14 CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Página 351

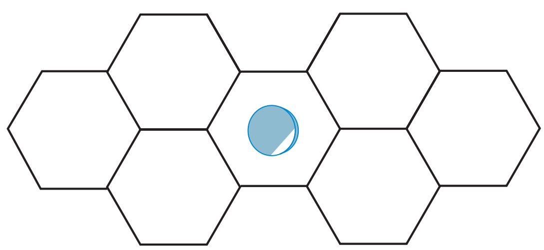
PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

- **Calcula matemáticamente cuál es la probabilidad de que "no toque raya" en la cuadrícula de 3 cm × 3 cm una moneda de 1 cm de diámetro.**

- **¿De qué tamaño debe ser un disco para que la probabilidad de que "no toque raya" en una cuadrícula de 4 cm × 4 cm sea de 0,2?**

- **En una cuadrícula de 4 cm × 4 cm dejamos caer 5 000 veces una moneda y contabilizamos que "no toca raya" en 1 341. Estima cuál es el diámetro de la moneda.**

- **Sobre un suelo de losetas hexagonales de 12 cm de lado se deja caer un disco de 10 cm de diámetro. ¿Cuál es la probabilidad de que "no toque raya"?**



- Área del cuadrado grande = $3^2 = 9$ cm^2

  Área del cuadrado pequeño = $(3 - 1)^2 = 4$ cm^2

$$P = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$$

- Área del cuadrado grande = $4^2 = 16$ cm^2

  Área del cuadrado pequeño = $(4 - d)^2$

$$P = \frac{(4-d)^2}{16} = 0{,}2 \;\rightarrow\; (4-d)^2 = 3{,}2 \;\rightarrow\; 4 - d = \pm 1{,}8$$

$$4 - d = 1{,}8 \;\rightarrow\; d = 2{,}2 \text{ cm}$$

$$4 - d = -1{,}8 \;\rightarrow\; d = 5{,}8 \text{ cm} \;\rightarrow\; \text{No vale}$$

  Ha de tener un diámetro de 2,2 cm.

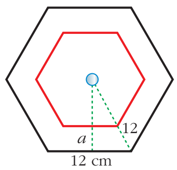
■ Área del cuadrado grande = $4^2 = 16$ cm^2

Área del cuadrado pequeño = $(4 - d)^2$

$$P = \frac{1\,341}{5\,000} = 0{,}2682 = \frac{(4 - d)^2}{16}$$

$$(4 - d)^2 = 4{,}2912 \;\rightarrow\; d = 1{,}93 \text{ cm}$$

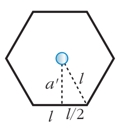
■ Área del hexágono grande = $\dfrac{72 \cdot 10{,}4}{2} = 374{,}4$ cm^2



Perímetro = 72 cm

$a = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10{,}4$ cm

Área del hexágono pequeño = $\dfrac{37{,}44 \cdot 5{,}4}{2} = 101{,}088$ cm^2



$a' = a - r = 10{,}4 - 5 = 5{,}4$ cm

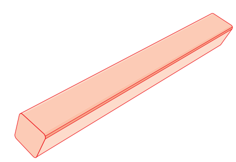
$l^2 - \dfrac{l^2}{4} = (a')^2; \;\; \dfrac{3l^2}{4} = 29{,}16 \;\rightarrow\; l = 6{,}24 \text{ cm} \;\rightarrow\;$ Perímetro = 37,44 cm

$$P = \frac{101{,}088}{374{,}4} = 0{,}27$$

Página 352

1. Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras alargadas de una regleta.

Dejamos caer la regleta y anotamos el número de la cara superior.



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe un suceso elemental y tres no elementales.

c) ¿Cuántos sucesos tiene esta experiencia?

a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$

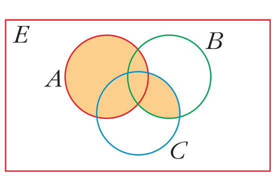
b) Elementales $\rightarrow$ {1}, {2}, {3}, {4}

No elementales $\rightarrow$ {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}, {Ø}

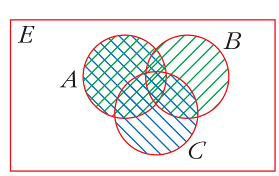
c) $2^4 = 16$ sucesos

Página 353

1. Justifica gráficamente las siguientes igualdades: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

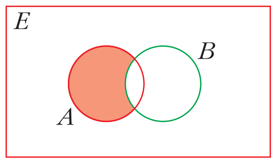


$A \cup (B \cap C)$

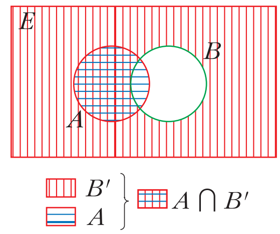


$\left.\begin{array}{l} A \cup B \\ A \cup C \end{array}\right\}$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. **Justifica gráficamente la siguiente igualdad: $A - B = A \cap B'$**



$A - B$



Página 357

1. **Lanzamos un dado "chapucero" 1 000 veces. Obtenemos $f(1) = 117$, $f(2) = 302$, $f(3) = 38$, $f(4) = 234$, $f(5) = 196$, $f(6) = 113$. Estima las probabilidades de las distintas caras. ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos PAR, MENOR QUE 6, {1, 2}?**

$P[1] = \frac{117}{1\,000} = 0{,}117$ $\quad P[2] = 0{,}302$ $\quad P[3] = 0{,}038$

$P[4] = 0{,}234$ $\quad P[5] = 0{,}196$ $\quad P[6] = 0{,}113$

$P[\text{PAR}] = 0{,}302 + 0{,}234 + 0{,}113 = 0{,}649$

$P[\text{MENOR QUE } 6] = 1 - P[6] = 1 - 0{,}113 = 0{,}887$

$P[\{1, 2\}] = 0{,}117 + 0{,}302 = 0{,}419$

2. **¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos?**

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

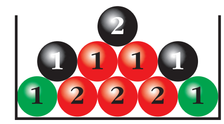
3. **¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus puntuaciones sea 2?**

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$P = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Página 359

1. **Observa las bolas que hay en la urna.**



a) Completa el cuadro de doble entrada en el que se reparten las bolas según el color (V, R, N) y el número (1, 2).

	V	R	N	
1		2		
2		3		
		2		

b) Calcula la probabilidad de ROJO, NEGRO, VERDE, 1 y 2, sin más que observar la composición de la urna.

c) Comprueba que las probabilidades obtenidas en b) se pueden obtener sumando filas o columnas del cuadro formado en a).

d) Calcula las probabilidades condicionadas: P[1/ROJO], P[1/VERDE], P[1/NEGRO], P[2/ROJO], P[2/VERDE], P[2/NEGRO].

e) Di si alguno de los caracteres ROJO, NEGRO, VERDE es independiente de 1 o de 2.

a)

	V	R	N	
1	2	2	2	6
2	0	3	1	4
	2	5	3	10

b) y c) $P[\text{R}] = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ $\qquad P[1] = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

$P[\text{N}] = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$ $\qquad P[2] = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

$P[\text{V}] = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

d) $P[1/\text{R}] = \dfrac{2}{5}$; $P[1/\text{V}] = 1$; $P[1/\text{N}] = \dfrac{2}{3}$

$P[2/\text{R}] = \dfrac{3}{5}$; $P[2/\text{V}] = 0$; $P[2/\text{N}] = \dfrac{1}{3}$

e) No son independientes.

Página 360

1. **Calcula la probabilidad de obtener tres CUATROS al lanzar tres dados.**

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0{,}0046$$

2. **Calcula la probabilidad de NINGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (Cuatro veces NO SEIS).**

$$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}48$$

3. **Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (ALGÚN SEIS es el suceso contrario de NINGÚN SEIS).**

$1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$

4. **Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar seis dados.**

$$P[\text{NINGÚN } 6] = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}335$$

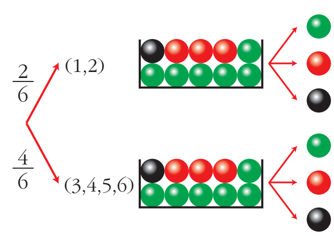
$P[\text{ALGÚN } 6] = 1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0{,}335 = 0{,}665$

Página 361

5. **Tenemos un dado y las dos urnas descritas. Lanzamos el dado. Si sale 1 ó 2, acudimos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 ó 6, acudimos a la urna II.**

Extraemos una bola de la urna correspondiente.

a) Completa las probabilidades en el diagrama en árbol.



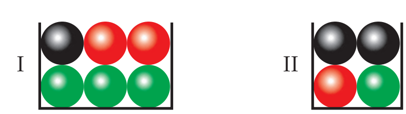
b) Halla: *P*[{3, 4, 5, 6} y ], *P*[/1], *P*[/5] y *P*[2 y ].

a) Ver el ejemplo en la propia página 343.

b) $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{60}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{10}$ y $\frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{12}{60} = \frac{2}{10}$

Página 363

1. **Tenemos dos urnas. La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II.**

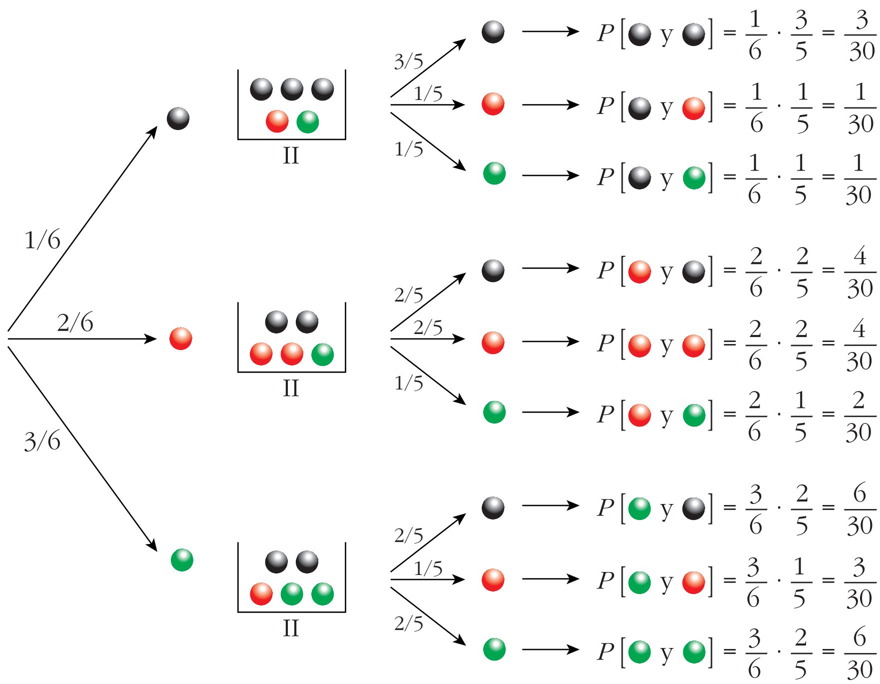


Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) roja

b) verde

c) negra



a) $P[2^{\text{a}}\ ] = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

b) $P[2^{\text{a}}\ ] = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

c) $P[2^{\text{a}}\ ] = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{13}{30}$

Página 365

1. En el ejercicio propuesto del apartado anterior, calcula:

a) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera? *P*[1ª /2ª]

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido negra? *P*[1ª /2ª]

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera verde siendo verde la segunda? *P*[1ª /2ª]

a) $P[1^{\text{a}}\ /2^{\text{a}}\ ] = \frac{P[\ \ \text{y}\ \ ]}{P[2^{\text{a}}\ \ ]} = \frac{3/30}{13/30} = \frac{3}{13}$

b) $P[1^{\text{a}}\ /2^{\text{a}}\ ] = \frac{P[\ \ \text{y}\ \ ]}{P[2^{\text{a}}\ \ ]} = \frac{1/30}{8/30} = \frac{1}{8}$

c) $P[1^{\text{a}}\ /2^{\text{a}}\ ] = \frac{P[\ \ \text{y}\ \ ]}{P[2^{\text{a}}\ \ ]} = \frac{6/30}{9/30} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Página 368

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Lanzamos un dado y una moneda. Los posibles resultados son (1, C), (1, +), (2, C)…**

a) Describe el espacio muestral con los doce elementos de los que consta.

Sean los sucesos:

A = "Sacar uno o dos en el dado"

B = "sacar + en la moneda"

D = {(1, C), (2, +), (3, C), (3, +), (6, +)}

b) Describe los sucesos A y B mediante todos los elementos.

c) Halla $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup D'$

a) E = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, C), (3, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C), (6, +)}

b) A = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +)}

B = {(1, +), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)}

c) $A \cup B$ = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)}

$A \cap B$ = {(1, +), (2, +)}

D' = {(1, +), (2, C), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)}

$A \cup D'$ = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)}

2 **Sea $U = \{a_1, a_2, a_3\}$ el espacio de sucesos elementales de un experimento aleatorio. ¿Cuáles de estas funciones definen una función de probabilidad? Justifica la respuesta.**

a) $P[a_1] = 1/2$

$P[a_2] = 1/3$

$P[a_3] = 1/6$

b) $P[a_1] = 3/4$

$P[a_2] = 1/4$

$P[a_3] = 1/4$

c) $P[a_1] = 1/2$

$P[a_2] = 0$

$P[a_3] = 1/2$

d) $P[a_1] = 2/3$

$P[a_2] = 1/3$

$P[a_3] = 1/3$

a) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

Sí define una probabilidad, pues $P[a_1]$, $P[a_2]$ y $P[a_3]$ son números mayores o iguales que cero, y su suma es 1.

b) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1$

No define una probabilidad, pues la suma de los sucesos elementales no puede ser mayor que 1.

c) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$

Sí define una probabilidad, pues $P[a_1]$, $P[a_2]$ y $P[a_3]$ son números mayores o iguales que cero, y su suma es 1.

d) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1$

No define una probabilidad, pues la suma de los sucesos elementales no puede ser mayor que 1.

3 **Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B:**

$$P[A] = 1/4, \quad P[B] = 1/2, \quad P[A \cup B] = 2/3$$

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P[A \cap B] = 0$.

Como:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P[A \cap B] \Rightarrow P[A \cap B] = \frac{1}{12} \neq 0$$

los sucesos A y B son incompatibles.

4 **Para ganar una mano de cartas debemos conseguir o bien AS o bien OROS. ¿Qué probabilidad tenemos de ganar?**

$$P[\text{As} \cup \text{Oros}] = P[\text{As}] + P[\text{Oros}] - P[\text{As} \cap \text{Oros}] = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

5 **En familias de tres hijos, se estudia la distribución de sus sexos. Por ejemplo (V, M, M) significa que el mayor es varón y los otros dos mujeres. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral E?**

Describe los siguientes sucesos: A = "La menor es mujer", B = "El mayor es varón". ¿En qué consiste $A \cup B$?

E tiene $2^3 = 8$ elementos.

A = {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M)}

B = {(V, V, V), (V, V, M), (V, M, V), (V, M, M)}

$A \cup B$ = "O bien la menor es mujer, o bien el mayor es varón" =

= {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M), (V, V, V), (V, M, V)}

6 **Se lanzan dos dados. Calcula la probabilidad de que la mayor de las puntuaciones sea un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6.**

☛ ***Completa esta tabla y razona sobre ella.***

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	**4**	5	6
2	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
3	3	3	3	**4**	5	6
4	4	4	4	**4**	5	6
5	5	5	5	**5**	5	6
6	6	6	6	**6**	6	6

En la tabla vamos anotando la mayor puntuación obtenida. Así:

P[La mayor de las puntuaciones sea un 1] $= \dfrac{1}{36}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 2] $= \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 3] $= \dfrac{5}{36}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 4] $= \dfrac{7}{36}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 5] $= \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 6] $= \dfrac{11}{36}$

7 **Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:**

a) Alumna o que aprueba las matemáticas.

b) Alumno que suspenda las matemáticas.

c) Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?

d) ¿Son independientes los sucesos ALUMNO y APRUEBA MATEMÁTICAS?

☛ ***Haz una tabla de contingencia.***

Hacemos la tabla de contingencia:

	ALUMNOS	ALUMNAS	
APRUEBAN MAT.	10	5	15
SUSPENDEN MAT.	10	5	15
	20	10	30

a) $P[\text{alumna} \cup \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumna}] + P[\text{aprueba mat.}] -$

$$- P[\text{alumna} \cap \text{aprueba mat.}] =$$

$$= \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

b) $P[\text{alumno} \cap \text{suspende mat.}] = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

c) $P[\text{aprueba mat./alumno}] = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

d) Hay que ver si:

$$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumno}] \cdot P[\text{aprueba mat.}]$$

Calculamos cada una:

$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} P[\text{alumno}] = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3} \\[2ex] P[\text{aprueba mat.}] = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} P[\text{alumno}] \cdot P[\text{aprueba mat.}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Por tanto, sí son independientes.

8 **Se elige al azar un número entre el 1 000 y el 5 000, ambos incluidos.**

Calcula la probabilidad de que sea capicúa (se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda). Razona la respuesta.

— Entre 1 000 y 5 000 hay $4 \cdot 10 = 40$ números capicúas (pues la primera cifra puede ser 1, 2, 3 ó 4; la segunda, cualquier número del 0 al 9; la tercera es igual que la segunda; y la cuarta, igual que la primera).

— Entre 1 000 y 5 000 hay 4 001 números en total. Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{40}{4\,001} \approx 0{,}009997$$

9 **Di cuál es el espacio muestral correspondiente a las siguientes experiencias aleatorias. Si es finito y tiene pocos elementos, dilos todos, y si tiene muchos, descríbelo y di el número total.**

a) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el número.

b) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el palo.

c) Extraemos dos cartas de una baraja española y anotamos el palo de cada una.

d) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el resultado.

e) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el número de caras.

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$

b) E = {OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS}

c) Llamamos: O = OROS; C = COPAS; E = ESPADAS; B = BASTOS.

Entonces:

$E = \{(O, O), (O, C), (O, E), (O, B), (C, O), (C, C), (C, E), (C, B), (E, O), (E, C), (E, E), (E, B), (B, O), (B, C), (B, E), (B, B)\}$

d) E tiene $2^6 = 64$ sucesos elementales. Cada suceso elemental está compuesto por seis resultados que pueden ser cara o cruz:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

x_i puede ser cara o cruz. Por ejemplo:

(C, +, C, C, +, C) es uno de los 64 elementos de E.

e) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Página 369

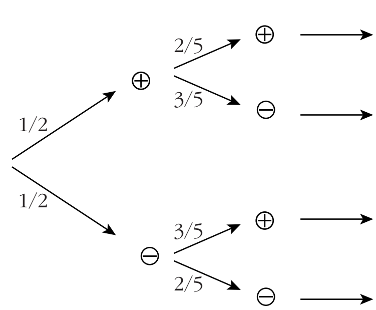
PARA RESOLVER

10 **En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra, sin reemplazamiento.**

a) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.

b) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

Hacemos un diagrama en árbol:



$$P[\oplus\oplus] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$$

$$P[\oplus\ominus] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P[\ominus\oplus] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P[\ominus\ominus] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$$

a) $P[\oplus\oplus] + P[-\,-] = \dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{10} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

b) $P[\oplus\,-] + P[-\,\oplus] = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$

11 **En cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños.**

Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?

b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

☛ ***Usa una tabla como la siguiente:***

	OJOS CAST.	OJOS NO CAST.	
CAB. CAST.	15		40
CAB. NO CAST.			
	25		100

Hacemos la tabla:

	OJOS CAST.	OJOS NO CAST.	
CAB. CAST.	15	25	40
CAB. NO CAST.	10	50	60
	25	75	100

a) $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

b) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

c) $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

12 **De los sucesos A y B se sabe que:**

$$P[A] = \frac{2}{5},\ P[B] = \frac{1}{3} \text{ y } P[A' \cap B'] = \frac{1}{3}.$$

Halla $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

- $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$

$$\frac{1}{3} = 1 - P[A \cup B] \rightarrow P[A \cup B] = \frac{2}{3}$$

- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P[A \cap B]$$

$$P[A \cap B] = \frac{1}{15}$$

13 **Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que:**

$$P[A] = 0{,}4, \quad P[B] = 0{,}3 \text{ y } P[A \cap B] = 0{,}1$$

Calcula razonadamente:

1) $P[A \cup B]$ **2) $P[A' \cup B']$**

3) $P[A/B]$ **4) $P[A' \cap B']$**

1) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$

2) $P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

3) $P[A/B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

4) $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

14 **A, B y C son tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresa en función de ellos los sucesos:**

a) Se realiza alguno de los tres.

b) No se realiza ninguno de los tres.

c) Se realizan los tres.

d) Se realizan dos de los tres.

e) Se realizan, al menos, dos de los tres.

a) $A \cup B \cup C$

b) $A' \cap B' \cap C'$

c) $A \cap B \cap C$

d) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$

e) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

15 **Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un valor mayor que en la primera.**

En total hay 36 posibles resultados. De estos, en 6 casos los dos números son iguales; y, en los otros 30, bien el primero es mayor que el segundo, o bien el segundo es mayor que el primero (con la misma probabilidad).

Luego, hay 15 casos en los que el resultado de la segunda tirada es mayor que el de la primera.

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(NOTA: también se puede resolver el problema haciendo una tabla como la del ejercicio número 6 y contar los casos).

16 **Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide:**

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.

b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.

c) ¿Son las pruebas sucesos independientes?

d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

Tenemos que:

$$P[\text{pase } 1^{\underline{a}}] = 0{,}6; \quad P[\text{pase } 2^{\underline{a}}] = 0{,}8; \quad P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cap \text{pase } 2^{\underline{a}}] = 0{,}5$$

a) $P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cup \text{pase } 2^{\underline{a}}] = P[\text{pase } 1^{\underline{a}}] + P[\text{pase } 2^{\underline{a}}] - P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cap \text{pase } 2^{\underline{a}}] =$

$$= 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}9$$

b) $1 - P[\text{pase al menos una}] = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

c) $P[\text{pase } 1^{\underline{a}}] \cdot P[\text{pase } 2^{\underline{a}}] = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

$P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cap \text{pase } 2^{\underline{a}}] = 0{,}5 \neq 0{,}48$

No son independientes.

d) $$P[\text{pase } 2^{\underline{a}}/\text{no pase } 1^{\underline{a}}] = \frac{P[\text{pase } 2^{\underline{a}} \cap \text{no pase } 1^{\underline{a}}]}{P[\text{no pase } 1^{\underline{a}}]} =$$

$$= \frac{P[\text{pase } 2^{\underline{a}}] - P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cap \text{pase } 2^{\underline{a}}]}{P[\text{no pase } 1^{\underline{a}}]} =$$

$$= \frac{0{,}8 - 0{,}5}{1 - 0{,}6} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

17 **En una comarca hay dos periódicos: *El Progresista* y *El Liberal*. Se sabe que el 55% de las personas de esa comarca lee *El Progresista* (*P*), el 40% lee *El Liberal* (*L*) y el 25% no lee ninguno de ellos.**

Expresa en función de P y L estos sucesos:

a) Leer los dos periódicos.

b) Leer solo *El Liberal*.

c) Leer solo *El Progresista*.

d) Leer alguno de los dos periódicos.

e) No leer ninguno de los dos.

f) Leer solo uno de los dos.

g) Calcula las probabilidades de: P, L, $P \cap L$, $P \cup L$, $P - L$, $L - P$, $(L \cup P)'$, $(L \cap P)'$.

h) Sabemos que una persona lee *El Progresista*. ¿Qué probabilidad hay de que, además, lea *El Liberal*? ¿Y de que no lo lea?

Tenemos que:

$$P[P] = 0{,}55; \quad P[L] = 0{,}4; \quad P[P' \cap L'] = 0{,}25$$

a) $P[P' \cap L'] = P[(P \cup L)'] = 1 - P[P \cup L]$

$0{,}25 = 1 - P[P \cup L] \;\rightarrow\; P[P \cup L] = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P[P \cup L] = P[P] + P[L] - P[P \cap L]$

$0{,}75 = 0{,}55 + 0{,}4 - P[P \cap L] \;\rightarrow\; P[P \cap L] = 0{,}2$

$P[\text{leer los dos}] = P[P \cap L] = 0{,}2$

b) $P[L] - P[P \cap L] = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

c) $P[P] - P[P \cap L] = 0{,}55 - 0{,}2 = 0{,}35$

d) $P[P \cup L] = 0{,}75$

e) $P[P' \cap L'] = 0{,}25$

f) $P[P \cap L'] + P[P' \cap L] = 0{,}35 + 0{,}2 = 0{,}55$

g) $P[P] = 0{,}55; \quad P[L] = 0{,}4; \quad P[P \cap L] = 0{,}2; \quad P[P \cup L] = 0{,}75$

$P[P - L] = P[P] - P[P \cap L] = 0{,}35$

$P[L - P] = P[L] - P[P \cap L] = 0{,}2$

$P[(L \cup P)'] = P[L' \cap P'] = 0{,}25$

$P[(L \cap P)'] = 1 - P[L \cap P] = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

h) $P[L/P] = \dfrac{P[L \cap P]}{P[P]} = \dfrac{0{,}2}{0{,}55} = \dfrac{20}{55} = \dfrac{4}{11} \approx 0{,}36$

$P[L'/P] = \dfrac{P[L' \cap P]}{P[P]} = \dfrac{0{,}35}{0{,}55} = \dfrac{35}{55} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64$

$\left(\text{o bien: } P[L'/P] = 1 - P[L/P] = 1 - \dfrac{4}{11} = \dfrac{7}{11}\right)$

18 **Una urna *A* tiene 3 bolas blancas y 7 negras. Otra urna *B* tiene 9 bolas blancas y 1 negra. Escogemos una de las urnas al azar y de ella extraemos una bola.**

Calcula:

a) *P*[BLANCA/*A*]

b) *P*[BLANCA/*B*]

c) *P*[*A* y BLANCA]

d) *P*[*B* y BLANCA]

e) *P*[BLANCA]

f) Sabiendo que la bola obtenida ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de haber escogido la urna *B*?

a) $P[\text{BLANCA}/A] = \frac{3}{10} = 0{,}3$

b) $P[\text{BLANCA}/B] = \frac{9}{10} = 0{,}9$

c) $P[A \text{ y BLANCA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20} = 0{,}15$

d) $P[B \text{ y BLANCA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{20} = 0{,}45$

e) $P[\text{BLANCA}] = P[A \text{ y Blanca}] + P[B \text{ y Blanca}] = \frac{3}{20} + \frac{9}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

f) $P[B/\text{BLANCA}] = \frac{P[B \text{ y Blanca}]}{P[\text{Blanca}]} = \frac{9/20}{12/20} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Página 370

19 **Tenemos las mismas urnas del ejercicio anterior. Sacamos una bola de *A* y la echamos en *B* y, a continuación, sacamos una bola de *B*.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea negra?

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que también la primera fuese negra?

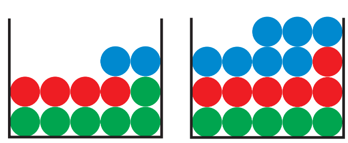
a) $P[2^{\underline{a}} \text{ NEGRA}] = P[1^{\underline{a}} \text{ BLANCA y } 2^{\underline{a}} \text{ NEGRA}] + P[1^{\underline{a}} \text{ NEGRA y } 2^{\underline{a}} \text{ NEGRA}] =$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{11} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3}{110} + \frac{14}{110} = \frac{17}{110}$$

b) $P[1^{\underline{a}} \text{ NEGRA}/2^{\underline{a}} \text{ NEGRA}] = \frac{P[1^{\underline{a}} \text{ NEGRA y } 2^{\underline{a}} \text{ NEGRA}]}{P[2^{\underline{a}} \text{ NEGRA}]} = \frac{7/10 \cdot 2/11}{17/110} =$

$$= \frac{14/110}{17/110} = \frac{14}{17}$$

20 **Tenemos dos urnas con estas composiciones:**



Extraemos una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? ¿Y la probabilidad de que sean de distinto color?

$P[\text{mismo color}] = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{18} + \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{18} + \frac{2}{12} \cdot \frac{7}{18} = \frac{30}{216} + \frac{24}{216} + \frac{14}{216} = \frac{68}{216} = \frac{17}{54}$

$P[\text{distinto color}] = 1 - P[\text{mismo color}] = 1 - \frac{17}{54} = \frac{37}{54}$

21 **Un avión tiene cinco bombas. Se desea destruir un puente. La probabilidad de destruirlo de un bombazo es 1/5. ¿Cuál es la probabilidad de que se destruya el puente si se lanzan las cinco bombas?**

$P[\text{no dé ninguna de las 5 bombas}] = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 0{,}8^5 = 0{,}32768$

$P[\text{dé alguna de las 5}] = 1 - 0{,}8^5 = 0{,}67232$

22 **Simultáneamente, se sacan dos cartas de una baraja española y se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que las cartas sean sotas y el número del dado sea par?**

$P[1^{\underline{a}} \text{ SOTA y } 2^{\underline{a}} \text{ SOTA y PAR en el dado}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{1}{2} = \frac{12}{3\,120} = \frac{1}{260}$

23 **En un cajón de un armario, Juan guarda desordenadamente 3 pares de calcetines blancos y cuatro pares de calcetinos rojos; otro cajón contiene 4 corbatas blancas, 3 rojas y 2 azules. Para vestirse saca al azar del primer cajón un par de calcetines, y del segundo, una corbata.**

Halla la probabilidad de que los calcetines y la corbata sean del mismo color.

$$P[\text{BLANCO y BLANCA}] + P[\text{ROJO y ROJA}] = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{9} = \frac{24}{63} = \frac{8}{21}$$

24 **Un producto está formado de dos partes: *A* y *B*. El proceso de fabricación es tal, que la probabilidad de un defecto en *A* es 0,06 y la probabilidad de un defecto en *B* es 0,07. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?**

$$P[\text{ningún defecto}] = P[\text{no defecto en } A] \cdot P[\text{no defecto en } B] =$$

$$= (1 - 0{,}06) \cdot (1 - 0{,}07) = 0{,}94 \cdot 0{,}93 = 0{,}8742$$

25 **Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja?**

$$P[BBR] + P[BRB] + P[RBB] = 3 \cdot P[BBR] = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{4}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

26 **Una urna *A* contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra urna *B* tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser blancas.**

Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la *A*.

Hacemos un diagrama en árbol:

$$\xrightarrow{1/2} A \; \boxed{6b\ 4n} \xrightarrow{\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}} 2b \longrightarrow P[A \text{ y } 2b] = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{1/2} B \; \boxed{5b\ 9n} \xrightarrow{\frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13}} 2b \longrightarrow P[B \text{ y } 2b] = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{5}{91}$$

$$P[2b] = \frac{1}{6} + \frac{5}{91} = \frac{121}{546}$$

La probabilidad pedida será:

$$P[A/2b] = \frac{P[A \text{ y } 2b]}{P[2b]} = \frac{1/6}{121/546} = \frac{91}{121} = 0{,}752$$

27 **Sean A y B dos sucesos tales que: $P[A \cup B] = \frac{3}{4}$; $P[B'] = \frac{2}{3}$; $P[A \cap B] = \frac{1}{4}$. Halla $P[B]$, $P[A]$, $P[A' \cap B]$.**

$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$\frac{3}{4} = P[A] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \rightarrow P[A] = \frac{2}{3}$

$P[A' \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

28 **En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas.**

¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

$\xrightarrow{0{,}12}$ ENFERMO $\xrightarrow{0{,}9}$ POSITIVO $\longrightarrow P[\text{ENF. y POSITIVO}] = 0{,}12 \cdot 0{,}9 = 0{,}108$

$\xrightarrow{0{,}88}$ NO ENFERMO $\xrightarrow{0{,}05}$ POSITIVO $\longrightarrow P[\text{NO ENF. y POSITIVO}] = 0{,}88 \cdot 0{,}05 = 0{,}044$

$$P[\text{POSITIVO}] = 0{,}108 + 0{,}044 = 0{,}152$$

La probabilidad pedida será:

$$P[\text{NO ENF./POSITIVO}] = \frac{P[\text{NO ENF. Y POSITIVO}]}{P[\text{POSITIVO}]} = \frac{0{,}044}{0{,}152} = 0{,}289$$

29 **En tres máquinas, A, B y C, se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es, respectivamente, 1%, 2% y 3%.**

Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina, y se elige una pieza al azar, que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina A?

$\xrightarrow{1/3}$ A $\xrightarrow{1/100}$ DEFECTUOSA $\longrightarrow P[A \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{300}$

$\xrightarrow{1/3}$ B $\xrightarrow{2/100}$ DEFECTUOSA $\longrightarrow P[B \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{100} = \frac{2}{300}$

$\xrightarrow{1/3}$ C $\xrightarrow{3/100}$ DEFECTUOSA $\longrightarrow P[C \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} = \frac{3}{300}$

$$P[\text{DEF.}] = \frac{1}{300} + \frac{2}{300} + \frac{3}{300} = \frac{6}{300}$$

La probabilidad pedida será:

$$P[A/\text{DEF.}] = \frac{P[A \text{ y DEF.}]}{P[\text{DEF.}]} = \frac{1/300}{6/300} = \frac{1}{6}$$

30 **Una caja *A* contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja *B* contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de *A* a *B* y después se extrae una bola de *B*, que resulta blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.**

$$A\,\boxed{2b\ 2r}\ \begin{cases} \xrightarrow{2/4} b \longrightarrow B\,\boxed{4b\ 2r} \xrightarrow{4/6} b; \quad P[1^{a}\text{ b y }2^{a}\text{ b}] = \frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6} = \frac{1}{3} \\ \xrightarrow{2/4} r \longrightarrow B\,\boxed{3b\ 3r} \xrightarrow{3/6} b; \quad P[1^{a}\text{ r y }2^{a}\text{ b}] = \frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$P[2^{a}\text{ b}] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[1^{a}\text{ b}/2^{a}\text{ b}] = \frac{P[1^{a}\text{ b y }2^{a}\text{ b}]}{P[2^{a}\text{ b}]} = \frac{1/3}{7/12} = \frac{4}{7}$$

31 **Una urna *A* contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna *B*, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser negras. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la *B*.**

$$\begin{cases} \xrightarrow{1/2} A\,\boxed{5b\ 3n} \xrightarrow{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}} 2n \longrightarrow P[A\text{ y }2n] = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{3}{56} \\ \xrightarrow{1/2} B\,\boxed{6b\ 4n} \xrightarrow{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}} 2n \longrightarrow P[B\text{ y }2n] = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{1}{15} \end{cases}$$

$$P[2n] = \frac{3}{56} + \frac{1}{15} = \frac{101}{840}$$

Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[B/2n] = \frac{P[B\text{ y }2n]}{P[2n]} = \frac{1/15}{101/840} = \frac{56}{101}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

32 **Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P[A] = 0{,}40$; $P[B/A] = 0{,}25$ y $P[B] = b$.**

Halla:

a) $P[A \cap B]$.

b) $P[A \cup B]$ si $b = 0{,}5$.

c) El menor valor posible de *b*.

d) El mayor valor posible de *b*.

a) $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = 0{,}40 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$

b) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}40 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}8$

c) El menor valor posible de b es $P[B] = P[A \cap B]$, es decir, 0,1.

d) El mayor valor posible de b es: $1 - (P[A] - P[A \cap B]) = 1 - (0{,}4 - 0{,}1) = 0{,}7$

Página 371

33 Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es p, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra? Razónalo.

Si $P[A \cap B] = p$, entonces:

$$P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - p$$

34 Razona la siguiente afirmación: Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es menor que 1/2, la suma de las probabilidades de ambos (por separado), no puede exceder de 3/2.

$$P[A] + P[B] = P[A \cup B] + P[A \cap B] < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

pues $P[A \cup B] \leq 1$ y $P[A \cap B] < \dfrac{1}{2}$.

35 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. ¿Es posible que p sea una probabilidad si: $P[A] = \dfrac{2}{5}$, $P[B] = \dfrac{1}{5}$ y $P[A' \cap B'] = \dfrac{3}{10}$?

$$P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B) = \frac{3}{10} \rightarrow P[A \cup B] = \frac{7}{10}$$

Por otra parte:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{7}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} - P[A \cap B] \rightarrow P[A \cap B] = \frac{-1}{10}$$

Es imposible, pues una probabilidad no puede ser negativa.

36 Sea A un suceso con $0 < P[A] < 1$.

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario A'?

b) Sea B otro suceso tal que $B \subset A$. ¿Serán A y B independientes?

c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y C' independientes?

Justifica las respuestas.

a) $P[A] = p \neq 0$; $P[A'] = 1 - p \neq 0$

$P[A] \cdot P[A'] = p(1 - p) \neq 0$

$P[A \cap A'] = P[\varnothing] = 0$

No son independientes, porque $P[A \cap A'] \neq P[A] \cdot P[A']$.

b) $P[A \cap B] = P[B]$

¿$P[A] \cdot P[B] = P[B]$? Esto solo sería cierto si:

- $P[A] = 1$, lo cual no ocurre, pues $P[A] < 1$.
- $P[B] = 0$. Por tanto, solo son independientes si $P[B] = 0$.

c) A independiente de $C \rightarrow P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C]$

$$P[A \cap C'] = P[A - (A \cap C)] = P[A] - P[A \cap C] =$$
$$= P[A] - P[A] \cdot P[C] = P[A]\,(1 - P[C]) = P[A] \cdot P[C']$$

Por tanto, A y C' son independientes.

37 Al tirar tres dados, podemos obtener suma 9 de seis formas distintas:

126, 135, 144, 225, 234, 333

y otras seis de obtener suma 10: 136, 145, 226, 235, 244, 334.

Sin embargo, la experiencia nos dice que es más fácil obtener suma 10 que suma 9. ¿Por qué?

1, 2, 6; 1, 3, 5; 2, 3, 4 $\rightarrow$ cada uno da lugar a 3! formas distintas. Es decir:

$$3 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18$$

1, 4, 4; 2, 2, 5 $\rightarrow$ cada uno da lugar a 3 formas distintas. Es decir: $2 \cdot 3 = 6$

$18 + 6 + 1 = 25$ formas distintas de obtener suma 9.

$$P[\text{suma } 9] = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216}$$

1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5 $\rightarrow 6 \cdot 3 = 18$ formas

2, 2, 6; 2, 4, 4; 3, 3, 4 $\rightarrow 3 \cdot 3 = 9$ formas

$18 + 9 = 27$ formas distintas de obtener suma 10.

$$P[\text{suma } 10] = \frac{27}{216}$$

Está claro, así, que $P[\text{suma } 10] > P[\text{suma } 9]$.

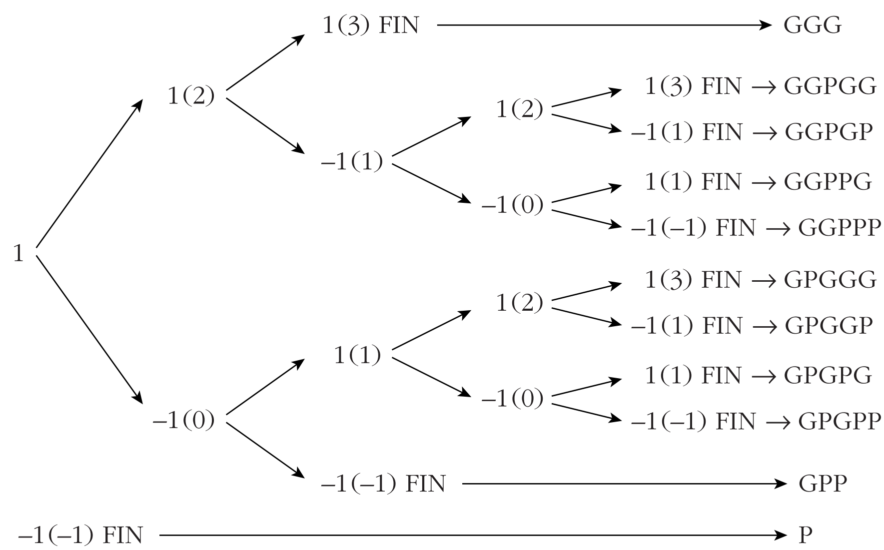
PARA PROFUNDIZAR

38 Un hombre tiene tiempo para jugar a la ruleta 5 veces, a lo sumo. Cada apuesta es de 1 euro. El hombre empieza con 1 euro y dejará de jugar cuando pierda el euro o gane 3 euros.

a) Halla el espacio muestral de los resultados posibles.

b) Si la probabilidad de ganar o perder es la misma en cada apuesta, ¿cuál es la probabilidad de que gane 3 euros?

a) Hacemos un esquema:



El espacio muestral sería:

E = {GGG, GGPGG, GGPGP, GGPPG, GGPPP, GPGGG, GPGGP, GPGPG, GPGPP, GPP, P}

donde G significa que gana esa partida y P que la pierde.

b) Por el esquema anterior, vemos que gana 3 euros con:

GGG $\rightarrow$ *probabilidad* $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

GGPGG $\rightarrow$ *probabilidad* $= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

GPGGG $\rightarrow$ *probabilidad* $= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

Por tanto:

$$P[\text{gane 3 euros}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

39 En una baraja de 40 cartas, se toman tres cartas distintas. Calcula la probabilidad de que las tres sean números distintos.

$$P[\text{3 números distintos}] = 1 \cdot P[2^{\underline{a}} \text{ dist. de la } 1^{\underline{a}}] \cdot P[3^{\underline{a}} \text{ dist. de la } 1^{\underline{a}} \text{ y de la } 2^{\underline{a}}] =$$

$$= 1 \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{32}{38} = \frac{192}{247}$$

40 **Escogidas cinco personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en el mismo día de la semana (es decir, en lunes, martes, etc.)?**

P[ninguna coincidencia] = 1 · P[2ª en distinto día que la 1ª] · …

… · P[5ª en distinto día que 1ª, 2ª, 3ª y 4ª] =

$$= 1 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{360}{2\,401} = 0{,}15$$

P[alguna coincidencia] = 1 – P[ninguna coincidencia] = 1 – 0,15 = 0,85

41 **Una moneda se arroja repetidamente hasta que sale dos veces consecutivas el mismo lado. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:**

a) El experimento consta exactamente de 4 lanzamientos.

b) El experimento consta exactamente de n lanzamientos, con $2 \le n \in \mathbb{N}$.

c) El experimento consta, como máximo, de 10 lanzamientos.

a) Consta de cuatro lanzamientos si ocurre:

C + C C o bien + C + +

Por tanto:

$$P[\text{cuatro lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

b) $P[n \text{ lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) P[10 o menos lanzamientos] = P[2 lanzamientos] + P[3 lanzamientos] +

$$+\ P[4 \text{ lanzamientos}] + \ldots + P[10 \text{ lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

Nos queda la suma de 9 términos de una progresión geométrica con:

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$P[10 \text{ o menos lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^9 =$$

$$= \frac{1/2 - (1/2)^9 \cdot 1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2\,[1 - (1/2)^9]}{1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 1 - \frac{1}{512} = \frac{511}{512} = 0{,}998$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

42 **A Eva la invitan a la fiesta que se va a celebrar en el Club de los Pijos el próximo sábado. Todavía no sabe si irá o no, pero hace indagaciones y averigua que, entre los pijos, la probabilidad de que uno de ellos sea DIVERTIDO es mayor si tiene melena que si está pelado:**

(1) PIJOS: P[DIVER./MELENA] > P[DIVER./PELADO]

Decide que, si va a la fiesta, ligará con un melenudo.

Estando en esas le llaman del Club de los Macarras para invitarle a una fiesta a la misma hora. Hace indagaciones y llega a conclusiones similares:

(2) MACARRAS: *P*[DIVER./MELENA] > *P*[DIVER./PELADO]

Todavía no sabe a cuál de las dos fiestas irá, pero tiene claro que, vaya a la que vaya, ligará con un melenudo.

Una hora antes de empezar las fiestas recibe una nueva llamada advirtiéndole de que Pijos y Macarras se han puesto de acuerdo y hacen una única fiesta. Revisando sus notas, Eva descubre con asombro que en el conjunto de todos ellos las cosas cambian radicalmente.

(3) PIJOS + MACARRAS: *P*[DIVERTIDO/MELENA] < *P*[DIVERTIDO/PELADO]

Por tanto, deberá cambiar su estrategia y ligar con un pelado.

¿Cómo es posible que sea así? Para explicarlo, inventa unos números para dos tablas como esta, una para PIJOS y otra para MACARRAS, de modo que en la primera se cumpla (1), en la segunda (2) y en la que resulta de sumar ambas se cumpla (3):

	MELENA	PELADO
DIVERTIDO		
ABURRIDO		

Empecemos poniendo un ejemplo numérico para entender mejor la situación. Supongamos que tenemos lo siguiente:

10 Pijos → 1 melenudo → 1 divertido (100%)
10 Pijos → 9 pelados → 8 divertidos (88,9%)
9 pelados → 1 no divertido

10 Macarras → 8 melenudos → 5 divertidos (62,5%)
8 melenudos → 3 no divertidos
10 Macarras → 2 pelados → 1 divertido (50%)
2 pelados → 1 no divertido

Al juntarlos a todos, tendríamos que:

20 Personas → 9 melenudos → 6 divertidos (66,7%)
9 melenudos → 3 no divertidos
20 Personas → 11 pelados → 9 divertidos (81,8%)
11 pelados → 2 no divertidos

Si observamos estos resultados, vemos que la clave está en que hay más divertidos entre este grupo de pijos que entre este grupo de macarras; y que hay muy pocos pijos melenudos.

Si hay un pijo melenudo que sea divertido, ya supone un porcentaje alto del total de pijos melenudos.