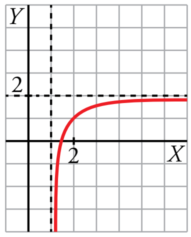
e) $y = 2 + \log_3 x \;\rightarrow\; x = 2 + \log_3 y \;\rightarrow\; y = 3^{x-2}$

f) $y = 4 - x^2, \; x > 0 \;\rightarrow\; x = 4 - y^2 \;\rightarrow\; y = \sqrt{4-x}, \; x \le 4$

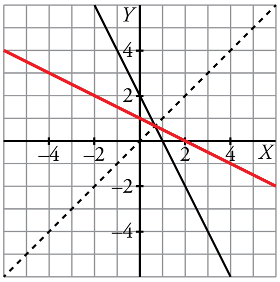
30 **Representa gráficamente la función inversa en cada caso:**

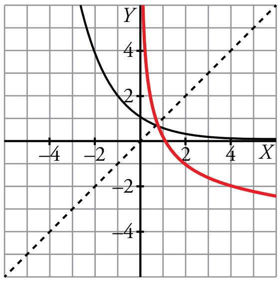
a) 

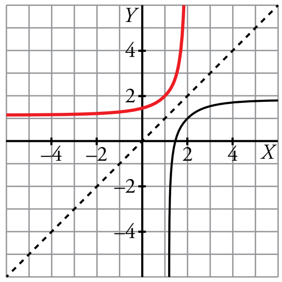
b) 

c) 

Hacemos una simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante para dibujar la función inversa.

a) 

b) 

c) 

31 **Comprueba si cada par de funciones son una inversa de la otra. Para ello calcula $f \circ f^{-1}$ o bien $f^{-1} \circ f$:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+2}{3}$

c) $f(x) = 1 + log_2 \dfrac{x}{3}$; $f^{-1}(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$

a) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} - 2 + 2} = x$

b) $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1} f(x)] = f(\sqrt{2x+3}) = \dfrac{\sqrt{2x+3}^2 + 2}{3} = \dfrac{2x+5}{3}$

En este caso no es verdad que las funciones sean recíprocas. f^{-1} es incorrecta.

c) $f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f\left(1 + log_2 \dfrac{x}{3}\right) = 3 \cdot 2^{1 + log_2[(x/3) - 1]} = 3 \cdot 2^{log_2(x/3)} = 3 \cdot \dfrac{x}{3} = x$

32 **Considera la función $y = \sqrt{x+2}$, $x \in [-2, 7]$.**

a) ¿Cuál es su recorrido?

b) Obtén su función inversa, y determina el dominio de definición y el recorrido de esta.

a) Como la función es creciente, calculamos los valores en los extremos del intervalo.

$x = -2 \ \to \ y = \sqrt{-2+2} = 0$

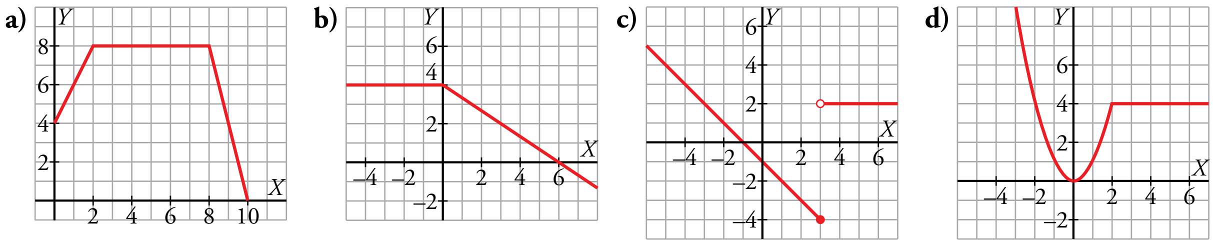
$x = 7 \ \to \ y = \sqrt{7+2} = 3$

El recorrido es el intervalo [0, 3].

b) $y = \sqrt{x+2} \ \to \ x = \sqrt{y+2} \ \to \ y = x^2 - 2, \ x \in \ [0, 3]$ es la función inversa. Su dominio es el intervalo [0, 3] y el recorrido es el intervalo [–2, 7].

Para resolver

33 **Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones:**



a) Primer tramo:

Función lineal con pendiente 2 y ordenada en el origen 4, luego la expresión es $y = 2x + 4$.

Segundo tramo: $y = 8$

Tercer tramo:

Función lineal que pasa por los puntos (8, 8) y (10, 0). Su pendiente es $\dfrac{0-8}{10-8} = -4$.

La expresión es $y - 8 = -4(x - 8) \ \to \ y = 40 - 4x$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 8 & \text{si } 2 < x \le 8 \\ 40-4x & \text{si } 8 < x \le 10 \end{cases}$$

b) Primer tramo: $y = 4$

Segundo tramo:

Función lineal con pendiente $-\dfrac{2}{3}$ y ordenada en el origen 4, luego la expresión es $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$.

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \le 0 \\ -\dfrac{2x}{3} + 4 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

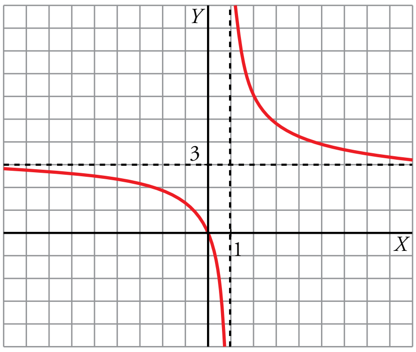
c) $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

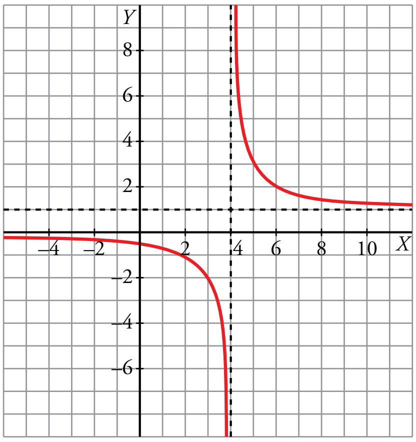
34 **Representa las siguientes funciones partiendo de una más sencilla y realizando transformaciones sobre ella:**

a) $y = \dfrac{3x}{x-1}$ **b)** $y = \dfrac{x-2}{x-4}$ **c)** $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

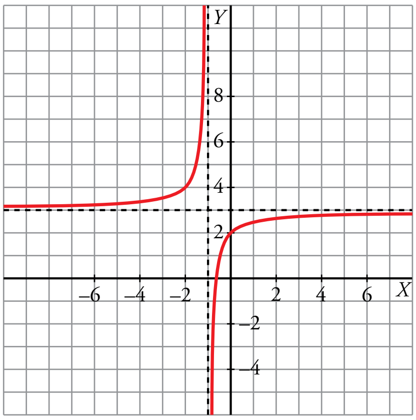
a) $y = \dfrac{3x}{x-1} = 3 + \dfrac{3}{x-1}$



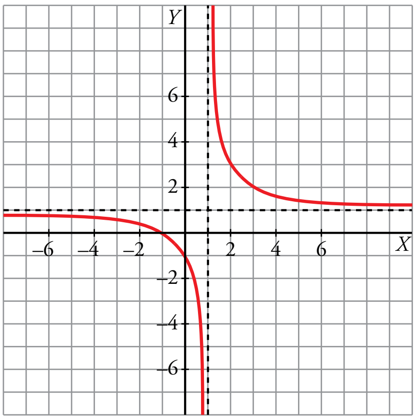
b) $y = \dfrac{x-2}{x-4} = 1 + \dfrac{2}{x-4}$



c) $y = \dfrac{3x+2}{x+1} = 3 + \dfrac{-1}{x+1}$



d) $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$



35 **La gráfica de una función exponencial del tipo $y = ka^x$ pasa por los puntos (0; 0,5) y (1; 1,7).**

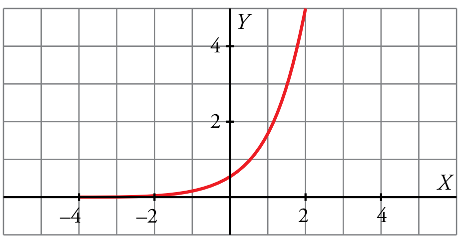
a) Calcula k y a.

b) Representa la función.

a) $\left.\begin{array}{l} 0,5 = k \cdot a^0 \\ 1,7 = k \cdot a^1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0,5 = k \\ 1,7 = k \cdot a \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} k = 0,5 \\ a = 3,4 \end{array}$

La función es $y = 0,5 \cdot (3,4)^x$

b)



36 **Determina, en cada caso, la ecuación de la parábola de la que conocemos el vértice y otro punto.**

a) $V(1, -4)$, $P(-1, 0)$ **b)** $V(-2, 3)$, $P(0, 6)$

a) Si la parábola es $y = ax^2 + bx + c$ tenemos que:

$$V(1,-4) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 1 \rightarrow b = -2a \\ -4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \rightarrow -4 = a + b + c \end{cases}$$

$$P(-1, 0) \rightarrow 0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \rightarrow 0 = a - b + c$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ -4 = a + b + c \\ 0 = a - b + c \end{cases}$$

La solución del sistema es: $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$.

La parábola buscada es $y = x^2 - 2x - 3$.

b) Si la parábola es $y = ax^2 + bx + c$, tenemos que:

$$V(-2, 3) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = -2 \rightarrow b = 4a \\ 3 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \rightarrow 3 = 4a - 2b + c \end{cases}$$

$$P(0, 6) \rightarrow 6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow 6 = c$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ 3 = 4a - 2b + c \\ c = 6 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $a = \dfrac{3}{4}$, $b = 3$, $c = 6$.

La parábola buscada es $y = \dfrac{3}{4}x^2 + 3x + 6$.

37 **Utiliza la calculadora en radianes para obtener el valor de y en cada una de estas expresiones:**

a) $y = arc\ sen\ 0{,}8$ **b)** $y = arc\ sen\ (-0{,}9)$ **c)** $y = arc\ cos\ 0{,}36$

d) $y = arc\ cos\ (-0{,}75)$ **e)** $y = arc\ tg\ 3{,}5$ **f)** $y = arc\ tg\ (-7)$

a) 0,93 *rad* → 53° 7' 48''

b) –1,12 *rad* → –64° 9' 29''

c) 1,20 *rad* → 68° 53' 59''

d) 2,42 *rad* → 138° 35' 25''

e) 1,29 *rad* → 74° 3' 17''

f) –1,43 *rad* → –81° 52' 11''

38 **Obtén el valor de y en grados, sin usar la calculadora:**

a) $y = arc\ sen\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $y = arc\ cos\ \dfrac{1}{2}$ **c)** $y = arc\ tg\ 1$

d) $y = arc\ sen\ (-1)$ **e)** $y = arc\ cos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **f)** $y = arc\ tg\ \sqrt{3}$

a) 60° b) 60° c) 45°

d) –90° e) 120° f) 60°

39 **Calcula en radianes.**

a) $arc\ sen\left(sen\ \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $arc\ cos\ (cos\ \pi)$ **c)** $arc\ tg\left(tg\ \frac{\pi}{5}\right)$

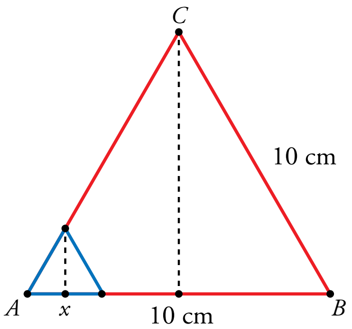
d) $tg\ (arc\ tg\ 1)$ **e)** $sen\ (arc\ cos\ (-1))$ **f)** $arc\ cos\ (tg\ \pi)$

a) $arc\ sen\left(sen\ \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ b) $arc\ cos\ (cos\ \pi) = \pi$ c) $arc\ tg\left(tg\ \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$

d) $tg\ (arc\ tg\ 1) = 1$ e) $sen\ (arc\ cos\ (-1)) = 0$ f) $arc\ cos\ (tg\ \pi) = \frac{\pi}{2}$

Página 270

40 **En un triángulo equilátero de 10 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos equiláteros de lado x. Escribe el área del hexágono que resulta en función de x. ¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ¿Y su recorrido?**



La altura del triángulo de lado 10 es $10 sen\ 60° = 5\sqrt{3}$.

La altura del triángulo de lado x es $x\ sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

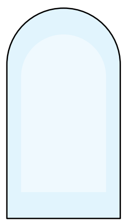
El área del hexágono es igual al área del triángulo de lado 10 menos 3 veces el área del triángulo de lado x, es decir:

$$A(x) = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = 25\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 = \sqrt{3}\left(25 - \frac{3}{4}x^2\right)$$

El dominio es el intervalo (0, 5) porque x debe ser positivo y menor que la mitad del lado para que se pueda construir el hexágono.

El recorrido es el intervalo $\left(\frac{25\sqrt{3}}{4}, 25\sqrt{3}\right)$.

41 **Se quiere hacer una ventana con forma de rectángulo añadiéndole un semicírculo sobre el lado menor, en la parte superior. Si el perímetro del rectángulo es 8 m, escribe el área de la ventana en función del lado menor del rectángulo. Di cuál es su dominio y su recorrido.**



Si llamamos x al lado menor, el lado mayor es $4 - x$ para que el perímetro del rectángulo sea 8. El radio del semicírculo es $\frac{x}{2}$. Por tanto, el área de la ventana es:

$$A(x) = x(4 - x) + \frac{\pi \cdot (x/2)^2}{2} = x(4 - x) + \frac{\pi}{8}x^2 = \left(\frac{\pi}{8} - 1\right)^2 x^2 + 4x$$

El dominio de la función es el intervalo (0, 2) por ser x el lado menor y tener el rectángulo un perímetro de 8 m.

$$A(0) = 0$$

$$A(2) = 2 \cdot (4 - 2) + \frac{\pi}{8} \cdot 4^2 = 2\pi + 4$$

El recorrido es el intervalo $(0, 2\pi + 4)$.

42 **En las funciones de oferta y demanda, se llama *cantidad de equilibrio* al número de unidades que hay que producir para que la oferta y la demanda se igualen, $o(x) = d(x)$; y se llama *precio de equilibrio* al precio con el cual se consigue esa igualdad.**

a) Halla el precio y la cantidad de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son $o(x) = 2{,}5x - 100$ y $d(x) = 300 - 1{,}5x$ (x en euros, d y o en miles de unidades del producto).

b) Si el precio del producto es de 80 €, ¿habrá escasez o exceso del mismo? ¿Y si el precio fuese de 120 €?

c) ¿Cuál sería el precio y la cantidad de equilibrio si las funciones de oferta y demanda fuesen $o(x) = 0{,}25x^2 - 100$ y $d(x) = 185 - 2x$?

a) $o(x) = d(x) \rightarrow 2{,}5x - 100 = 300 - 1{,}5x \rightarrow x = 100$ € es el precio de equilibrio.

La cantidad de equilibrio es $o(100) = d(100) = 300 - 1{,}5 \cdot 100 = 150$ miles de unidades.

b) Si $x = 80$, hay escasez, porque la demanda supera a la oferta. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 80 - 100 = 100$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 80 = 180$

Si $x = 120$, hay exceso, porque la oferta supera a la demanda. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 120 - 100 = 200$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 120 = 120$

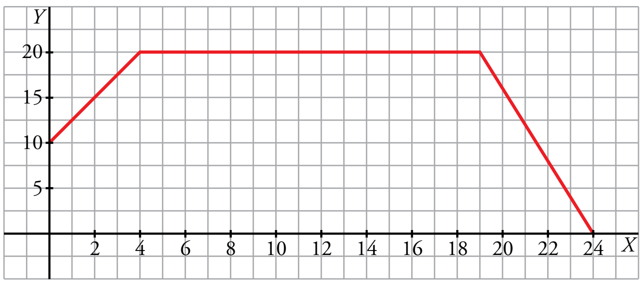
c) $o(x) = d(x) \rightarrow 0{,}25x^2 - 100 = 185 - 2x$ da lugar a una única solución posible: $x = 30$ €.

43 **La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Se debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.**

a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

a) En el 5.º día la dosis alcanza los 20 mg y este ya es el primero de los 15 días de tratamiento con la dosis máxima. Por tanto, el 19.º día es el último que toma 20 mg.

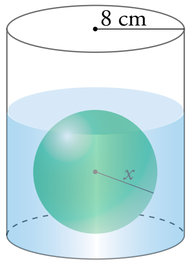


La expresión es $f(x) = \begin{cases} 10 + 2x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 20 & \text{si } 5 < x \le 19 \\ 96 - 4x & \text{si } 19 < x \end{cases}$

b) El dominio es el intervlao [0, 24].

El recorrido es el intervalo [0, 20].

44 **En un cilindro de radio 8 cm, depositamos una bola esférica de radio x y echamos agua hasta que cubra la bola.**



Escribe la función que da la cantidad de agua que hay que echar según la medida del radio de la bola.

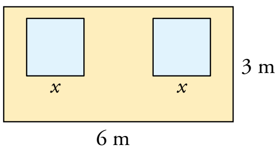
¿Cuál es su dominio de definición?

Como la bola tiene radio x, la altura del agua es $2x$. El volumen del agua es el volumen de un cilindro de radio 8 y altura $2x$ menos el volumen de una esfera de radio x.

$$V(x) = \pi \cdot 8^2 \cdot 2x - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3 = 128\pi x - \frac{4}{3}\pi x^3 = 4\pi x\left(32 - \frac{x^2}{3}\right)$$

El dominio de definición es el intervalo (0, 8), ya que la bola no puede tener un radio de 8 cm.

45 **En una pared de dimensiones 6 m × 3 m se quieren abrir dos ventanas cuadradas de lado x.**



a) Expresa el área que queda de pared, una vez hechas las ventanas, en función de x.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

a) El área es $A(x) = 18 - 2x^2$.

b) El dominio de definición es el intervalo (0, 3).

46 **Una feria ganadera está abierta al público entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función $N(t) = -20t^2 + Bt + C$, donde t es la hora de visita.**

Sabiendo que a las 17 h se alcanza el máximo de 1 500 visitantes, halla B y C y representa la función.

Como la función $N(t)$ es una parábola con las ramas hacia abajo, el número máximo se alcanza en el vértice de la parábola, luego:

$$\frac{-B}{2 \cdot (-20)} = 17 \rightarrow B = 680 \rightarrow N(t) = -20t^2 + 680t + C$$

Como a las 17 h la feria tiene 1 500 visitantes, se tiene que:

$$1\,500 = -20 \cdot 17^2 + 680 \cdot 17 + C \rightarrow C = -4\,280$$

La función es $N(t) = -20t^2 + 680t - 4\,280$

Para representar la función calculamos $N(10) = 520$ y $N(20) = 1\,320$. El vértice y estos dos puntos son suficientes para construir la gráfica.

47 **El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - (x/4)$ euros.**

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas, y represéntala.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

a) $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $x = \dfrac{-15}{-1} = 15$.

Deben venderse 15 unidades.

48 **Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.**

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

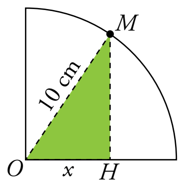
a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)\,(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

(x, en decenas de euros)

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-200}{-40} = 5 \rightarrow 50$ euros

49 

En un cuarto de circunferencia de 10 cm de radio tomamos un punto M y construimos el triángulo rectángulo OMH.

Expresa el área de ese triángulo según la medida del cateto x. ¿Cuál es su dominio de definición?

Utilizando el teorema de Pitágoras, $\overline{MH} = \sqrt{100 - x^2}$

El área del triángulo es la función $A(x) = \dfrac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}$ y su dominio es el intervalo (0, 10) para que la construcción tenga sentido.

50 **Un cultivo de bacterias comienza con 100 células. Media hora después hay 435. Si ese cultivo sigue un crecimiento exponencial del tipo $y = ka^t$ (t en minutos), calcula k y a y representa la función. ¿Cuánto tardará en llegar a 5 000 bacterias?**

$y = ka^t$

$t = 0,\ y = 100 \rightarrow 100 = k \cdot a^0 \rightarrow k = 100$

$t = 30,\ y = 435 \rightarrow 435 = 100 \cdot a^{30} \rightarrow a^{30} = 4{,}35 \rightarrow$

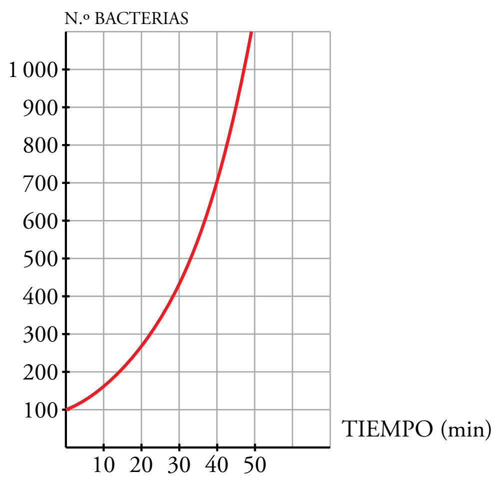
$\rightarrow a = 4{,}35^{1/30} \rightarrow a \approx 1{,}05$

La función es $y = 100 \cdot 1{,}05^x$.

Si $y = 5\,000 \rightarrow 5\,000 = 100 \cdot 1{,}05^x$

$50 = 1{,}05^x \rightarrow x = \dfrac{\log 50}{\log 1{,}05} \approx 80$ min

Tardará 80 minutos, aproximadamente.



51 **Un negocio en el que invertimos 10 000 €, pierde un 4 % mensual. Escribe la función que nos da el capital que tendremos según los meses transcurridos, y represéntala. ¿Cuánto tiempo tardará el capital inicial en reducirse a la mitad?**

$y = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$

Si $y = 5\,000 \rightarrow 5\,000 = 10\,000 \cdot 0{,}96^x$

$0{,}96^x = 0{,}5 \rightarrow x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}96} \approx 16{,}98$ meses

Tardará 17 meses, aproximadamente.

52 **Una taza de café recién hecho está a 75 °C. Después de 3 minutos en una habitación a 21 °C, la temperatura del café ha descendido a 64 °C. Si la temperatura, T, del café en cada instante t viene dada por la expresión $T = A\,e^{kt} + 21$, calcula A y k y representa la función.**

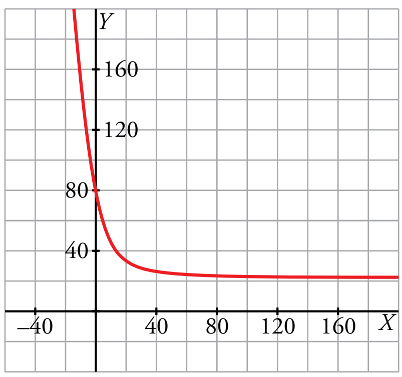
¿Cuánto tendremos que esperar para que la temperatura del café sea de 45 °C?

Por los datos del problema, la función temperatura pasa por los puntos (0, 75) y (3, 64), luego:

$$75 = A \cdot e^{k \cdot 0} + 21 \rightarrow A = 54$$

$$64 = 54 \cdot e^{k \cdot 3} + 21 \rightarrow e^{3k} = \frac{43}{54} = 0{,}796 \rightarrow k = \frac{\ln 0{,}796}{3} = -0{,}076$$

Por tanto, $T = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21$



Si la temperatura del café es de 45°, entonces:

$$45 = 54 \cdot e^{-0{,}076t} + 21 \rightarrow e^{-0{,}076t} = \frac{24}{54} = 0{,}444 \rightarrow t = \frac{\ln 0{,}444}{-0{,}076} = 10{,}7 \text{ minutos}$$

Debemos esperar 10 minutos 42 segundos para que alcance los 45°.

Página 271

Cuestiones teóricas

53 **Dada la función $y = a^x$, contesta:**

a) ¿Puede ser negativa la y? ¿Y la x?

b) ¿Para qué valores de a es decreciente?

c) ¿Cuál es el punto por el que pasan todas las funciones del tipo $y = log_a x$?

d) ¿Para qué valores de x se verifica $0 < a^x < 1$ siendo $a > 1$?

a) La y no puede ser negativa porque la función exponencial siempre toma valores positivos.

La x sí puede ser negativa porque el dominio de definición de esta función es $Dom = \mathbb{R}$.

b) Es decreciente para valores de a comprendidos entre 0 y 1, es decir, si $0 < a < 1$.

c) Todas pasan por el punto (1, 0) porque $log_a 1 = 0$ para cualquier a.

d) Se verifica siempre que $x < 0$, como podemos ver en su gráfica.

54 **¿Puede ser simétrica una función respecto del eje OX? Justifica tu respuesta.**

La única función simétrica respecto del eje OX es la función $y = 0$ ya que, si algún punto de ella se "saliera" del eje OX, debería tener otro reflejado en la misma vertical y esto es imposible por el concepto de función.

55 **Demuestra que $y = log_b(x - a)$ e $y = log_c(x - a)$ cortan al eje OX en el mismo punto.**

Los puntos de corte de una función con el eje OX son aquellos que verifican $y = 0$.

Para que el logaritmo de un número sea 0, su argumento debe ser 1. Por tanto, el punto de corte es:

$$x = a + 1 \;\rightarrow\; \begin{cases} y = log_b(a + 1 - a) = log_b 1 = 0 \\ y = log_c(a + 1 - a) = log_c 1 = 0 \end{cases}$$

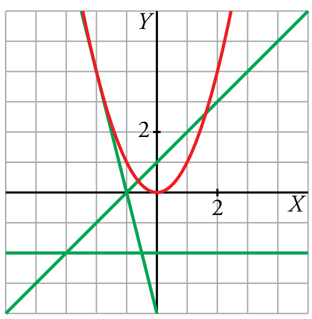
56 **¿Cuántas soluciones puede tener cada uno de estos sistemas?**

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = ax + b \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = 1/x \\ y = ax + b \end{cases}$

Justifícalo gráficamente y pon ejemplos.

a) Puede tener como máximo dos soluciones, dependiendo de la posición relativa de la parábola y la recta. Es decir, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

Desde otro punto de vista, la ecuación $x^2 = ax + b$ puede tener 0, 1 o 2 soluciones.



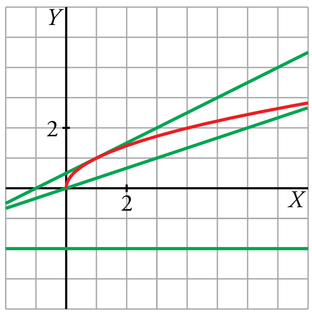
$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -4x - 4 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (–2, 4).

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, $\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

b) Este caso es análogo al anterior. En función de la posición relativa de la semiparábola y la recta, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

La ecuación $\sqrt{x} = ax + b$ puede tener, como máximo, dos soluciones.



$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{2}(x+1) \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

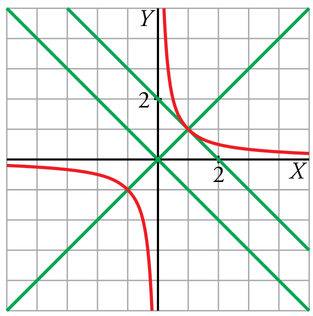
$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{3}x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (0, 0) y (9, 3).

c) El sistema da lugar a una ecuación de segundo grado como podemos ver.

$\dfrac{1}{x} = ax + b \to x(ax + b) = 1 \to ax^2 + bx - 1 = 0$

Por tanto, al igual que en los casos anteriores, puede tener, como máximo, dos soluciones.

También puede interpretarse desde el punto de vista de la posición relativa de una hipérbola y una recta.



$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -x \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -x + 2 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (1, 1) y (–1, –1).

57 Calcula *x* en las siguientes expresiones:

a) ***arc sen x*** **= 45°** **b)** ***arc cos x*** **= 30°** **c)** ***arc tg x*** **= –72°**

d) ***arc sen x*** **= 75°** **e)** ***arc cos x*** **=** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ **rad** **f)** ***arc tg x*** **= 1,5 rad**

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) –3,078

d) 0,966 e) $\dfrac{1}{2}$ f) 14,101

58 ¿Alguna de estas funciones verifica $\boldsymbol{f(a + b) = f(a) + f(b)}$**?**

a) $\boldsymbol{f(x) = x + 1}$

b) $\boldsymbol{f(x) = 2x}$

c) $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

a) $f(a + b) = a + b + 1 \neq f(a) + f(b) = a + 1 + b + 1 = a + b + 2$

b) $f(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = f(a) + f(b)$

c) $f(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq f(a) + f(b) = a^2 + b^2$

Para profundizar

59 **¿Qué transformación hemos hecho en cada una de estas funciones para obtenerlas a partir de $y = x^2$?**

a) $y = x^2 - 6x + 5$ **b)** $y = 3x^2 - 6x + 5$

a) $y = x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$

Hemos hecho una traslación de 3 unidades a la derecha en el eje *OX* y de 4 unidades hacia abajo en el eje *OY*.

b) $y = 3x^2 - 6x + 5 = 3(x^2 - 2x) + 5 = 3(x^2 - 2x + 1) - 3 + 5 = 3(x - 1)^2 + 2$

Hemos hecho una traslación de 1 unidad a la derecha en el eje *OX* y de 2 unidades hacia arriba en el eje *OY*. También hemos hecho un estiramiento en el sentido vertical al multiplicar por 3.

60 **Define por intervalos y representa.**

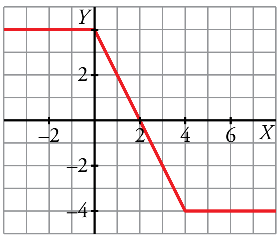
a) $y = |x - 4| - |x|$ **b)** $y = |x + 1| + |x - 3|$ **c)** $y = |2x - 4| - |x - 1|$

a) $|x - 4| = \begin{cases} -x + 4 & \text{si } x < 4 \\ x - 4 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$ $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

Disponemos los cálculos en una tabla para hallar la función resultante:

	$(-\infty, 0)$	$[0, 4)$	$[4, +\infty)$
$\|x - 4\|$	$-x + 4$	$-x + 4$	$x - 4$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x - 4\| - \|x\|$	4	$4 - 2x$	-4

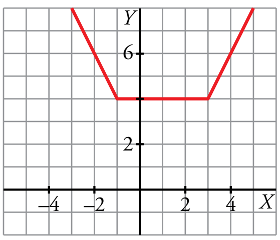
$$y = |x - 4| - |x| = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 0 \\ 4 - 2x & \text{si } 0 \le x < 4 \\ -4 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$



b) $|x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$ $|x - 3| = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

Por tanto, análogamente al ejemplo anterior, obtenemos:

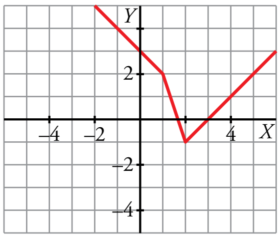
$$y = |x + 1| + |x - 3| = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ 2x - 2 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$$



c) $|2x-4| = \begin{cases} -2x+4 & \text{si } x<2 \\ 2x-4 & \text{si } 2\le x \end{cases}$ $\qquad |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } 1\le x \end{cases}$

Por tanto, análogamente al ejemplo anterior, obtenemos:

$$y = |2x-4| - |x-1| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x<1 \\ -3x+5 & \text{si } 1\le x<2 \\ x-3 & \text{si } 2\le x \end{cases}$$



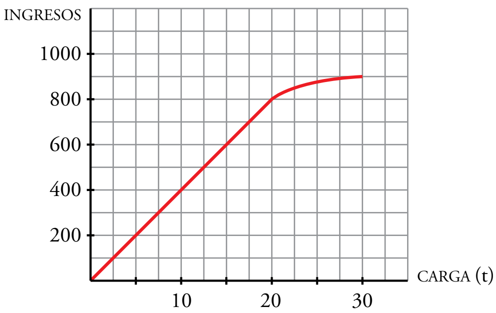
61 **Las tarifas de una empresa de transporte son:**

- **40 euros por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 *t*.**
- **Si la carga es mayor que 20 *t*, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.**

a) Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 *t*).

b) Obtén la expresión analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0\le x\le 20 \\ [40-(x-20)]\,x & \text{si } 20<x\le 30 \end{cases}$. Es decir: $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0\le x\le 20 \\ 60x-x^2 & \text{si } 20<x\le 30 \end{cases}$

62 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

a) $\dfrac{x+3}{x-2}\ge 0$: $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow x>2$; $\begin{cases} x+3\le 0 \\ x-2<0 \end{cases} \Rightarrow x\le -3$ Dominio $= (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

b) $\dfrac{x-9}{x}\ge 0$: $\begin{cases} x-9\ge 0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x\ge 9$; $\begin{cases} x-9\le 0 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow x<0$ Dominio $= (-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

63 **¿Cuántas soluciones tienen estas ecuaciones?**

a) $e^x = 4 - x^2$ **b)** $\ln x = \frac{1}{x}$

Busca, por tanteo, una solución en cada caso.

a) Si representamos gráficamente las funciones $y = e^x$ e $y = 4 - x^2$, observamos que se cortan en dos puntos. Las abscisas de estos puntos son las soluciones de la ecuación dada. Vemos que uno de ellos está muy cerca de $x = 1$.

$e^1 = e \approx 2{,}72$

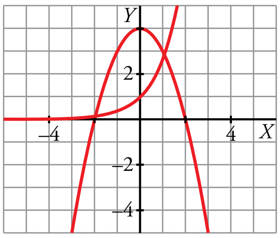
$4 - 1^2 = 3$

Probemos ahora en $x = 1{,}1$

$e^{1{,}1} \approx 3$

$4 - 1{,}1^2 = 2{,}79$

Una solución aproximada, a la vista de los resultados anteriores, es $x = 1{,}05$



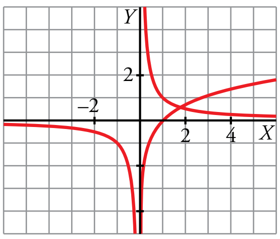
b) Si representamos gráficamente las funciones $y = \ln x$ e $y = \frac{1}{x}$, observamos que se cortan en un punto. Su abscisa es la solución de la ecuación dada.

Si tomamos $x = 1{,}75$, obtenemos:

$\ln 1{,}75 = 0{,}56$

$\frac{1}{1{,}75} = 0{,}57$

Por tanto, una solución aproximada es $x = 1{,}75$.



Autoevaluación

Página 271

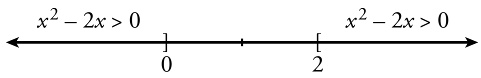
1 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $y = \dfrac{2}{x^3 - x^2}$

a) La función está definida por los valores de x tales que $x^2 - 2x \geq 0$.

Resolvemos la inecuación:



$Dom = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) Los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la función.

$x^3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

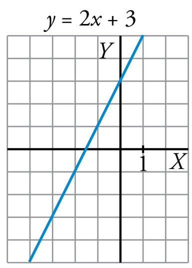
$Dom = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

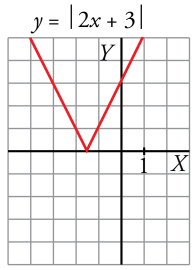
2 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = |2x + 3|$

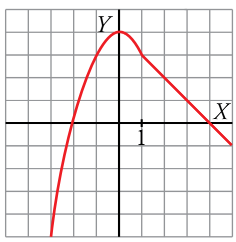
b) $y = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) La recta $y = 2x + 3$ corta al eje X en $x = -\dfrac{3}{2}$. Para valores menores que $-\dfrac{3}{2}$, cambiamos el signo de la ordenada. Por ejemplo: $(-2, -1) \rightarrow (-2, 1)$.



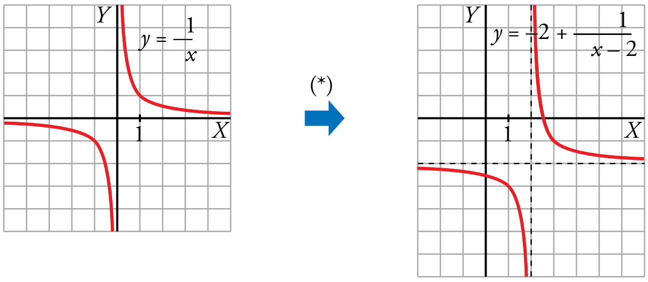


b) Para valores menores que 1, la gráfica es una parábola de vértice (0, 4). Para valores mayores que 1, es una recta.



3 **Representa $y = \dfrac{1}{x}$. A partir de ella, dibuja la gráfica de $y = \dfrac{-2x+5}{x-2}$.**

$$\begin{array}{r|l} -2x + 5 & x - 2 \\ \cline{2-2} 2x - 4 & -2 \\ 1 & \end{array} \quad \to \quad \frac{-2x+5}{x-2} = -2 + \frac{1}{x-2}$$



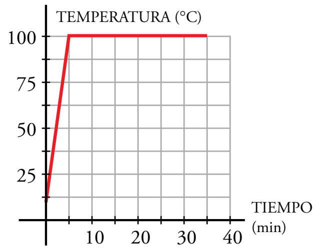
(*) La gráfica de $y = \dfrac{-2x+5}{x-2}$ es como la de $y = \dfrac{1}{x}$ trasladada 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

4 **Ponemos al fuego un cazo con agua a 10 °C. En 5 minutos alcanza 100 °C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente.**

a) Representa la función que describe este fenómeno y halla su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

a)



- La gráfica pasa por los puntos (0, 10) y (5, 100).
- Hallamos la ecuación de esta recta:

  Pendiente: $\dfrac{100-10}{5-0} = 18 \to y = 18(x-0) + 10$
- Para valores de x mayores que 5, la temperatura se mantiene constante $\to y = 100$

Expresión analítica: $f(x) = \begin{cases} 18x + 10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 100 & \text{si } 5 \le x \le 35 \end{cases}$

b) Dominio: $f(x)$ está definida para valores de x entre 0 y 35, ambos incluidos.

Por tanto, $Dom\, f = [0, 35]$.

Recorrido de $f = [10, 100]$.

5 **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

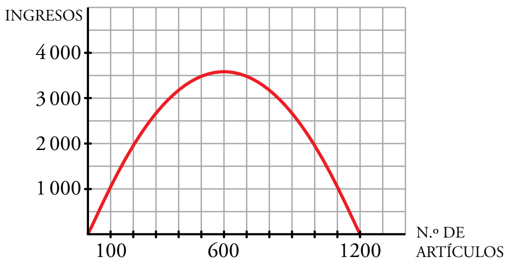
b) Representa la función *número de artículos-ingresos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7$ cientos de euros $\to$ Ingresos $= 500 \cdot 700 = 350\,000$ €

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Hallamos el vértice de la parábola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ artículos} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

Deben fabricar 600 artículos para obtener unos ingresos máximos (360 000 euros).

6 Depositamos en un banco 2000 € al 6% anual.

a) Escribe la función que nos dice cómo evoluciona el capital a lo largo del tiempo. ¿Qué tipo de función es? Represéntala.

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital?

a) Al cabo de un año el capital se convertirá en:

$$2\,000 + 2\,000 \cdot \frac{6}{100} = 2\,000\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 2\,000 \cdot 1{,}06$$

Al final del segundo año, el capital será $2\,000 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 2\,000 \cdot 1{,}06^2$

Luego la función que da el capital al cabo de t años es:

$C(t) = 2\,000 \cdot 1{,}06^t$

b) Tenemos que calcular el tiempo, t, necesario para que:

$$4\,000 = 2\,000 \cdot 1{,}06^t \rightarrow 1{,}06^t = 2 \rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}06} = 11{,}9$$

Deberán pasar 12 años para que el capital se haya duplicado.

7 Dadas $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, halla:

a) $f[g(2)]$ b) $g[f(15)]$ c) $f \circ g$ d) $g^{-1}(x)$

a) $f[g(2)] = f\left(\dfrac{1}{2-3}\right) = f(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$

b) $g[f(15)] = g(\sqrt{15+1}) = g(4) = \dfrac{1}{4-3} = 1$

c) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3} + 1} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

d) $x = \dfrac{1}{y-3} \rightarrow xy - 3x = 1 \rightarrow y = \dfrac{1+3x}{x}$

$g^{-1}(x) = \dfrac{1+3x}{x}$