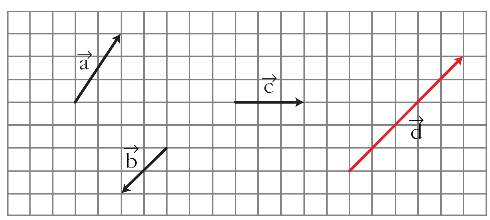
7 VECTORES

Página 172

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Multiplica vectores por números

- **Copia en un papel cuadriculado los siguientes vectores:**



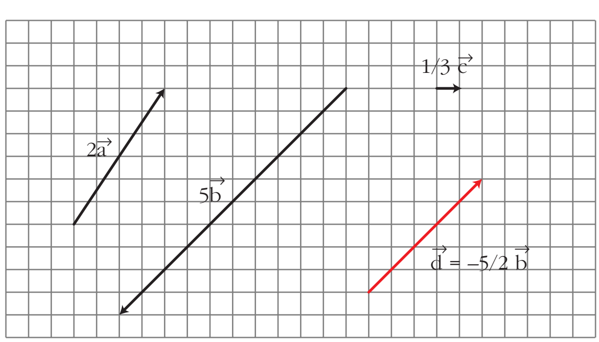
Representa:

a) $2\vec{a}$ **b)** $5\vec{b}$ **c)** $\frac{1}{3}\vec{c}$

Expresa el vector $\vec{d}$ como producto de uno de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ o $\vec{c}$ por un número.

Designa los vectores anteriores mediante pares de números. Por ejemplo: $\vec{a}(2, 3)$.

Repite con pares de números las operaciones que has efectuado anteriormente.

- 

- $\vec{d} = -2{,}5\ \vec{b} = \frac{-5}{2}\ \vec{b}$
- $\vec{a}(2, 3)$

  $\vec{b}(-2, -2)$

  $\vec{c}(3, 0)$

  $\vec{d}(5, 5)$
- $2\vec{a} = 2(2, 3) = (4, 6)$

  $5\vec{b} = 5(-2, -2) = (-10, -10)$

  $\frac{1}{3}\ \vec{c} = \frac{1}{3}(3, 0) = (1, 0)$

Página 173

Suma de vectores

■ **Efectúa gráficamente:**

a) $\vec{a} + \vec{c}$ **b)** $\vec{b} + \vec{c}$ **c)** $\vec{b} + \vec{a}$ **d)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

siendo $\vec{a}$, $\vec{b}$ **y** $\vec{c}$ **los del ejercicio anterior.**

Realiza las mismas sumas con pares de números. Por ejemplo:

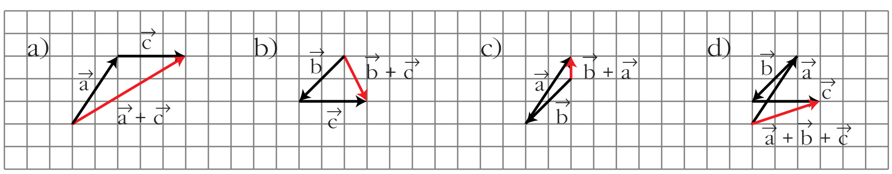
$$\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) + (3, 0) = (5, 3)$$

■ a) $\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) + (3, 0) = (5, 3)$

b) $\vec{b} + \vec{c} = (-2, -2) + (3, 0) = (1, -2)$

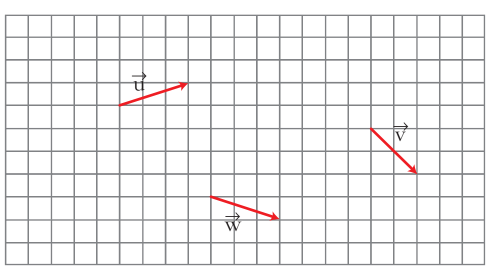
c) $\vec{b} + \vec{a} = (-2, -2) + (2, 3) = (0, 1)$

d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2, 3) + (-2, -2) + (3, 0) = (3, 1)$



Combina operaciones

■



Con los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$ **efectúa las siguientes operaciones gráficamente y mediante pares de números:**

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ **b)** $-\vec{v} + 5\vec{w}$ **c)** $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w}$

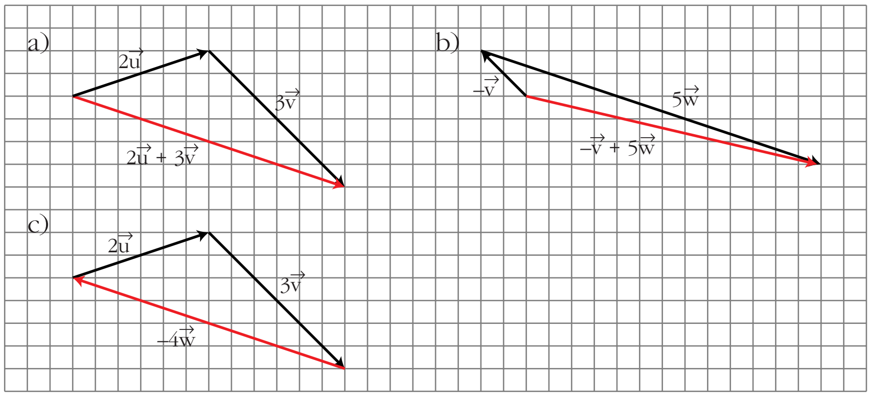
¿Cómo designarías al vector resultante de esta última operación?

■ a) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(3, 1) + 3(2, -2) = (6, 2) + (6, -6) = (12, -4)$

b) $-\vec{v} + 5\vec{w} = -(2, -2) + 5(3, -1) = (-2, 2) + (15, -5) = (13, -3)$

c) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w} = 2(3, 1) + 3(2, -2) - 4(3, -1) = (6, 2) + (6, -6) + (-12, 4) = (0, 0)$

Vector nulo: $\vec{0}$



Página 177

1. Si $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(1, -4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} - \vec{v}$ **c)** $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ **d)** $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

Página 178

1. Demuestra las propiedades 1, 3, 5 y 8.

• Propiedad 1: Si $\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$

$= |\vec{0}|\ |\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$

$= 0 \cdot |\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

Si $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ se demuestra de forma análoga

• Propiedad 3: Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$

Como: $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow |\vec{u}| \neq 0$

$\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow |\vec{v}| \neq 0$

Tiene que ser $cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0 \Rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 90° \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$

- Propiedad 5: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \overset{(*)}{=} |\vec{v}|\ |\vec{u}|\, cos\ (\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$

  (*) pues $cos\ \alpha = cos(-\alpha)$

- Propiedad 8: Si $B(\vec{x}, \vec{y})$ es una base ortonormal $\rightarrow$

  $\rightarrow\ \vec{x} \perp \vec{y}\ \rightarrow$ por la propiedad 2: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0\ \rightarrow$

  $\rightarrow$ por la propiedad 5: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} = 0$

  Además: $\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|\ |\vec{x}|\ cos\ 0° = |\vec{x}|\ |\vec{x}| \cdot 1 = 1$

  $\vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{y}|\ |\vec{y}|\ cos\ 0° = |\vec{y}|\ |\vec{y}| \cdot 1 = 1$

  pues en una base ortogonal $|\vec{x}| = 1$, $|\vec{y}| = 1$.

2. **Reflexiona sobre lo que significan las propiedades 6 y 7. Pon ejemplos y justifícalos.**

- Propiedad 6: $\lambda\ (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \lambda \left[|\vec{u}|\ |\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\right] =$

  $= \lambda \left[|\vec{u}| \cdot \text{proy } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u}\right]$

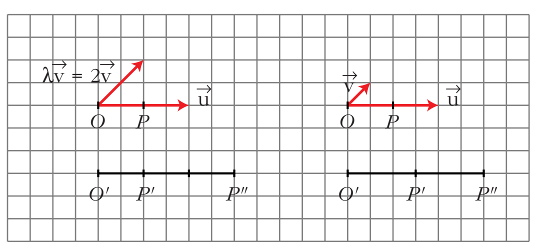
  $(\lambda\ \vec{u}) \cdot \vec{v} = |\lambda\ \vec{u}|\ |\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$

  $= (\lambda\ |\vec{u}|)\ |\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) =$

  $= (\lambda\ |\vec{u}|) \text{ proy } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u}$

  En ambos casos, a la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ la multiplicamos por λ y por $|\vec{u}|$ (ambas escalares). Luego se trata de la longitud de un segmento proporcional al segmento OP (proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$).

  Ejemplo: supongamos $\lambda = 2$, $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 1$



$O'P'' = (\lambda\ \vec{u}) \cdot \vec{v}$ $\qquad$ $\begin{cases} O'P' = \vec{u} \cdot \vec{v} \\ O'P'' = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$

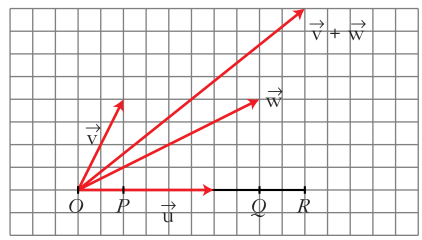
- Propiedad 7: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot \text{proy. de } (\vec{v} + \vec{w}) \text{ sobre } \vec{u}$

  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot \text{proy. de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} + |\vec{u}| \cdot \text{proy. de } \vec{w} \text{ sobre } \vec{u} =$

  $= |\vec{u}|\ (\text{proy. de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} + \text{proy. de } \vec{w} \text{ sobre } \vec{u})$

  Luego en ambos casos hay que multiplicar por $|\vec{u}|$. Solo vemos que la proyección de $(\vec{v} + \vec{w})$ sobre $\vec{u}$ es igual que la suma de las proyecciones de ambos vectores por separado.

Veamos un ejemplo:



$$\left.\begin{array}{l}\overline{OP} = \text{proy de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u} \\ \overline{OQ} = \text{proy de } \vec{w} \text{ sobre } \vec{u} \\ \text{Como } \ \overline{OP} = \overline{QR}\end{array}\right\} \rightarrow \ \overline{OR} = \overline{OQ} + \overline{QR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$$

y ya se tiene el resulado.

3. **A partir de la propiedad 4, demuestra que si $\vec{v} \neq 0$, entonces:**

$$\textbf{(proyección de } \vec{u} \textbf{ sobre } \vec{v}\textbf{)} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Por la propiedad 5: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Y aplicando ahora la propiedad 4:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot (\text{proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v})$$

Entonces, si $|\vec{v}| \neq 0$, se tiene:

$$(\text{proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Página 184

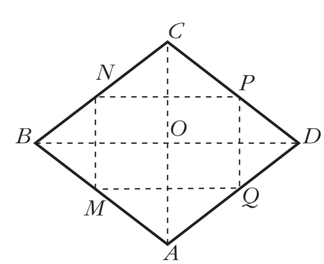
EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Los vectores y sus operaciones

1 **La figura *ABCD* es un rombo.**

Compara el módulo, la dirección y el sentido de los siguientes pares de vectores:



a) $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{AQ}$ **y** $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{BM}$ **y** $\overrightarrow{PD}$ **d)** $\overrightarrow{OC}$ **y** $\overrightarrow{OD}$

a) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

Tienen distinta dirección.

b) $|\overrightarrow{AQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dirección de } \overrightarrow{AQ} = \text{dirección de } \overrightarrow{BC} \\ \text{Sentido de } \overrightarrow{AQ} = \text{sentido de } \overrightarrow{BC}\end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

c) Los dos vectores tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, luego:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PD}$$

d) $|\overrightarrow{OC}| < |\overrightarrow{OD}|$

Sus direcciones son perpendiculares $\rightarrow \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD}$

2 **Busca en la figura del ejercicio 1 tres vectores iguales a $\overrightarrow{NC}$ y otros tres iguales a $\overrightarrow{MQ}$.**

$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QD}$

$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

3 **Sustituye los puntos suspensivos por un número, de forma que estas igualdades sean verdaderas para el rombo del ejercicio 1:**

a) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CP}$ **b)** $\overrightarrow{MN} = \ldots\ \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{OC} = \ldots\ \overrightarrow{OA}$ **d)** $\overrightarrow{NB} = \ldots\ \overrightarrow{BC}$

a) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CP}$ b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ d) $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4 **Completa las igualdades siguientes con las letras que faltan para que, en el rombo del ejercicio 1, sean verdaderas:**

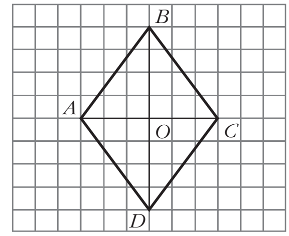
a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$ **b)** $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{\ldots C} = \overrightarrow{MC}$

c) $\overrightarrow{M\ldots} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD}$ **d)** $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AO}$

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$ b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MC}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD}$ d) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AO}$

5 **Observa el rombo de la figura y calcula:**



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ **d)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ **f)** $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$

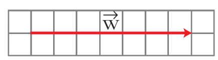
Expresa los resultados utilizando los vértices del rombo.

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

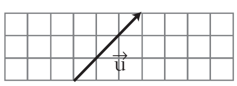
e) $\overrightarrow{AC}$ f) $2\overrightarrow{DC}$

6 **Considera el vector $\vec{w}$:**

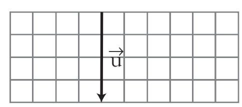


Dibuja en cada uno de estos casos un vector $\vec{v}$ que sumado con $\vec{u}$ dé como resultado $\vec{w}$:

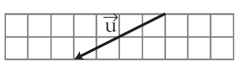
a)



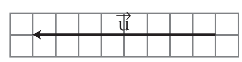
b)

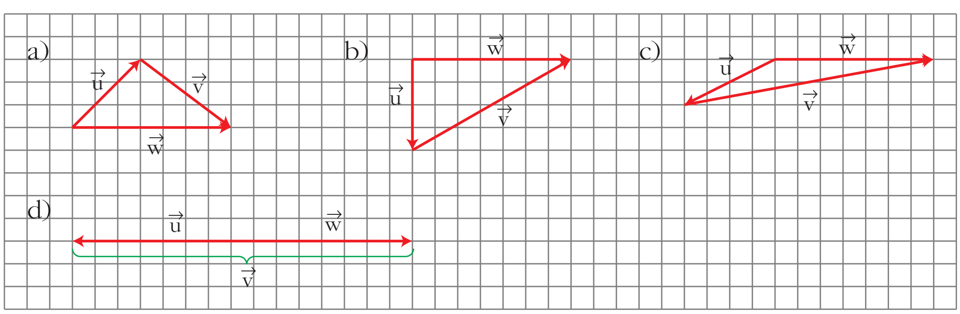


c)



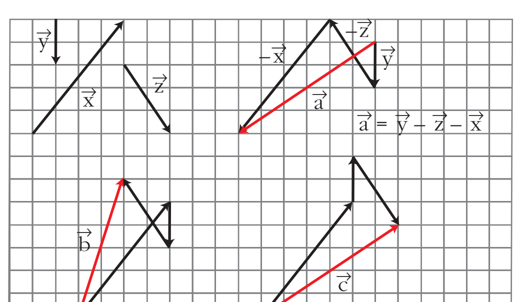
d)





7 **Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los hemos obtenido operando con los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.**

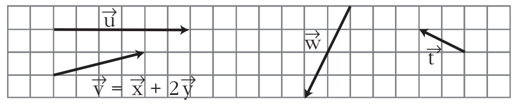
¿Qué operaciones hemos hecho en cada caso?



$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$

$\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$

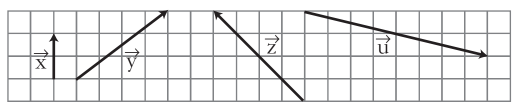
8 **Al dibujar los vectores $\vec{x} + 2\vec{y}$; $\vec{y} + \vec{z} + \vec{x}$; $\vec{y} - \vec{z}$; $\vec{z} - \vec{x} - 2\vec{y}$, siendo $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$ los vectores del ejercicio anterior, hemos obtenido:**



Asocia cada expresión a su resultado.

$$\vec{u} = \vec{y} + \vec{z} + \vec{x} \qquad \vec{w} = \vec{z} - \vec{x} - 2\vec{y} \qquad \vec{t} = \vec{y} - \vec{z}$$

9 **Expresa el vector $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Hazlo después con el vector $\vec{u}$.**



☛ ***Dibuja $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ con el mismo origen. Prolonga los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ en los dos sentidos. Desde el extremo de $\vec{z}$, traza paralelas a $\vec{x}$ e $\vec{y}$ hasta formar un paralelogramo del que $\vec{z}$ sea una diagonal.***

$$\vec{z} = 3{,}5\vec{x} - \vec{y} \qquad \vec{u} = -4\vec{x} + 2\vec{y}$$

Con coordenadas, sería:

$$\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{y} = a(0,\ 2) + b(4,\ 3) = (-4,\ 4) \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 0a + 4b = -4 \\ 2a + 3b = 4 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -1 \\ 2a + 3(-1) = 4 \;\rightarrow\; a = 7/2 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{z} = \frac{7}{2}\vec{x} - \vec{y}$$

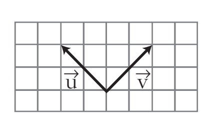
$$\vec{u} = a(0,\ 2) + b(4,\ 3) = (8,\ -2) \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} 0a + 4b = 8 \\ 2a + 3b = -2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 2 \\ 2a + 3 \cdot 2 = -2 \;\rightarrow\; a = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} = -4\vec{x} + 2\vec{y}$$

Página 185

Bases y coordenadas

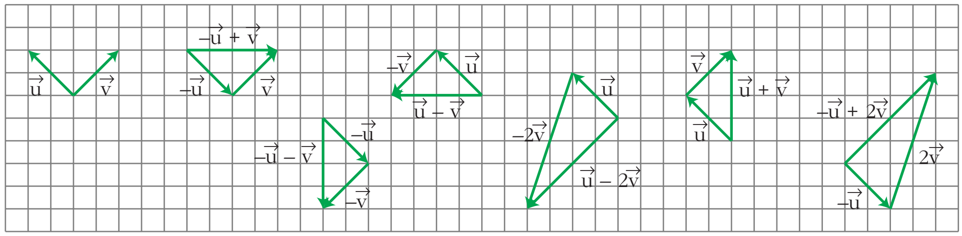
10 **A la vista de la figura, dibuja los vectores:**



$$-\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{u} + \vec{v}, \quad -\vec{u} - \vec{v}$$

$$-\vec{u} + 2\vec{v}, \quad \vec{u} - 2\vec{v}$$

Si tomamos como base $(\vec{u}, \vec{v})$, ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?

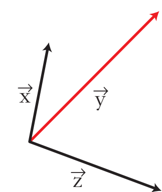


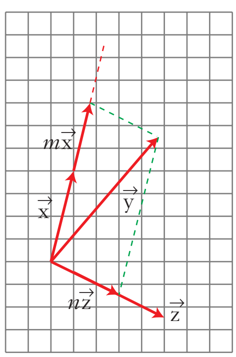
$-\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1)$ $\qquad \vec{u} - \vec{v} = (1, -1)$ $\qquad \vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$

$-\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1)$ $\qquad -\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2)$ $\qquad \vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2)$

11 **Expresa gráficamente el vector $\vec{y}$ de la forma: $\vec{y} = m\vec{x} + n\vec{z}$.**

¿Qué signo tendrán m y n? ¿Cómo serán, mayores o menores que 1?

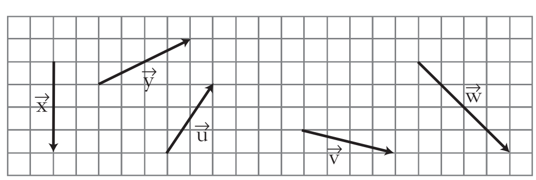




$m, n > 0$

$m > 1, \quad n < 1$

12 **Escribe los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.**



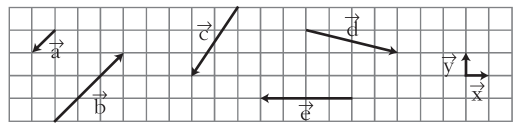
¿Cuáles serán las coordenadas de esos vectores respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$?

$\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$, luego $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ respecto de $B(\vec{x}, \vec{y})$.

$\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{x} + \vec{y}$, luego $\vec{v} = \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ respecto de $B(\vec{x}, \vec{y})$.

$\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{x} + \vec{y}$, luego $\vec{w} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ respecto de $B(\vec{x}, \vec{y})$.

13 **Escribe las coordenadas de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ con respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.**



$\vec{a}(-1, -1)$ $\vec{b}(3, 3)$ $\vec{c}(-2, -3)$ $\vec{d}(4, -1)$ $\vec{e}(-4, 0)$

14 **Si las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $(3, -5)$ y $(-2, 1)$, obtén las coordenadas de:**

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ **b)** $-\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v}$ **c)** $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2\,(3, -5) + \frac{1}{2}\,(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{11}{2}\right)$

b) $-(3, -5) - \frac{3}{5}\,(-2, 1) = (-3, 15) + \left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right) = \left(\frac{-9}{5}, \frac{72}{5}\right)$

c) $\frac{1}{2}\left[(3, -5) + (-2, 1)\right] - \frac{2}{3}\left[(3, -5) - (-2, 1)\right] = \frac{1}{2}\,(1, -4) - \frac{2}{3}\,(5, -6) =$

$= \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$

15 **Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.**

$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 7 = -3 - 1/2b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - 1/2b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{array}\right\}$

$\vec{b}(-20, 22)$

16 **Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, siendo $\vec{a}(1, -7)$ y $\vec{u}\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$.**

$(1, -7) = 3\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right) - 2(v_1, v_2) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 = 5/2 - 2v_1 \rightarrow v_1 = 3/4 \\ -7 = 2 - 2v_2 \rightarrow v_2 = 9/2 \end{array}\right\}$

$\vec{v}\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{2}\right)$

17 **Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.**

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \;\rightarrow\; \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Despejando en la primera ecuación $n = 3m$ y sustituyendo en la segunda:

$$-5 = -2m + 6m \;\rightarrow\; -5 = 4m \;\rightarrow\; m = \frac{-5}{4} \;\rightarrow\; n = \frac{-15}{4}$$

18 **Expresa el vector $\vec{a}(1, 5)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.**

☛ ***Calcula m y n tales que $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.***

$$(1, 5) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; \begin{cases} 1 = 3m + 4n \\ 5 = -2m - 1/2n \end{cases}$$

Resuelvo el sistema por reducción (por ejemplo).

Para ello, multiplico la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumo miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{l} 1 = 3m + 4n \\ 40 = -16m - 4n \\ \hline 41 = -13m \;\rightarrow\; m = \dfrac{41}{-13} \end{array}$$

Sustituyo en una de las dos ecuaciones y despejo n:

$$1 = 3m + 4n \;\rightarrow\; 1 = 3\left(\frac{-41}{13}\right) + 4n \;\rightarrow\; 1 = \frac{136}{13} + 4n \;\rightarrow\; \frac{-123}{13} = 4n$$

$$\rightarrow\; n = \frac{136}{52} = \frac{36}{13}$$

Así, podemos decir: $\vec{a} = -\dfrac{41}{13}\vec{b} - \dfrac{36}{13}\vec{c}$

19 **¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?**

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(-3, 1)$

b) $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

c) $\vec{u}(5, -4)$, $\vec{v}(5, 4)$

a) No, pues tienen la misma dirección ($\vec{u} = -\vec{v}$).

b) No, por la misma razón ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

c) Sí, tienen distinta dirección ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier k). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

Producto escalar

20 **Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:**

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$ **b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$**

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$ **d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$**

☛ ***a) Halla primero las coordenadas de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.***

c) Efectúa $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Multiplica el resultado (un número) por el vector $\vec{w}$. Obtendrás un vector.

En b) obtendrás un número y en d), un vector.

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{array}\right\} \to$

$\to \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}\,(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

21 **Calcula x, de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -5)$ y $\vec{b}(x, 2)$ sea igual a 7.**

$(3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \to 3x - 10 = 7 \to x = \dfrac{17}{3}$

22 **Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \to -20 - 2k = 0 \to k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \to 25 + k^2 = 34 \to k^2 = 9 \to k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

23 **Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}(x, y)$, ortogonal a $\vec{u}(3, 4)$ y que mida el doble que $\vec{u}$.**

$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{v} \to \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to 3x + 4y = 0 \\ |\vec{v}| = 2\,|\vec{u}| \to \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{9 + 16} = 2\sqrt{25} = 10 \to x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right\}$

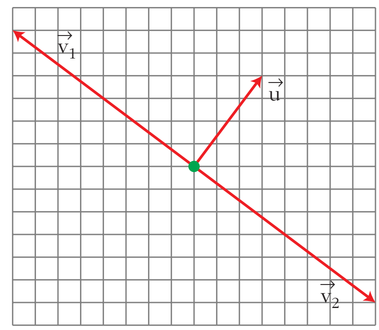
Resolvemos el sistema:

Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$x = \frac{-4}{3}y \to \left(\frac{-4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \to \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \to \frac{25}{9}y^2 = 100 \to y = \pm 6$$

Si $y_1 = 6 \to x_1 = \frac{-4}{3} \cdot 6 = -8 \to \vec{v}_1(-8, 6)$

Si $y_2 = -6 \to x_2 = \frac{-4}{3} \cdot (-6) = 8 \to \vec{v}_2(8, -6)$



El problema tiene dos posibles soluciones, tales que:

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

24 **Dados $\vec{a}(2, 1)$ y $\vec{b}(6, 2)$, halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$.**

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \cdot (2, 1) = 1 \to 2x + 2y = 1 \\ (x, y) \cdot (6, 2) = 0 \to 6x + 2y = 0\end{array}\right\} \text{ Resolvemos el sistema:}$$

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por (–1) y sumamos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r}-2x - 2y = -1 \\ 6x + 2y = 0 \\ \hline 4x \qquad = -1\end{array} \to x = \frac{-1}{4}$$

Sustituimos en una ecuación; por ejemplo en la segunda y despejamos la otra incógnita:

$$6x + 2y = 0 \to 6 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2y = 0 \to 2y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \to y = \frac{3}{4}$$

Así, nuestro vector será: $\vec{v}\left(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

25 **Siendo $\vec{u}(5, -b)$ y $\vec{v}(a, 2)$, halla a y b, sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.**

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to (5, -b) \cdot (a, 2) = 0 \to 5a - 2b = 0$

Si $|\vec{v}| = \sqrt{13}$, entonces $\sqrt{a^2 + 2^2} = \sqrt{13} \to a^2 + 4 = 13$

Resolvemos el sistema:

$$a^2 + 4 = 13 \;\rightarrow\; a = \pm 3$$

Entonces: Si $a = 3 \;\rightarrow\; b = \dfrac{5a}{2} = \dfrac{15}{2}$

Si $a = -3 \;\rightarrow\; b = \dfrac{5a}{2} = \dfrac{-15}{2}$

Luego hay dos posibles soluciones: $\vec{u}\left(5, \dfrac{-15}{2}\right)$, $\vec{v}(3, 2)$

O bien: $\vec{u}\left(5, \dfrac{15}{2}\right)$, $\vec{v}(-3, 2)$

26 **Halla el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:**

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$ **b)** $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$ **c)** $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\dfrac{1}{2}, -3\right)$

a) Utilizamos las dos expresiones para calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 2(-5) = -7$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Igualando las dos expresiones, se tiene:

$-7 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \;\rightarrow\; \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = -0{,}38$

Luego: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112° \; 22' \; 48''$

b) Despejando directamente en la definición:

$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) \;\rightarrow$

$\rightarrow \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2)}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = \dfrac{0}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = 0$

de donde: $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$ (basta con ver que $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$)

c) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-1/2 - 18}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{37/2}} = \dfrac{-37/2}{\left(37\sqrt{2}\right)/2} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°$

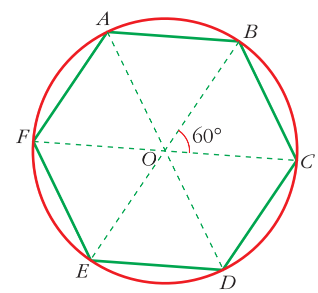
Página 186

27 **En una circunferencia de centro *O* y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono de vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*.**

Calcula los productos:

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ **b)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$ **d)** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF}$



a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|\ cos\ (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

$= 2 \cdot 2 \cdot cos\ 60° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot 2 \cdot cos\ 120° = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot cos\ 0° \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

(*) OAB es un triángulo equilátero, luego:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OA}| = 2$$

Razonamos igual para $|\overrightarrow{ED}|$.

d) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EF}$ (mismo módulo, misma dirección y sentido opuesto)

Luego: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 \cdot 2 \cdot cos\ 180° = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$

28 **Dado el vector $\vec{u}(6, -8)$, determina:**

a) Los vectores unitarios (módulo 1) de la misma dirección que $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y ortogonales a $\vec{u}$.

a) Si $\vec{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{u}$, entonces:

O bien $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}_1}) = 0°$

O bien $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}_2}) = 180°$

- En el primer caso, si el ángulo que foman es 0°, entonces:

  $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 6x - 8y = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_1| \cdot cos\ 0° \rightarrow$

  $\rightarrow 6x - 8y = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \rightarrow 6x - 8y = 10$

- Por otro lado, como $|\vec{v}_1| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$

  Resolvemos el sistema:

$$x = \frac{10 + 8y}{6} = \frac{5 + 4y}{3}$$

  que, sustituyendo en la segunda ecuación, queda:

$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \dfrac{25 + 16y^2 + 40y}{9} + y^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 25 + 16y^2 + 40y + 9y^2 = 9 \rightarrow 25y^2 + 40y + 16 = 0$

$y = \dfrac{-40 \pm \sqrt{1600 - 1600}}{50} = \dfrac{-4}{5}$

Calculemos ahora x:

$$x = \frac{5 + 4y}{3} = \frac{5 + 4 \cdot (-4/5)}{3} = \frac{3}{5}$$

Así: $\vec{v}_1 = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{-4}{5}\right)$

- En el segundo caso, es decir, si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}_2}) = 180°$, entonces debe ocurrir que $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_1$ formen 180°, es decir, que sean opuestos.

  Luego: $\vec{v}_2 \left(\dfrac{-3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

b) $\vec{v} \perp \vec{u} \rightarrow (x, y) \cdot (6, -8) = 0 \rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \dfrac{8y}{6} = \dfrac{4}{3}y$

$|\vec{v}| = |\vec{u}| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 = 100$

$\left(\dfrac{4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \dfrac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \rightarrow \dfrac{25}{9}y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 36 \rightarrow y = \pm 6$

- Si $y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \dfrac{4}{3}6 = 8 \rightarrow \vec{v}_1 (8, 6)$
- Si $y_2 = -6 \rightarrow x_2 = -8 \rightarrow \vec{v}_2 (-8, -6)$

c) $\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow 6x - 8y = 0 \rightarrow x = \dfrac{8y}{6} = \dfrac{4y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left(\dfrac{4y}{3}\right)^2 + y^2 = 1 \rightarrow \dfrac{16}{9}y^2 + y^2 = 1 \rightarrow \dfrac{25}{9}y^2 = 1 \rightarrow y^2 = \dfrac{25}{9} \rightarrow y = \pm\dfrac{3}{5}$

- Si $y_1 = \dfrac{3}{5} \rightarrow x_1 = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5}$
- Si $y_2 = \dfrac{-3}{5} \rightarrow x_2 = \dfrac{4}{3} \cdot \left(\dfrac{-3}{5}\right) = \dfrac{-4}{5}$

Así, $\vec{v}_1 = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$, $\vec{v}_2 \left(\dfrac{-4}{5}, \dfrac{-3}{5}\right)$

PARA RESOLVER

29 Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.

☛ ***Escribe las coordenadas de $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$.***
Si $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, entonces $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Obtendrás una ecuación cuya incógnita es k.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} = -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{array}\right.$$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \;\to\; (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0$

$13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \;\to\; 9k^2 + 36k + 32 = 0$

$$k = \frac{-36 \pm \sqrt{1\,296 - 1\,152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} =$$

$$= \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$$

30 **Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}(1, -3)$ y $\vec{b}(2, 5)$.**

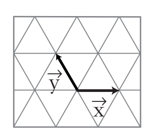
$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} = k(1, -3) + (2, 5) = (k + 2, -3k + 5) \\ \vec{y} = k(1, -3) - (2, 5) = (k - 2, -3k - 5) \\ \text{Como queremos } \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \end{array}\right\} \text{Entonces:}$$

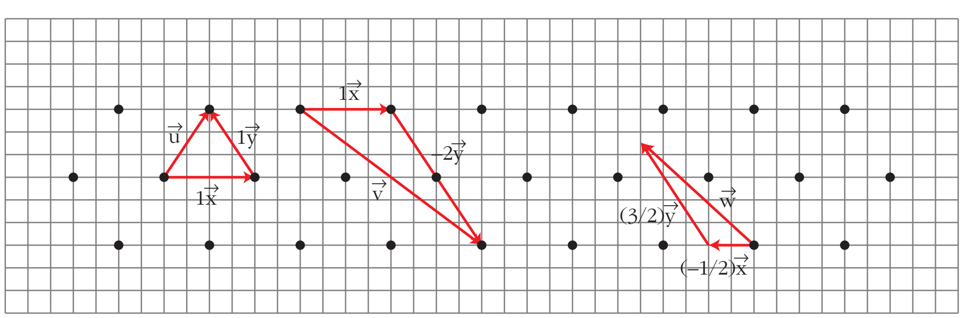
$(k + 2, -3k + 5) \cdot (k - 2, -3k - 5) = 0$

$(k + 2)(k - 2) + (-3k + 5)(-3k - 5) = 0$

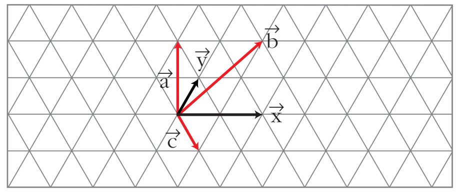
$k^2 - 4 + 9k^2 - 25 = 0 \;\to\; 10k^2 = 29 \;\to\; k = \pm\sqrt{\dfrac{29}{10}}$ (dos soluciones)

31 **Tomando como base $B(\vec{x}, \vec{y})$, representa los vectores $\vec{u}(1, 1)$, $\vec{v}(1, -2)$ y $\vec{w}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.**





32 **Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.**



$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\quad\quad$ $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y}$ $\quad\quad$ $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$

33 **De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

☛ ***Mira el problema resuelto nº 8.***

Como: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|\ |\vec{v}|\ \cos 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

entonces podemos decir que:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2\ |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120° + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49$$

Luego: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

34 **Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.**

☛ ***$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = -11$. Como $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 9$, calcula $|\vec{v}|$.***

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$

Como $|\vec{u}| = 3$, se tiene que:

$$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \rightarrow |\vec{v}|^2 = 20 \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{20}$$

35 **Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$, halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$\overset{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{34}$$

(*) $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{34}$$

36 **Si $|\vec{u}| = 7$, $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 10$, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

Razonando como en el problema resuelto número 8, llegamos a:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$10^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 5^2$$

$$100 = 49 + 70 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 25$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{100 - 49 - 25}{70} = 0{,}37143 \;\to\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 68°\ 11'\ 46{,}5''$$

37 **Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios.**

¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

☛ ***Si $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \to (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$.***

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \to \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \to (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$

$$5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios $\to |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$$5\,|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\,|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \to |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1}{2} \to (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$$

38 **Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45°.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos 45° \to$$

$$7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \to$$

$$14 + 2x = \sqrt{100(1 + x^2)} \to \frac{14 + 2x}{10} = \sqrt{1 + x^2} \to$$

$$\frac{7 + x}{5} = \sqrt{1 + x^2} \to \frac{49 + x^2 + 14x}{25} = 1 + x^2 \to$$

$$49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \to 24x^2 - 14x - 24 = 0 \to$$

$$12x^2 - 7x - 12 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$$

39 **Calcula x para que $\vec{a}(3, x)$ y $\vec{b}(5, 2)$ formen un ángulo de 60°.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos 60°$

$15 + 2x = \sqrt{9 + x^2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 30 + 4x = \sqrt{29(9 + x^2)} \rightarrow$

$900 + 16x^2 + 240x = 29(9 + x^2) \rightarrow 13x^2 + 240x - 639 = 0$

$$x = \frac{-240 \pm \sqrt{57\,600 + 33\,228}}{26} = \frac{-240 \pm \sqrt{90\,828}}{26} = \frac{-240 \pm 301{,}4}{26} \begin{cases} x_1 = -2{,}36 \\ x_2 = 20{,}82 \end{cases}$$

40 **Halla las coordenadas de cierto vector $\vec{x}$, sabiendo que forma un ángulo de 60° con $\vec{a}(2, 4)$ y que los módulos de ambos son iguales.**

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{20} = |\vec{x}| \\ \text{Sea } \vec{x}(m, n) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}|\ |\vec{x}|\ \cos 60° \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2m + 4n = \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 2m + 4n = 10 \\ \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{20} \rightarrow m^2 + n^2 = 20 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$m = \frac{10 - 4n}{2} = 5 - 2n$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$(5 - 2n)^2 + n^2 = 20 \rightarrow 25 + 4n^2 - 20n + n^2 = 20 \rightarrow n^2 - 4n + 1 = 0$

$$n = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \begin{cases} n_1 = 0{,}27 \\ n_2 = 3{,}73 \end{cases}$$

- Si $n_1 = 0{,}27 \rightarrow m_1 = 5 - 2 \cdot 0{,}27 = 4{,}46 \rightarrow \vec{x}_1 = (4{,}46;\ 0{,}27)$
- Si $n_2 = 3{,}73 \rightarrow m_2 = 5 - 2 \cdot 3{,}73 = -2{,}46 \rightarrow \vec{x}_2 = (-2{,}46;\ 3{,}73)$

41 **Determina un vector $\vec{a}$ que forme con $\vec{b}(-1, -2)$ un ángulo de 30° y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}\,|\vec{b}|$.**

$$\text{Sea } \vec{a}(x, y) \rightarrow \begin{cases} -x - 2y = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos 30° \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x - 2y = \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - 2y = \frac{15}{2} \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$x = -2y - \frac{15}{2}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\left(4y^2 + \frac{225}{4} + 30y\right) + y^2 = 15 \;\rightarrow\; 5y^2 + 30y + \frac{165}{4} = 0$$

$$20y^2 + 120y + 165 = 0 \;\rightarrow\; 4y^2 + 24y + 33 = 0$$

$$y = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 528}}{8} = \frac{-24 \pm 4\sqrt{3}}{8} = -3 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así: $\vec{a}\left(\frac{-3}{2} - \sqrt{3}, -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ o $\vec{a} = \left(\frac{-3}{2} + \sqrt{3}, -3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

42 **Dados los vectores $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(6, 4)$, halla la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.**

☛ ***Sabes que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot$ proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.***

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot$ (proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$)

$$\text{(proy. de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{6 + 12}{\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{18\sqrt{10}}{10} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

43 **Dados los vectores $\vec{a}(5, 2)$ y $\vec{b}(4, -3)$, calcula la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y la de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{(proy. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{(proy. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b}) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{proy. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{20 - 6}{\sqrt{29}} = \dfrac{14}{\sqrt{29}} = \dfrac{14\sqrt{29}}{29} \\[2ex] \text{proy. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{20 - 6}{\sqrt{25}} = \dfrac{14}{5} \end{array}\right.$$

44 **Demuestra que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$.**

☛ ***Debes probar que $[(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.***

Hay que probar que el producto escalar de ambos vectores es igual a 0.

- Veamos primero cuáles son las coordenadas del primer vector:

$$(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} = (b_1c_1 + b_2c_2)\,(a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)\,(b_1, b_2) =$$

$$= \big((b_1c_1 + b_2c_2)\,a_1, (b_1c_1 + b_2c_2)\,a_2\big) - \big((a_1c_1 + a_2c_2)\,b_1, (a_1c_1 + a_2c_2)\,b_2\big) =$$

$$= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2, a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) =$$

$$= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) =$$

$$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)$$

- Calculamos ahora:

$\left[(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}\right] \cdot \vec{c} =$

$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2,\ a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1) \cdot (c_1, c_2) =$

$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)\,c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\,c_2 =$

$= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0$

CUESTIONES TEÓRICAS

45 Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:

a) $2\vec{a} \cdot \vec{b}$ **b)** $(\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$

c) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$ **d)** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

a) Número b) Vector

c) Número d) Número

Página 187

46 Si $B(\vec{a}, \vec{b})$ es una base de los vectores del plano, señala cuáles de los siguientes pares de vectores pueden ser otra base:

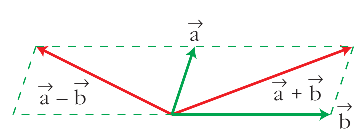
a) $(3\vec{a}, -2\vec{b})$ **b)** $(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$

c) $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$ **d)** $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a})$

a) Sí, pues no tienen la misma dirección, ya que $3\vec{a}$ tiene la dirección de $\vec{a}$ y $-2\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{b}$ (que, por ser $B(\vec{a}, \vec{b})$ base, no es la misma).

b) No, pues $-\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{a} + \vec{b})$, luego los dos vectores tienen la misma dirección (y sentidos opuestos).

c) Sí, pues tienen distinta dirección.



d) No, pues tienen la misma dirección al ser $\vec{a} - \vec{b} = -1(\vec{b} - \vec{a})$.

47 Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos. Indica qué ángulo forman en los siguientes casos:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|$ **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|\ |\vec{b}|$ **d)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0{,}5\ |\vec{a}|\ |\vec{b}|$

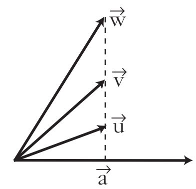
a) $cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \ \rightarrow\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0°$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \ \rightarrow\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$

c) $cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -1 \ \rightarrow\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$

d) $cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0{,}5 \ \rightarrow\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$

48 **¿Es cierto que $\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{w}$? Justifica la respuesta.**



☛ ***$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot$ proy. de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$. Observa las proyecciones de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sobre $\vec{a}$.***

$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot$ (proy. de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$)

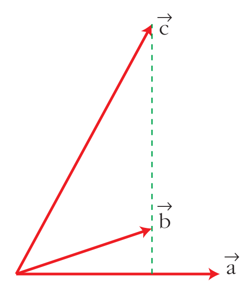
$\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{a}| \cdot$ (proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{a}$)

$\vec{a} \cdot \vec{w} = |\vec{a}| \cdot$ (proy. de $\vec{w}$ sobre $\vec{a}$)

Como las proyecciones de $\vec{u}$, de $\vec{v}$ y de $\vec{w}$ sobre $\vec{a}$ son iguales, entonces se verifica que:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \vec{w}$$

49 **Busca un contraejemplo para demostrar que si $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, no se deduce que $\vec{b} = \vec{c}$.**



Fijándonos en el ejercicio anterior, podemos encontrar fácilmente un ejemplo en el que $\vec{b} \neq \vec{c}$ siendo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot$ proy. de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot$ proy. de $\vec{c}$ sobre $\vec{a}$

Como ambas proyecciones coinciden: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

Y, sin embargo: $\vec{b} \neq \vec{c}$

50 **Prueba que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$, entonces: $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, $m, n \in \mathbb{R}$.**

Hay que probar que $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = 0$. Veamos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) \overset{(*)}{=} m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ \text{(*) Propiedades 6 y 7 del producto escalar.} \\ \text{Como: } \vec{a} \perp \vec{b} \ \rightarrow\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \phantom{\text{Como: }} \vec{a} \perp \vec{c} \ \rightarrow\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0$$

51 **Prueba que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \text{Si } \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

52 **Justifica por qué $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$.**

☛ ***Ten en cuenta que*** $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \left| |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})| \overset{(*)}{\leq} |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

(*) Como para cualquier ángulo α se da que $-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \rightarrow |\cos \alpha| \leq 1$.

53 **Comprueba que el módulo de la suma de dos vectores es menor o igual que la suma de los módulos de dichos vectores.**

¿Cómo tienen que ser los vectores para que el módulo de su suma sea igual a la suma de sus módulos?

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \overset{(*)}{\leq} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| =$$

$$= \left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right)^2$$

(*) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Hemos obtenido, por tanto, que:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq \left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right)^2$$

Entonces, puesto que siempre $|\vec{v}| \geq 0$, podemos decir que:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

La igualdad $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ se dará cuando:

$$\cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0°$$

PARA PROFUNDIZAR

54 **Dados los vectores $\vec{a}(2, 6)$ y $\vec{b}(5, 1)$, calcula:**

a) Las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{b}$.

b) Un vector de la misma dirección que $\vec{b}$ y cuyo módulo sea igual a la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$. (Vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$).

a) Habrá dos soluciones $(\vec{v}$ y $-\vec{v})$

- Si $\vec{v}$ es vector unitario $\rightarrow |\vec{v}| = 1$
- Si $\vec{v}$ es de la misma dirección que $\vec{b} \rightarrow \vec{v} = k\vec{b} = (k5, k)$

$$\sqrt{25k^2 + k^2} = 1 \rightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{26}} = \pm \frac{\sqrt{26}}{26}$$

Luego las soluciones son:

$$\vec{v} = \left(\frac{5\sqrt{26}}{26}, \frac{\sqrt{26}}{26}\right) \quad \text{y} \quad -\vec{v} = \left(\frac{-5\sqrt{26}}{26}, -\frac{\sqrt{26}}{26}\right)$$

b) proy. de $\vec{a}$ sobre $\vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{10 + 6}{\sqrt{26}} = \dfrac{16}{\sqrt{26}} = \dfrac{16\sqrt{26}}{26} = \dfrac{8\sqrt{26}}{13}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Luego, } |\vec{v}| = \dfrac{8\sqrt{26}}{13} \\ \text{y } \vec{v} = k\vec{b} = (5k, k) \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{26k^2} = \frac{8\sqrt{26}}{13} \rightarrow k = \pm\frac{8}{13}$$

Así: $\vec{v}\left(\dfrac{40}{13}, \dfrac{8}{13}\right), \quad -\vec{v}\left(\dfrac{-40}{13}, \dfrac{-8}{13}\right)$

55 **Dados $\vec{a}(1, 2)$ y $\vec{b}(3, 5)$, expresa el vector $\vec{b}$ como suma de dos vectores: uno de la misma dirección que $\vec{a}$ y otro ortogonal a $\vec{a}$.**

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \vec{b} = \vec{x} + \vec{y}, \text{ donde:} \\ \bullet\ \vec{x} \text{ tenga la dirección de } \vec{a} \rightarrow \vec{x} = k\vec{a} = (k, 2k) \end{array}\right\} \\ \bullet\ \vec{y} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{y} \cdot \vec{a} = (m, n) \cdot (1, 2) = 0 \rightarrow m + 2n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{b} = \vec{x} + \vec{y} \rightarrow (3, 5) = (k, 2k) + (m, n)$$

Además, debe ocurrir: $m + 2n = 0$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3 = k + m \rightarrow m = 3 - k \\ 5 = 2k + n \rightarrow n = 5 - 2k \end{array}\right\} \rightarrow (3 - k) + 2(5 - 2k) = 0 \rightarrow \\ m + 2n = 0 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow 3 - k + 10 - 4k = 0 \rightarrow k = \frac{13}{5} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 3 - \dfrac{13}{5} = \dfrac{2}{5} \\ n = 5 - 2 \cdot \dfrac{13}{5} = \dfrac{-1}{5} \end{array}\right.$$

Por tanto, $\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, donde:

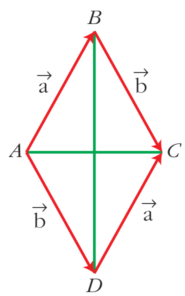
$$\vec{x} = \left(\frac{13}{5}, \frac{26}{5}\right) \qquad \vec{y} = \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

56 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen los lados de un rombo, partiendo de uno de sus vértices (cada vector define un par de lados paralelos):**

a) Expresa las diagonales del rombo en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Demuestra vectorialmente que las diagonales del rombo son perpendiculares.

a)



$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$

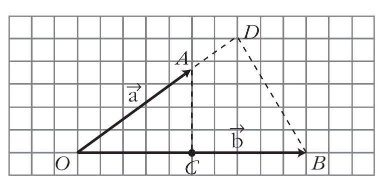
b) Hay que probar que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Veámoslo:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$$

Como $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ por ser la medida de los lados, se cumple que:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

57 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores y sea $\overline{OC}$ la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y $\overline{OD}$ la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.**



Comprueba, por semejanza de triángulos, que se verifica $|\vec{b}| \cdot \overline{OC} = |\vec{a}| \cdot \overline{OD}$.

Los triángulos *OCA* y *ODB* son semejantes (por ser triángulos rectángulos con un ángulo en común). Luego se verifica:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

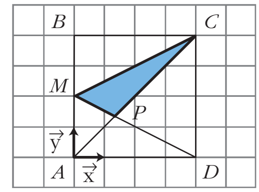
Como $\overline{OA} = |\vec{a}|$ y $\overline{OB} = |\vec{b}|$:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \rightarrow |\vec{b}| \cdot \overline{OC} = |\vec{a}| \cdot \overline{OD}$$

Es decir:

$$|\vec{b}| \cdot (\text{proy. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot (\text{proy. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a})$$

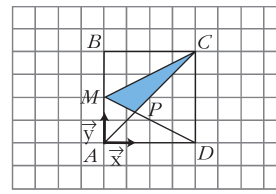
58 **Calcula la medida de los ángulos del triángulo *MPC.***



Las coordenadas de $\overrightarrow{MC}$ son (4, 2).

Escribe las coordenadas de $\overrightarrow{MD}$ y halla CMD.

Halla el ángulo MCA con $\overrightarrow{CM}$ y $\overrightarrow{CA}$.



$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \widehat{CMP} = \widehat{CMD} = (\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}}) \\ \overrightarrow{MC}\,(4,\ 2) \\ \overrightarrow{MD}\,(4,\ -2) \end{array}\right\} \to$$

$$\to \cos \widehat{CMP} = \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MC}|\ |\overrightarrow{MD}|} = \frac{16 - 4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}} = 0{,}6$$

Luego: $\widehat{CMP} = 53°\ 7'\ 48{,}37''$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \widehat{MCP} = \widehat{MCA} = (\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}}) \\ \overrightarrow{CM}\,(-4,\ -2) \\ \overrightarrow{CA}\,(-4,\ -4) \end{array}\right\} \to$$

$$\to \cos \widehat{MCP} = \frac{\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CM}|\ |\overrightarrow{CA}|} = \frac{16 + 8}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{32}} = 0{,}94868$$

Luego: $\widehat{MCP} = 18°\ 26'\ 5{,}82''$

- Por último, $\widehat{MPC} = 180° - (\widehat{CMP} + \widehat{MCP}) = 108°\ 26'\ 5{,}81''$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

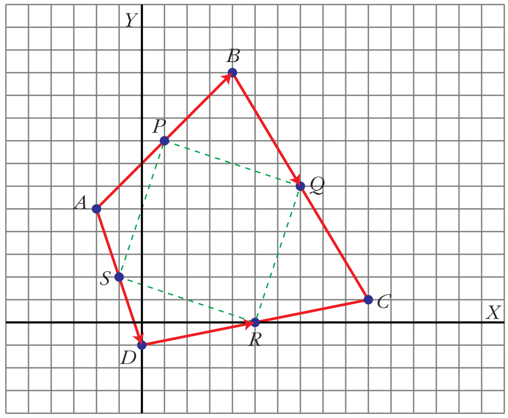
59 **a) Comprueba que los puntos medios de los lados del cuadrilátero de vértices *A*(–2, 5), *B*(4, 11), *C*(10, 1), *D*(0, –1) son los vértices de un paralelogramo.**

(¡Recuerda! Una condición que caracteriza a los paralelogramos es que sus lados opuestos son iguales y paralelos).

b) Demuestra que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera son los vértices de un paralelogramo.

Llama A(a, a'), B(b, b'), C(c, c'), D(d, d') a los vértices del cuadrilátero inicial, halla sus puntos medios P, Q, R, S, y comprueba, vectorialmente, que se cumple el criterio dado en el apartado a).

a)



Sean P, Q, R y S los puntos medios de los lados del cuadrilátero, como se indica en la figura.

- $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(6, 6) + \frac{1}{2}(6, -10) = (3, 3) + (3, -5) = (6, -2)$

  $\vec{SR} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}(2, -6) + \frac{1}{2}(10, 2) = (1, -3) + (5, 1) = (6, -2)$

  Luego: $\vec{PQ} = \vec{SR}$ (misma dirección, mismo módulo)

  Por tanto, los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{SR}$ son iguales y paralelos.

- $\vec{SP} = \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(-2, 6) + \frac{1}{2}(6, 6) = (-1, 3) + (3, 3) = (2, 6)$

  $\vec{RQ} = \frac{1}{2}\vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}(10, 2) + \frac{1}{2}(-6, 10) = (5, 1) + (-3, 5) = (2, 6)$

  Así, $\vec{SP} = \vec{RQ} \Rightarrow$ los lados opuestos $\overline{SP}$ y $\overline{RQ}$ son iguales y paralelos.

- Podemos concluir, por tanto, que $PQRS$ es un paralelogramo.

b) Probaremos que la propiedad del apartado anterior se verifica para cualquier cuadrilátero de vértices $A(a, a')$, $B(b, b')$, $C(c, c')$, $D(d, d')$.

Supongamos P, Q, R y S los puntos medios de los lados (como antes). Entonces:

- $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(b - a, b' - a') + \frac{1}{2}(c - b, c' - b') =$

  $$= \left(\frac{b-a}{2} + \frac{c-b}{2}, \frac{b'-a'}{2} + \frac{c'-b'}{2}\right) = \left(\frac{c-a}{2}, \frac{c'-a'}{2}\right)$$

  $\vec{SR} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}(d - a, d' - a') + \frac{1}{2}(c - d, c' - d') =$

  $$= \left(\frac{d-a}{2} + \frac{c-d}{2}, \frac{d'-a'}{2} + \frac{c'-d'}{2}\right) = \left(\frac{c-a}{2}, \frac{c'-a'}{2}\right)$$

  Luego: $\vec{PQ} = \vec{SR}$

- Análogamente, se puede probar $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$.

  Veamos, sin embargo, otra forma de hacerlo sin necesidad de usar las coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \end{array}\right\} \to \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$$

- Podemos concluir, por tanto, que $PQRS$ es un paralelogramo.