# 12

# Fuerzas y energía

# Fuerzas y energía 12

PARA COMENZAR (página 355)

- **Investiga la localización en el mundo de las bases de lanzamiento de cohetes espaciales.**

  En el siguiente enlace podemos consultar las principales bases de lanzamiento de cohetes espaciales y su localización:

  http://www.upv.es/satelite/trabajos/pracGrupo20/sitios.htm

  Resumimos la información encontrada a continuación:

| | Lugar de lanzamiento | Localización |
|---|---|---|
| **América del Norte** | Cabo Cañaveral<br>Eastern Test Range<br>Centro Espacial Kennedy | Florida, EE. UU. |
| | Base Aérea Militar Vandenberg<br>Western Test Range | California, EE. UU. |
| | Wallops<br>Pacific Missile Range (PMR) | Fit Facil, Virginia, EE. UU. |
| **Asia** | Jiuquan Shuang Ch'eng Tsu | China |
| | Kagoshima Space Center | Uchinoura, Kagoshima, Japón |
| | Palmachim | Israel |
| | Cosmódromo Plesestk | Arkhangelsk Oblast, Rusia |
| | Sriharikota | Sriharikota island, Andra Pradesh, India |
| | Cosmódromo Svobodniy | Amur Oblast, Rusia |
| | Tanegashima | Tanega Island, Japón |
| | Tyuratam Baikonur | Kazakhstan |
| | Xichang | China |
| **América del Sur** | Centro Espacial Guayana | Kourou, Guayana Francesa |

- **Busca información sobre los diferentes tipos de órbitas de satélites artificiales. ¿Qué tipos de satélites son los más abundantes?**

  En función del tipo de órbita, podemos hacer la siguiente clasificación de los satélites artificiales:

  - **LEO.** (*Low Earth Orbit*, órbitas bajas). Orbitan alrededor de la Tierra entre 200 y 2000 km de altura. Se emplean para proporcionar datos sobre el movimiento de las placas terrestres y en telefonía vía satélite.
  - **MEO.** (*Medium Earth Orbit*, órbitas medias). Orbitan a una altura de entre 2000 y 35 786 km. Su uso se destina a comunicaciones de telefonía y televisión, y a las mediciones de experimentos espaciales.
  - **HEO.** (*Highly Elliptical Orbit*, órbitas muy elípticas). Se aplican en cartografía y espionaje, ya que pueden detectar un ángulo de superficie terrestre según se elija.
  - **Satélites geoestacionarios.** Se ve siempre un mismo punto de la Tierra. Se encuentran a 35 786 km sobre el ecuador. Se utilizan en emisiones de televisión y de telefonía, en transmisión de datos a larga distancia y en detección y difusión de datos meteorológicos.

  Los más abundantes son los satélites geoestacionarios, ya que presentan la ventaja de permanecer casi fijos con respecto a una determinada estación terrestre. Así, las estaciones terrestres no requieren de equipos de rastreo.

## PRACTICA (página 337)

**1. Calcula la fuerza de repulsión entre dos electrones separados una distancia de 1 μm.**

**Dato: $q_e = -1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.**

Aplicamos la ley de Coulomb:

$$F = k \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{\left|-1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot \left(-1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\right|}{(1 \cdot 10^{-6}\ \text{m})^2} = \mathbf{2{,}30 \cdot 10^{-16}\ N}$$

**2. Calcula la fuerza con que se atraen la Tierra y la Luna conociendo los siguientes datos:**

- **Masa de la Tierra = $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.**
- **Masa de la Luna = $7{,}20 \cdot 10^{22}$ kg.**
- **Distancia de la Tierra a la Luna = $3{,}84 \cdot 10^5$ km.**

Calculamos la fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna aplicando la ley de gravitación universal:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{(d_{T-L})^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 7{,}20 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{\left(3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{1{,}94 \cdot 10^{20}\ N}$$

**3. Con los datos y la solución del ejercicio anterior calcula la velocidad de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra.**

Cuando un cuerpo orbita alrededor de otro se cumple:

$$F_C = m \cdot a_N \text{ donde } a_N = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad F = M_L \cdot \frac{v^2}{R} = M_L \cdot \frac{v^2}{d_{\text{Tierra-Luna}}}$$

Aplicando la ley de la gravitación universal:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{d^2_{\text{Tierra-Luna}}}$$

Igualando ambas fuerzas obtenemos y despejando la velocidad orbital de la Luna:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{M_L}}{d^2_{\text{Tierra-Luna}}} = \cancel{M_L} \cdot \frac{v^2}{d_{\text{Tierra-Luna}}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{d_{\text{Tierra-Luna}}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{3{,}84 \cdot 10^8\,\text{m}}} = \mathbf{1018\ m/s}$$

**4. Un levantador de pesas consigue elevar 107 kg desde el suelo hasta una altura de 2 m y los aguanta 20 segundos arriba. Calcula el trabajo que realiza:**

**a) Mientras levanta las pesas.**

**b) Mientras las mantiene levantadas.**

**Dato: $g$ = 9,8 m/s.**

a) El trabajo que realiza la fuerza peso mientras levanta las pesas es:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta y \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \Delta y \cdot \cos\alpha$$

En este caso, el peso es paralelo a la dirección de movimiento, por tanto, $\alpha = 0°$. Sustituimos los datos y resolvemos:

$$W = 107\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 2\ \text{m} \cdot \cos 0° = \mathbf{2097{,}2\ J}$$

b) En este caso, el trabajo realizado es nulo, puesto que no existe desplazamiento, $\Delta\vec{r} = \vec{0}$:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{0} = \mathbf{0\ J}$$

## ACTIVIDAD (página 338)

**5. Una vieja máquina de *pinball* lanza una bola de acero de 50 g con un muelle de constante $10^3$ N/m y que se comprime 4 cm. Al lanzar la bola debe salvar una altura de 10 cm. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

**a) Calcula la energía que almacena el muelle al comprimirlo.**

**b) Determina la energía potencial de la bola en lo alto de la máquina.**

a) La energía potencial elástica almacenada por el muelle al comprimirlo será:

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \text{ N/m} \cdot (0{,}04 \text{ m})^2 = \mathbf{0{,}8 \text{ J}}$$

b) Calculamos la energía potencial gravitatoria de la bola en lo alto de la máquina:

$$E_{P,g} = m \cdot g \cdot h = 0{,}050 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}10 \text{ m} = \mathbf{0{,}049 \text{ J}}$$

## ACTIVIDADES (página 340)

**6. Un oscilador armónico se encuentra en un instante determinado en una posición que es igual a un tercio de su amplitud *A*. Determina para dicho instante la relación existente entre la energía cinética y la energía potencial ($E_C/E_P$).**

Utilizamos las expresiones:

$$\begin{cases} E_{P,e} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \\ E_C = E_M - E_{P,e} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - x^2\right) \end{cases}$$

Obtenemos la relación entre ambas:

$$\frac{E_C}{E_{P,e}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot \left(A^2 - x^2\right)}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot x^2} = \frac{A^2 - x^2}{x^2}$$

Como $x = \dfrac{1}{3} \cdot A$, obtenemos:

$$\frac{E_C}{E_{P,e}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot \left(A^2 - x^2\right)}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot x^2} = \frac{A^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^2}{\left(\frac{A}{3}\right)^2} = \frac{\cancel{A^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right)}{\cancel{A^2} \cdot \frac{1}{9}} = \mathbf{8}$$

**7. Una partícula describe un movimiento vibratorio armónico de amplitud A y pulsación ω. Si duplicamos a la vez la amplitud y el periodo del movimiento, ¿cambiará la energía cinética de la partícula cuando pase por el punto central de la oscilación? ¿Cambiará su energía potencial en ese punto? Justifica la respuesta.**

En este problema:

$$\begin{cases} E_C = E_M - E_{P,e} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 - \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2) \\ E_{P,e} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \end{cases}$$

En el punto central de la oscilación, $x = 0$ m, por lo que la energía potencial será nula. En ese punto:

$$E_C = E_M + 0 \quad \Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

Para el oscilador armónico:

$$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot A^2 = m \cdot 2\pi^2 \cdot \left(\frac{A}{T}\right)^2$$

Si se duplican a la vez la amplitud y el periodo:

$$A' = 2 \cdot A \text{ y } T' = 2 \cdot T \quad \Rightarrow \quad E'_C = m \cdot 2\pi^2 \cdot \left(\frac{\cancel{2} \cdot A}{\cancel{2} \cdot T}\right)^2 = E_C$$

Es decir, la energía cinética no varía.

La energía potencial:

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \text{ frente a } E'_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k' \cdot x^2$$

Al tratarse de la posición $x = 0$ m, ambas son iguales a cero.

## ACTIVIDAD (página 342)

**8. ¿A qué distancia deben situarse dos cargas iguales de 10 μC para que la energía potencial eléctrica del sistema sea de 10 J? Dato: 9 · 10⁹ N · m² · C⁻².**

$$E_{P,E} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d} \quad \Rightarrow \quad d = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{E_{P,E}} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-5} \text{ C} \cdot 1 \cdot 10^{-5} \text{ C}}{10 \text{ J}} = 0{,}09 \text{ m} = \mathbf{9\ cm}$$

## ACTIVIDADES (página 345)

**9. Un haz de partículas de ion amonio, $NH_4^+$, tiene una velocidad inicial de $4{,}5 \cdot 10^4$ m/s, el haz está sometido a una diferencia de potencial de 150 V para frenarlo. Calcula la velocidad final de los iones.**
**Datos: 1 u = $1{,}661 \cdot 10^{-27}$ kg; $q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.**

Calculamos la masa del amonio y pasamos a unidades del SI:

$$m(NH_4^+) = (14{,}01 + 1{,}008 \cdot 4) \text{ u} = 18{,}042 \text{ u}$$

$$18{,}042 \ \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \ \cancel{\text{u}}} = 2{,}997 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Utilizamos la expresión de la velocidad final para una partícula sometida a una diferencia de potencial:

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{v_{\text{ini}}^2 - 2 \cdot \frac{q}{m} \cdot \Delta V}$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{\left(4{,}5 \cdot 10^4 \text{ m/s}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{2{,}997 \cdot 10^{-26} \text{ kg}} \cdot 150 \text{ V}} = 2{,}053 \cdot 10^4 \text{ m/s} \approx \mathbf{2{,}1 \cdot 10^4\ m/s}$$

**10. Calcula la diferencia de potencial necesaria para que la velocidad de un catión plata, $Ag^+$, aumente desde los 10 m/s a los 1000 m/s. Datos: 1 u = $1{,}661 \cdot 10^{-27}$ kg; $q_{Ag^+} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.**

Calculamos la masa del catión plata en unidades del SI:

$$m(Ag^+) = 107{,}9 \ \cancel{\text{u}} \cdot \frac{1{,}661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \ \cancel{\text{u}}} = 1{,}79 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

A este cambio en la energía cinética le corresponde un trabajo y como todas las fuerzas son conservativas:

$$\Delta E_C = -q \cdot \Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v_{\text{fin}}^2 - v_{\text{ini}}^2\right) = -q \cdot \Delta V$$

Despejamos, sustituimos los datos y calculamos:

$$\Delta V = -\frac{m \cdot \left(v_{\text{fin}}^2 - v_{\text{ini}}^2\right)}{2 \cdot q} = -\frac{1{,}79 \cdot 10^{-25}\ \text{kg} \cdot \left[(1000\ \text{m/s})^2 - (10\ \text{m/s})^2\right]}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = \mathbf{-0{,}56\ V}$$

## ACTIVIDAD (página 347)

**11. Calcula la velocidad mínima con que debe lanzarse una sonda desde la superficie de la Tierra para que alcance 200 km de altura. ¿Con qué velocidad mínima debería lanzarse para llevar la sonda al infinito?**
**Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².**

Por el principio de conservación de la energía mecánica, y teniendo en cuenta que al alcanzar la altura final la velocidad se anula $v_{\text{fin}} = 0$ m/s:

$$E_{\text{M,ini}} = E_{\text{M,fin}} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{C,ini}} + E_{\text{P,G,ini}} = E_{\text{C,fin}} + E_{\text{P,G,fin}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{\text{ini}}^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T} = 0 - G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{R_T + h}$$

Despejamos la velocidad inicial:

$$v_{\text{ini}} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$$

$$v_{\text{ini}} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}} - \frac{1}{3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m} + 2 \cdot 10^5\ \text{m}}\right)} = \mathbf{1951\ m/s}$$

Para llevar la sonda hasta el infinito debemos calcular la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}}} = \mathbf{11\,181\ m/s}$$

## ACTIVIDADES (página 348)

**12. Determina la energía mecánica total de la Luna en su órbita, supuesta la órbita alrededor de la Tierra un MCU.**
**Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $m_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $r_{T\text{-}L} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².**

La energía mecánica en la órbita es:

$$E_M = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_L}{2 \cdot r_{T\text{-}L}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}} = \mathbf{-3{,}81 \cdot 10^{28}\ J}$$

**13. Suponiendo que la Luna describe una órbita circular con velocidad uniforme y sabiendo que emplea 27 días 7 horas 43 min y 11,5 s en completar la órbita, calcula qué velocidad lleva en su órbita y el radio de la órbita. Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².**

Pasamos el periodo a unidades del sistema internacional:

$$T = 27\ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} + 7\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} + 43\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} + 11{,}5\ \text{s} = 2\,360\,591{,}5\ \text{s}$$

A partir de la velocidad en la órbita:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r_{\text{órbita}}}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M}{r_{\text{órbita}}}$$

Y la expresión de la velocidad en un movimiento circular y uniforme:

$$v=\omega\cdot r=\frac{2\pi}{T}\cdot r_{\text{órbita}}\quad\Rightarrow\quad v^2=\frac{4\pi^2\cdot r_{\text{órbita}}^2}{T^2}$$

Igualamos ambas ecuaciones y despejamos el radio:

$$\frac{G\cdot M}{r_{\text{órbita}}}=\frac{4\pi^2\cdot r_{\text{órbita}}^2}{T^2}\quad\Rightarrow\quad r_{\text{órbita}}=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}}$$

Sustituimos los datos y resolvemos:

$$r_{\text{órbita}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\ \text{kg}\cdot\left(2\,360\,591{,}5\ \text{s}\right)^2}{4\pi^2}}=\mathbf{3{,}83\cdot10^8\ m}$$

Sustituimos en cualquiera de las dos expresiones anteriores y calculamos la velocidad:

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r_{\text{órbita}}}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\ \text{kg}}{3{,}83\cdot10^8\ \text{m}}}=\mathbf{1020\ m/s}$$

## ACTIVIDADES FINALES (página 352)

### Fuerza elástica y energía

**14. Se tienen dos muelles idénticos. Si después de estirados uno tiene el doble de longitud que el otro, ¿tendrá también el doble de energía potencial? En caso negativo, qué longitud deberían tener los dos muelles para que sí sea el doble.**

Al estirarse cada muelle:

$$\left.\begin{aligned}l_0+x&=l_1\\ l_0+x'&=l_2\end{aligned}\right\}$$

La energía potencial de ambos muelles es:

$$E_{\text{P,e1}}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot x^2\qquad\qquad E_{\text{P,e2}}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot x'^2$$

Si después de estirarlos el muelle 2 tiene doble longitud que el muelle 1, se cumple:

$$l_2=2\cdot l_1\quad\Rightarrow\quad l_0+x'=2\cdot\left(l_0+x\right)\quad\Rightarrow\quad l_0+x'=2\cdot l_0+2\cdot x\quad\Rightarrow\quad x'=l_0+2\cdot x$$

Por tanto:

$$E_{\text{P,e2}}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(l_0+2\cdot x\right)^2$$

Comparando ambas energías potenciales:

$$\frac{E_{\text{P,e2}}}{E_{\text{P,e1}}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}\cdot k}\cdot\left(l_0+2\cdot x\right)^2}{\cancel{\frac{1}{2}\cdot k}\cdot x^2}=\left(\frac{l_0+2\cdot x}{x}\right)^2=\left(\frac{l_0}{x}+2\right)^2$$

Por tanto, el muelle 2 no tiene el doble de energía potencial que el muelle 1.

Para que la energía potencial del muelle 2 sea el doble que la del muelle 1, debe cumplirse que:

$$E_{P,e2} = 2 \cdot E_{P,e1} \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot x'^2 = 2 \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{k} \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad x' = \sqrt{2 \cdot x^2} \quad \Rightarrow \quad x' = \sqrt{2} \cdot x$$

Por tanto, la longitud de cada muelle debería ser:

$$l_1 = l_0 + x$$
$$l_2 = l_0 + x' = l_0 + \sqrt{2} \cdot x$$

**15. ¿Qué tiene más energía potencial, un cuerpo de 10 kg a una altura de 5 m o un muelle con $k = 30$ N/cm deformado 40 cm? Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

$$\left.\begin{aligned} E_{P,G,cuerpo} &= m \cdot g \cdot h = 10\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot 5\text{ m} = 490\text{ J} \\ E_{P,e,muelle} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^3\text{ N/m} \cdot (0{,}40\text{ m})^2 = 240\text{ J} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{E_{P,G,cuerpo} > E_{P,e,muelle}}$$

**16. Se coloca un muelle de 15 cm de longitud y constante elástica $k = 50$ N/m verticalmente sobre una superficie horizontal y se comprime 5 cm. Sobre el muelle se coloca una bolita de masa 25 g apoyada en su extremo. Si ahora se deja libre el conjunto, calcula la velocidad con que sale despedida la esfera al dejar libre el muelle y la máxima altura *h* que alcanzaría.**

Calculamos la energía potencial elástica:

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 50\text{ N/m} \cdot (0{,}05\text{ m})^2 = 0{,}0625\text{ J}$$

Como las fuerzas que actúan son conservativas, por el principio de conservación de la energía mecánica, $E_{P,e,ini} = E_{C,fin}$:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}0625\text{ J}}{0{,}025\text{ kg}}} = \mathbf{2{,}24\ m/s}$$

De nuevo por el principio de conservación de la energía mecánica, $E_{C,ini} = E_{P,G,fin}$, calculamos la altura que alcanza:

$$E_{P,G} = m \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{E_{P,G}}{m \cdot g} = \frac{0{,}0625\text{ J}}{0{,}025\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2} = \mathbf{0{,}26\ m}$$

**17. Una partícula de masa $m = 0{,}1$ kg oscila armónicamente en la forma $x = A \cdot \text{sen}\,\omega \cdot t$, con amplitud $A = 0{,}2$ m y frecuencia angular $\omega = 2\pi$ rad/s.**

**a) Calcula la energía mecánica de la partícula.**

**b) Determina y representa gráficamente las energías potencial y cinética de *m* en función de la elongación *x*.**

a) Se puede obtener la energía mecánica de la partícula a partir de la expresión:

$$E_M = E_C + E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

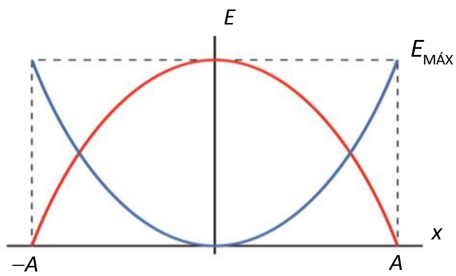
Para un oscilador armónico $k = m \cdot \omega^2$:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1\text{ kg} \cdot (2\pi\text{ rad/s})^2 \cdot (0{,}2\text{ m})^2 = \mathbf{7{,}90 \cdot 10^{-2}\ J}$$

b) En este caso:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2)$$

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$




$$E_{MÁX} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

**18.** **De un resorte de 40 cm de longitud se cuelga un peso de 50 g de masa y, alcanzado el equilibrio, la longitud del resorte es de 45 cm. Se estira 6 cm con la mano la masa y se suelta. Deduce la ecuación de la energía potencial elástica. Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.**

Obtendremos la constante *k* a partir de la fuerza peso:

$$P = -F_e \quad \Rightarrow \quad m \cdot g = -(-k \cdot \Delta x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m \cdot g}{\Delta x} = \frac{m \cdot g}{l_1 - l_0} = \frac{0{,}050\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}45\ \text{m} - 0{,}40\ \text{m}} = 9{,}8\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

La energía potencial elástica del muelle en reposo es:

$$E_{\text{P,e}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{\cancel{\Delta x}} \cdot (\Delta x)^{\cancel{2}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot (l_1 - l_0)$$

$$E_{\text{P,e}} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}050\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}45\ \text{m} - 0{,}40\ \text{m}) = 4{,}41 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

Hay que añadir la energía potencial elástica del muelle en la oscilación. La amplitud del movimiento es 0,06 m y la elongación *x* cambia con el tiempo según la ecuación:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Dado que al iniciarse la oscilación el muelle está estirado hacia abajo, en $t = 0$ s la elongación $x = -0{,}06$ m:

$$-0{,}06\ \text{m} = 0{,}06\ \text{m} \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0\ \text{s} + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \phi_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{-\pi}{2}$$

De la dinámica del oscilador armónico:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{N/m}}{0{,}050\ \text{kg}}} = 14\ \text{rad/s}$$

Al sustituir, queda que la elongación *x* cambia con el tiempo según la ecuación:

$$x = 0{,}06 \cdot \text{sen}\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) m$$

La energía potencial elástica del muelle en la oscilación es:

$$E'_{\text{P,e}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot \left[0{,}06 \cdot \text{sen}\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 1{,}764 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}^2\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La energía potencial elástica en conjunto es:

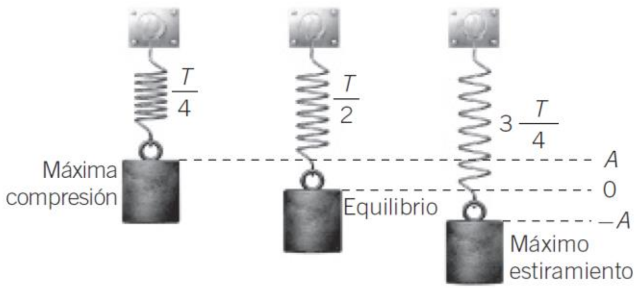
$$E_{\text{P,e,T}} = E_{\text{P,e}} + E'_{\text{P,e}} = 4{,}41 \cdot 10^{-2} + 1{,}764 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}^2\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{J}$$

$$E_{\text{P,e,T}} = \mathbf{1{,}764 \cdot 10^{-2} \cdot \left[2{,}5 + \text{sen}^2\left(14 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)\right]\ J}$$

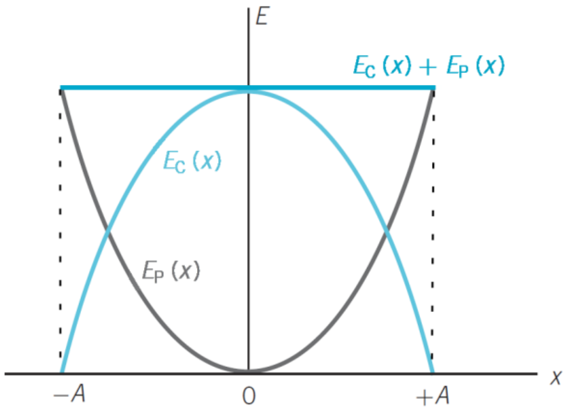
**19.** **Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica $k = 72$ N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio, comienza a oscilar. Pasa por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 cm/s. Razona los cambios energéticos que se producen en el proceso.**

Observamos los cambios energéticos que tiene lugar en la oscilación de un MAS producida por un resorte, tal y como se plantea en el enunciado:

- En el punto de máxima compresión: la energía cinética es nula, y la energía potencial máxima.
- En el punto de equilibrio: la energía cinética es máxima, y la energía potencial mínima.
- En el punto de máximo estiramiento: la energía cinética es nula, y la energía potencial, máxima.



La fuerza elástica es una fuerza conservativa así que, de acuerdo con el teorema de conservación de la energía mecánica, la energía mecánica total es constante. Sumando ambas energías siempre resulta un valor constante.




Como se puede observar en el gráfico del apartado anterior, al pasar por el punto de equilibrio se tiene la velocidad máxima del MAS, $v = \omega \cdot A$. Por otra parte, conocemos el valor de la constante de elasticidad del resorte, que en función de la frecuencia angular puede expresarse como $k = m \cdot \omega^2$.

A partir de este último dato obtendremos el valor de la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72\ \text{N/m}}{0{,}5\ \text{kg}}} = 12\ \text{rad/s}$$

Por tanto:

$$v = 6\frac{\cancel{\text{cm}}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{m}}{100\ \cancel{\text{cm}}} = 0{,}06\ \text{m/s}$$

$$A = \frac{v}{\omega} = \frac{0{,}06\ \text{m/s}}{12\ \text{rad/s}} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

En el punto de equilibrio del oscilador la energía potencial será nula, y la energía cinética será máxima e igual a la energía mecánica total:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\ \text{kg} \cdot (0{,}06\ \text{m/s})^2 = 9 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_{\text{equilibrio}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 72\ \text{N/m} \cdot (0\ \text{m})^2 = 0\ \text{J}$$

En los extremos de la oscilación la energía cinética será nula y la energía potencial será igual a la energía mecánica total.

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{extremo}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5\ \text{kg} \cdot (0\ \text{m/s})^2 = 0\ \text{J}$$

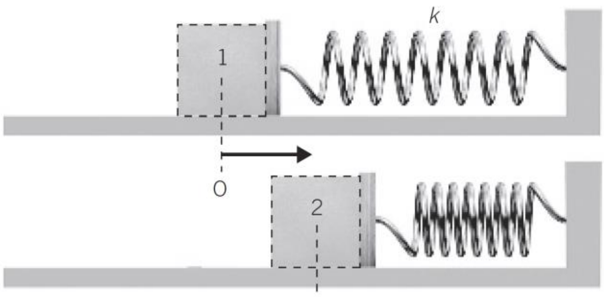
$$E_{P,e} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 72\ \text{N/m} \cdot (0{,}05\ \text{m})^2 = 9 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

**20. Un cuerpo de 5 kg se desplaza sobre una superficie sin rozamiento a una velocidad de 3 m/s. En un momento dado impacta con un resorte y queda unido a él vibrando como un oscilador armónico. Si el muelle tiene una constante $k = 750$ N/m, determina.**

**a) La máxima compresión que puede alcanzar el muelle.**

**b) La velocidad del oscilador cuando se encuentre a la mitad de la compresión máxima.**

a) La energía cinética del cuerpo que se desliza se transforma en energía potencial elástica del resorte.




La energía cinética inicial coincide con la energía potencial del resorte en estado de compresión máxima. De acuerdo con el principio de conservación de la energía:

$$E_{M,1} = E_{M,2} \quad \Rightarrow \quad E_{C,1} + E_{P,1} = E_{C,2} + E_{P,2}$$

$$E_{C,1} + 0 = 0 + E_{P,2}$$

Calculamos la energía cinética que tenía el cuerpo en su movimiento:

$$E_{C,1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{kg} \cdot (3\ \text{m/s})^2 = 22{,}5\ \text{J}$$

Esta energía coincide con la energía potencial máxima del resorte:

$$E_{P,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{P,2}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 22{,}5\ \text{J}}{750\ \text{N/m}}} = 0{,}245\ \text{m}$$

La máxima compresión que puede alcanzar el muelle es $A$ = **0,245 m**.

b) La velocidad se puede expresar así: $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$

A partir de $k$:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como queremos encontrar la velocidad cuando $x$ = A/2, entonces:

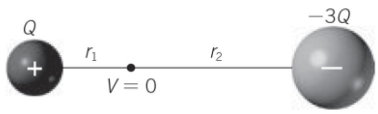
$$v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \left[A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2\right]} = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \frac{3}{4}} = 0{,}245\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{750\ \text{N/m}}{5\ \text{kg}} \cdot \frac{3}{4}} = \mathbf{2{,}60\ m/s}$$

## Fuerza eléctrica y energía

**21. Dos cargas, *q* y –3 · *q*, están separadas una distancia *d*. ¿En qué punto de la línea que une ambas cargas se anula el potencial?**

$$V = V_1 + V_2 = k \cdot \frac{q_1}{r_1} + k \cdot \frac{q_2}{r_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{k} \cdot \frac{\cancel{q_1}}{x} - \cancel{k} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{q_1}}{d - x} = 0$$

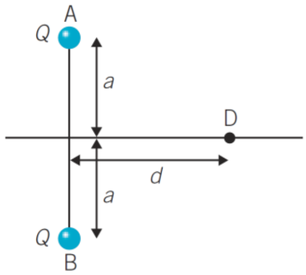
$$\frac{1}{x} = \frac{3}{d - x} \quad \Rightarrow \quad d - x = 3 \cdot x \quad \Rightarrow \quad d = 4 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{4}$$




El potencial se anula a **d/4 de la carga positiva**.

**22. Dos cargas positivas e iguales están situadas en el eje *Y*; una está situada en *y* = *a*, y la otra, en *y* = –*a*. Calcula el potencial eléctrico en un punto situado sobre el eje *X* y a una distancia *d* del origen. ¿Cómo varía el resultado si *a* >> *d*? ¿Y si es *d* >> *a*?**

Obtenemos el potencial creado en el punto D ($d$, 0) por las cargas de valor $q$ situadas en A (0, $a$) y B (0, –$a$). Para ello, en virtud el principio de superposición:




$$r_A = r_B = \sqrt{a^2 + d^2}$$

$$V_A = V_B = k \cdot \frac{q}{r} = k \cdot \frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

$$V_D = V_A + V_B = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

- Si $a >> d$:

$$\sqrt{a^2 + d^2} \simeq a \quad \Rightarrow \quad V_D = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{a}$$

- Si $d >> a$:

$$\sqrt{a^2 + d^2} \simeq d \quad \Rightarrow \quad V_D = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{d}$$

**23. Indica en tu cuaderno si cada frase se cierta, o no, justificando tu respuesta. Una partícula con carga eléctrica positiva se deja en libertad en un punto de un campo eléctrico. Se moverá:**

**a) En el sentido de los potenciales crecientes.**

**b) En el sentido de los potenciales decrecientes.**

**c) La partícula no se mueve a menos que sobre ella se aplique otra fuerza.**

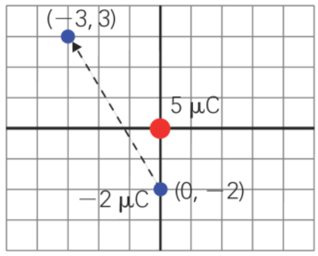
a) **Falsa**. Se moverá en el sentido de los potenciales decrecientes.

b) **Verdadera**.

c) **Falsa**. No es necesaria otra fuerza además de la propia del campo eléctrico.

## ACTIVIDADES FINALES (página 353)

**24. Una carga eléctrica de 5 μC se encuentra fija en el origen de coordenadas. Otra carga de –2 μC pasa del punto (0, –2) m al punto (–3, 3) m. Calcula el trabajo realizado por las fuerzas del campo. Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².**




El trabajo realizado por las fuerzas del campo cuando una carga pasa de un punto a otro del campo eléctrico es:

$$W = -\Delta E_{P,e} = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_2 - V_1) = q \cdot (V_1 - V_2)$$

$$V_1 = k \cdot \frac{q}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{2\ \text{m}} = 22\,500\ \text{V}$$

$$V_2 = k \cdot \frac{q}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{\sqrt{18}\ \text{m}} = 10\,6067\ \text{V}$$

$$W = q \cdot (V_1 - V_2) = -2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot (22\,500\ \text{V} - 10\,606{,}6\ \text{V}) = \mathbf{0{,}0238\ J}$$

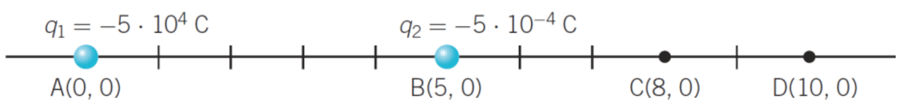
**25. Se aceleran unas partículas α, $^4_2\text{He}^{2+}$, a través de una diferencia de potencial de 2000 V. Halla la velocidad que adquieren desde el reposo. Datos: $q_\alpha = +3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C; $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg.**

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, $\Delta E_C = -\Delta E_P$:

$$\Delta E_C = -\left(-q \cdot \Delta V\right) = q \cdot \Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = q \cdot \Delta V$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2000\ \text{V}}{6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = \mathbf{4{,}39 \cdot 10^5\ m/s}$$

**26. Dos cargas puntuales de –5 · 10⁻⁴ C están fijas en los puntos $x = 0$ y $x = 5$ cm del eje *OX*. Calcula el potencial electrostático, *V*, en los puntos $x = 8$ cm y $x = 10$ cm. Si se abandona en reposo una partícula de masa $m = 5$ mg y carga positiva $q = +10^{-9}$ C en el punto $x = 10$ cm, ¿cuál será su velocidad al pasar por $x = 8$ cm?**




Utilizamos el principio de superposición para calcular el potencial que ambas cargas crean en los puntos C y D.

- Potencial creado por $q_1$ y $q_2$ en C:

$$V_{1C} = k \cdot \frac{q_1}{r_{AC}} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4}\ \text{C})}{0{,}08\ \text{m}} = -5{,}625 \cdot 10^7\ \text{V}$$

$$V_{2C} = k \cdot \frac{q_2}{r_{BC}} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4}\ \text{C})}{0{,}03\ \text{m}} = -1{,}5 \cdot 10^8\ \text{V}$$

Sumando:

$$V_C = V_{1C} + V_{2C} = -5{,}625 \cdot 10^7\ \text{V} + \left(-1{,}5 \cdot 10^8\ \text{V}\right) = \mathbf{-2{,}0625 \cdot 10^8\ V}$$

- Potencial creado por $q_1$ y $q_2$ en D:

$$V_{1D} = k \cdot \frac{q_1}{r_{AD}} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4}\ \text{C})}{0{,}1\ \text{m}} = -4{,}5 \cdot 10^7\ \text{V}$$

$$V_{2D} = k \cdot \frac{q_2}{r_{BD}} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(-5 \cdot 10^{-4}\ \text{C})}{0{,}05\ \text{m}} = -9 \cdot 10^7\ \text{V}$$

Sumando:

$$V_D = V_{1D} + V_{2D} = -4{,}5 \cdot 10^7\ \text{V} + \left(-9 \cdot 10^7\ \text{V}\right) = \mathbf{-1{,}35 \cdot 10^8\ V}$$

Dado que la interacción electrostática es conservativa, haremos uso del principio de conservación de la energía mecánica para calcular la velocidad que alcanza la partícula al pasar por el punto C cuando es liberada en D en reposo ($v_D = 0$):

$$E_{C,D}+E_{P,D}=E_{C,C}+E_{P,C} \quad\Rightarrow\quad 0+q\cdot V_D=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_C^2+q\cdot V_C \quad\Rightarrow\quad v_C=\sqrt{\frac{2\cdot q\cdot(V_D-V_C)}{m}}$$

Sustituyendo los datos y operando:

$$v_C=\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-9}\ \text{C}\cdot\left[-1{,}35\cdot 10^{8}\ \text{V}-\left(-2{,}0625\cdot 10^{8}\ \text{V}\right)\right]}{5\cdot 10^{-3}\ \text{kg}}}=\mathbf{5{,}34\ m/s}$$

**27.** **En una región del espacio existe un campo eléctrico uniforme vertical, de manera que la diferencia de potencial entre dos puntos situados uno encima del otro y distantes 2 cm es de 100 V. Si un electrón se abandona en reposo en el punto de menor potencial, ¿con qué velocidad llegará al otro punto?**
**Datos: masa del electrón: $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg; carga del electrón: $q_e = -1{,}6\cdot 10^{-19}$ C; $k = 9\cdot 10^9$ N · m²/C².**

Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son las fuerzas electrostáticas:

$$E_{C,ini}+E_{P,E,ini}=E_{C,fin}+E_{P,E,fin} \quad\Rightarrow\quad -E_{P,E,fin}+E_{P,E,ini}=E_{C,fin}-0 \quad\Rightarrow\quad \Delta E_{P,E}=E_{C,fin}$$

$$-q_e\cdot\Delta V=\frac{1}{2}\cdot m_e\cdot v_{fin}^2 \quad\Rightarrow\quad v_{fin}=\sqrt{\frac{-2\cdot q_e\cdot(V_D-V_C)}{m_e}}$$

Sustituyendo los datos:

$$v_{fin}=\sqrt{\frac{-2\cdot(-1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C})\cdot 100\ \text{V}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{kg}}}=\mathbf{5{,}93\cdot 10^{6}\ m/s}$$

**28.** **Un protón se acelera desde el reposo atravesando una zona de cierta diferencia de potencial, $\Delta V$. Calcula el valor de $\Delta V$ si sale con una velocidad de $1{,}2\cdot 10^6$ m/s. Datos: $q_p = +1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.**

A este cambio en la energía cinética le corresponde un trabajo y como todas las fuerzas son conservativas:

$$\Delta E_C=-\Delta E_P=-(-q\cdot\Delta V) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(v_{fin}^2-v_{ini}^2\right)=q\cdot\Delta V$$

Sustituimos los datos y calculamos:

$$\Delta V=\frac{m\cdot\left(v_{fin}^2-v_{ini}^2\right)}{2\cdot q}=\frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left[\left(1{,}2\cdot 10^{6}\ \text{m/s}\right)^2-\left(0\ \text{m/s}\right)^2\right]^2}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C}}=\mathbf{7515\ V}$$

## Fuerza gravitatoria y energía

**29.** **Indica si es cierta o no la siguiente expresión:**

**«Si el valor de la energía potencial gravitatoria de la masa *m* debida a una masa $M_1$ en un punto A es –8 J/kg y la energía de *m* en ese mismo punto causada por una masa $M_2$ es –4 J/kg, la energía debida a la acción conjunta de las masas $M_1$ y $M_2$ en el punto A es –12 J/kg».**

Es **verdadera**, ya que en virtud del principio de superposición, con el potencial gravitatorio es una función escalar, el total se obtiene como la suma escalar de los potenciales gravitatorios creados por cada masa.

**30.** **Dadas dos masas, $M_1$ y $M_2$, ¿existirá algún punto del espacio en el que la energía potencial gravitatoria de una tercera masa, *m*, provocada por esas dos masas sea cero?**

**No**, pues es acumulativo por el principio de superposición. Si la energía potencial gravitatoria es negativa siempre, la resultante de la suma será distinta de cero.

**31. En los tres vértices de un triángulo equilátero de 10 m de lado colocamos masas puntuales de 2, 3 y 0,5 kg, las tres inicialmente en reposo. Las masas de 2 y 3 kg permanecen fijas, mientras que la masa de 0,5 kg se desplaza hasta el punto medio del segmento que une las otras dos. ¿Con qué velocidad llega a este punto medio? Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².**

Calculamos la energía potencial que las dos masas crean en cada uno de estos puntos:

$$E_{\text{P,G,ini}} = E_{\text{P,G,A}} + E_{\text{P,G,B}} = -G \cdot \frac{m_{\text{A}} \cdot m}{L} - G \cdot \frac{m_{\text{B}} \cdot m}{L} = -\frac{G \cdot m}{L} \cdot (m_{\text{A}} + m_{\text{B}})$$

$$E_{\text{P,G,ini}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 0{,}5\ \text{kg}}{10\ \text{m}} \cdot (2\ \text{kg} + 3\ \text{kg}) = -1{,}6675 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

$$E_{\text{P,G,fin}} = E_{\text{P,G,A}} + E_{\text{P,G,B}} = -G \cdot \frac{m_{\text{A}} \cdot m}{L/2} - G \cdot \frac{m_{\text{B}} \cdot m}{L/2} = -\frac{2 \cdot G \cdot m}{L} \cdot (m_{\text{A}} + m_{\text{B}})$$

$$E_{\text{P,G,fin}} = -\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 0{,}5\ \text{kg}}{10\ \text{m}} \cdot (2\ \text{kg} + 3\ \text{kg}) = -3{,}3350 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

La gravedad es una fuerza conservativa, así que la variación de la energía mecánica se conserva:

$$E_{\text{C,ini}} + E_{\text{P,G,ini}} = E_{\text{C,fin}} + E_{\text{P,G,fin}} \Rightarrow E_{\text{C,fin}} = E_{\text{C,ini}} + E_{\text{P,G,ini}} - E_{\text{P,G,fin}}$$

$$E_{\text{C,fin}} = 0 + E_{\text{P,G,ini}} - E_{\text{P,G,fin}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{fin}}^2 = E_{\text{P,G,ini}} - E_{\text{P,G,fin}}$$

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (E_{\text{P,G,ini}} - E_{\text{P,G,fin}})}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left[-1{,}6675 \cdot 10^{-11}\ \text{J} - \left(-3{,}3350 \cdot 10^{-11}\ \text{J}\right)\right]}{0{,}5\ \text{kg}}} = \mathbf{8{,}2 \cdot 10^{-6}\ m/s}$$

**32. Escribe la frase correcta en tu cuaderno. Si para un cuerpo situado en un campo gravitatorio su energía cinética es igual a su energía potencial (en valor absoluto), significa:**

**a) Que el cuerpo puede escapar al infinito.**

**b) Que el cuerpo caerá sobre la masa que crea el campo.**

**c) Que seguirá en una órbita circular.**

La respuesta correcta es la **a**.

Si para un cuerpo situado en un campo gravitatorio su energía cinética es igual a su energía potencial en valor absoluto, significa que el cuerpo puede escapar al infinito.

**33. Indica en tu cuaderno si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.**

**a) Un objeto de masa $m_1$ necesita una velocidad de escape de la Tierra el doble de la que necesita otro objeto de masa $m_2 = m_1/2$.**

**b) Se precisa realizar más trabajo para colocar en una misma órbita un satélite de masa $m_1$ que otro satélite de masa $m_2 = m_1/2$.**

a) **Falsa**. La velocidad de escape no depende de la masa del satélite, sino de la masa que crea el campo.

b) El trabajo es la diferencia entre las energías mecánica del satélite en cada una de las órbitas:

$$E_{\text{M,suelo}} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_{\text{T}} \cdot m}{R_{\text{T}}}; \quad E_{\text{M,órbita}} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_{\text{T}} \cdot m}{R_{\text{T}} + h}$$

Por tanto:

$$W = \Delta E_{\text{M}} = E_{\text{M,órbita}} - E_{\text{M,suelo}} \Rightarrow W = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_{\text{T}} \cdot m}{R_{\text{T}} + h} - \left(-\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_{\text{T}} \cdot m}{R_{\text{T}}}\right)$$

$$W = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot M_{\text{T}} \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_{\text{T}}} - \frac{1}{R_{\text{T}} + h}\right)$$

El trabajo es directamente proporcional a la masa del cuerpo, por lo que la afirmación es **verdadera**.

**34. El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre, y su masa, la mitad. Calcula la velocidad de escape del planeta en relación al valor terrestre.**

La velocidad de escape será:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot \frac{M_T}{2}}{\frac{R_T}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot v_{e\,(\text{Tierra})} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot v_{e\,(\text{Tierra})}$$

## ACTIVIDADES FINALES (página 354)

**35. Un satélite artificial describe una órbita circular de radio 2 · $R_T$ en torno a la Tierra. Calcula la velocidad orbital. Datos: $R_T$ = 6370 km; $G$ = 6,67· 10$^{-11}$ N · m$^2$/kg$^2$; $M_T$ = 5,97 · 10$^{24}$ kg.**

$$F_C = F_G \quad\Rightarrow\quad G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{(2 \cdot R_T)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{\cancel{2 \cdot R_T}} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T}}$$

Sustituyendo:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}} = \mathbf{5591\ m/s}$$

**36. Se desea situar un par de satélites artificiales en una órbita ecuatorial. Se pretende que el primero de ellos sea geoestacionario, mientras que el segundo se situará al doble de distancia del centro de la Tierra. Calcula.**

**a) La altura sobre la superficie terrestre a la cual debe orbitar el primero.**

**b) El periodo de orbitación del segundo.**

**c) ¿En qué influiría la masa de los satélites?**

**Datos: $R_T$ = 6370 km; $G$ = 6,67 · 10$^{-11}$ N · m$^2$/kg$^2$; $M_T$ = 5,97 · 10$^{24}$ kg; día sidéreo: $T$ = 23 h 56 min 4 s.**

a) El satélite geoestacionario tendrá el mismo periodo de rotación que la Tierra, es decir, 1 día. Obtenemos la altura a la que debe orbitar.

Cuando el satélite está en órbita:

$$F_C = F_G \quad\Rightarrow\quad G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{\cancel{r}} \quad\Rightarrow\quad G \cdot \frac{M_T}{r} = v^2$$

Conocemos el periodo:

$$T = 23\ \cancel{h} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{h}} + 56\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} + 49\ \text{s} = 86\,209\ \text{s}$$

Considerando el movimiento circular y uniforme:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r \quad\Rightarrow\quad v^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2$$

Igualando las dos expresiones:

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2$$

Despejando $r$ podremos calcular el radio de la órbita. Sustituyendo los datos y operando:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(86\,209\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4\pi^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m}$$

Para conocer la altura a la que orbita sobre la superficie terrestre:

$$h = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m} - 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} = \mathbf{3{,}58 \cdot 10^7\ m}$$

b) Obtenemos el radio de la órbita del segundo satélite a partir del radio obtenido en el apartado anterior:

$$r_2 = 2 \cdot r = 2 \cdot 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m} = 8{,}43 \cdot 10^7\ \text{m}$$

Reordenamos la expresión del radio de la órbita para obtener el periodo. Sustituyendo los datos correspondientes a este caso:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (r_2)^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left(8{,}43 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} = 2{,}44 \cdot 10^5\ \text{s} = \mathbf{67{,}7\ h}$$

c) La masa del satélite no influye ni en el periodo ni en el radio de la órbita. Influiría en la energía mecánica de los sistemas o en la determinación de su peso en un lugar determinado.

**37. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 3815 km. Calcula.**

**a) La velocidad de traslación del satélite.**

**b) Su periodo de revolución.**

**Datos: $R_T$ = 6370 km; $G$ = 6,67 · 10$^{-11}$ N · m$^2$/kg$^2$; $M_T$ = 5,97 · 10$^{24}$ kg.**

Para el satélite que gira alrededor de la Tierra:

$$F_G = F_C \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m_S} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T}{r} = v^2$$

Trabajaremos con unidades del SI.

a) La velocidad de traslación es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 3{,}815 \cdot 10^6\ \text{m}}} = \mathbf{6253\ m/s}$$

b) Y el periodo es:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left(6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 3{,}815 \cdot 10^6\ \text{m}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} = 10\,235\ \text{s} = \mathbf{2\ h} + \mathbf{50\ min} + \mathbf{35\ s}$$

**38. El primer satélite, desarrollado con tecnología totalmente española, el Minisat, fue lanzado en 1997 desde las islas Canarias. Su órbita circular alrededor de la Tierra tiene un periodo de revolución de 10,5 horas.**

**a) Calcula el radio de la órbita.**

**b) Calcula la energía mecánica del satélite.**

**Datos: $m_{\text{Minisat}}$ = 100 kg; $G$ = 6,67 · 10$^{-11}$ N · m$^2$/kg$^2$; $M_T$ = 5,97 · 10$^{24}$ kg.**

a) El periodo es:

$$T = 10{,}5\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = 3{,}78 \cdot 10^4\ \text{s}$$

Aplicando la fórmula del radio de la órbita como en actividades anteriores:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{\left(3{,}78 \cdot 10^4\ \text{s}\right)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4\pi^2}} = \mathbf{2{,}43 \cdot 10^7\ m}$$

b) Aplicando la fórmula de la energía mecánica en la órbita:

$$E_M = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2 \cdot r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 100\ \text{kg}}{2 \cdot 2{,}43 \cdot 10^7\ \text{m}} = \mathbf{-8{,}2 \cdot 10^8\ J}$$

## Ampliación (página 354)

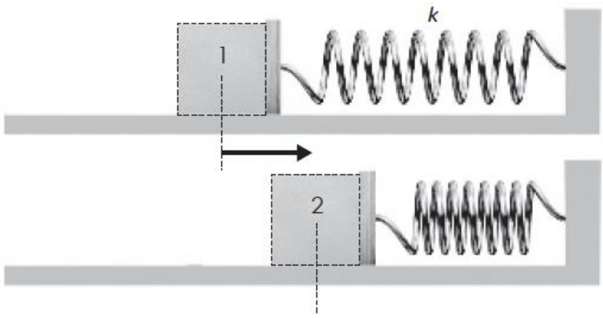
**39. Un cuerpo de 5 kg se desplaza sobre una superficie cuyo coeficiente de rozamiento es 0,2 a una velocidad de 3 m/s. En un momento dado impacta con un resorte y queda unido a él vibrando como un oscilador armónico. Si el muelle tiene una constante $k = 750$ N/m, determina:**

**a) La máxima compresión que puede alcanzar el muelle.**

**b) La distancia que recorre el oscilador hasta pararse.**

**Dato: g = 9,8 m/s².**

a) En este caso, la energía cinética del cuerpo que se desliza se invierte en energía potencial elástica y en vencer el trabajo de rozamiento mientras se alcanza la compresión máxima.




De acuerdo con el principio de conservación de la energía:

$$\Delta E_M = W_{nC} \Rightarrow E_{M,fin} - E_{M,ini} = W_{nC} \Rightarrow \left(E_{C,fin} + E_{P,fin}\right) - \left(E_{C,ini} + E_{P,ini}\right) = -F_R \cdot \Delta x$$

$$\left(0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0\right) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot A$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 + \mu \cdot m \cdot g \cdot A - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0 \Rightarrow k \cdot \boldsymbol{A}^2 + 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot \boldsymbol{A} - m \cdot v^2 = 0$$

$$A = \frac{-2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \pm \sqrt{\left(2 \cdot \mu \cdot m \cdot g\right)^2 - 4 \cdot k \cdot \left(-m \cdot v^2\right)}}{2 \cdot k}$$

$$A = \frac{-2 \cdot 0{,}2 \cdot 5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \pm \sqrt{\left(2 \cdot 0{,}2 \cdot 5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2\right)^2 + 4 \cdot 750 \text{ N/m} \cdot 5 \text{ kg} \cdot \left(3 \text{ m/s}\right)^2}}{2 \cdot 750 \text{ N/m}}$$

Las dos soluciones algebraicas de la ecuación son 0,232 m y –0,258 m. Solo tiene sentido la solución positiva. La máxima compresión que puede alcanzar el muelle es $A$ = **0,232 m**. (Como vemos, debido al rozamiento la amplitud es menor que en la actividad 20).

b) El resorte estará oscilando hasta que toda la energía cinética inicial se haya transformado en trabajo de rozamiento. Calculamos el espacio que ha recorrido el cuerpo:

$$\left(E_{C,fin} + E_{P,fin}\right) - \left(E_{C,ini} + E_{P,ini}\right) = -F_R \cdot \Delta x \Rightarrow \left(0 + 0\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0\right) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta x$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v^2 = -\mu \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{\left(3 \text{ m/s}\right)^2}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = \mathbf{2{,}30 \text{ m}}$$

**40. Se construye un péndulo colgando un cuerpo de 1 kg de una cuerda de 1 m. Se le hace oscilar de manera que el cuerpo llega a subir hasta una altura de medio metro en la posición más elevada. Calcula la velocidad en el punto más bajo de las dos formas siguientes.**

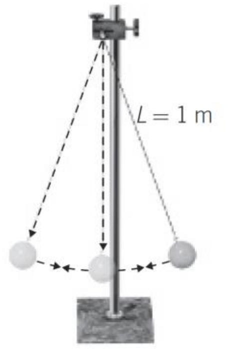
**a) Utilizando el principio de conservación de la energía.**

**b) Considerando que describe un MAS.**

**c) Explica las diferencias que se obtienen entre ambos resultados.**

**Dato: $g$ = 9,8 m/s².**

a) Según el principio de conservación de la energía:




$$E_{M,A} = E_{M,B} \Rightarrow E_{C,A} + E_{P,A} = E_{C,B} + E_{P,B} \Rightarrow E_{C,A} + 0 = 0 + E_{P,B}$$

Tomando como cero de energía potencial la que tiene la bola en el punto más bajo:

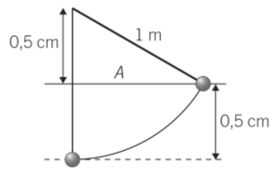
$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 = \cancel{m} \cdot g \cdot h$$

$$v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}5 \text{ m}} = \mathbf{3{,}13 \text{ m/s}}$$

b) Si describe un MAS, en el punto más bajo de la trayectoria tendrá una velocidad:

$$v_{máx} = \omega \cdot A = \frac{2\pi}{T} \cdot A$$

El periodo del péndulo es:




$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 2 \text{ s}$$

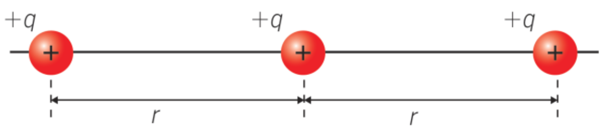
Calculamos $A$ por medio de la relación trigonométrica:

$$A = \sqrt{(1 \text{ m})^2 + (0{,}5 \text{ m})^2} = 0{,}8660 \text{ m}$$

Entonces:

$$v_{máx} = \frac{2\,\pi}{2 \text{ s}} \cdot 0{,}8660 \text{ m} = \mathbf{2{,}72 \text{ m/s}}$$

**41. Se dispone un sistema de cargas eléctricas positivas, puntuales, del mismo valor y alineadas tal como indica la figura.**




**Justifica en tu cuaderno, qué expresión matemática expresa la energía potencial electrostática del sistema.**

**a)** $2 \cdot k \cdot \frac{q^2}{r}$ **b)** $3 \cdot k \cdot \frac{q^2}{2 \cdot r}$ **c)** $5 \cdot k \cdot \frac{q^2}{2 \cdot r}$

La energía potencial del sistema es la suma de la energía potencial de todas las parejas de cargas que se puedan establecer:

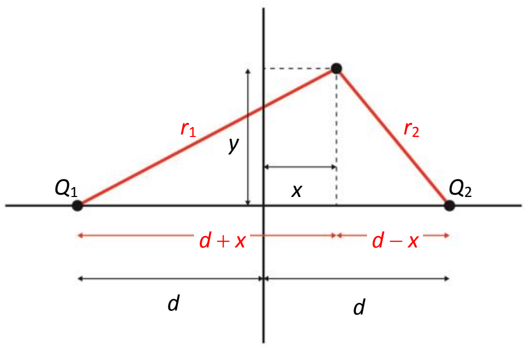
$$E_P = k \cdot \frac{q \cdot q}{r} + k \cdot \frac{q \cdot q}{r} + k \cdot \frac{q \cdot q}{2 \cdot r} = 5 \cdot k \cdot \frac{q \cdot q}{2 \cdot r}$$

Por tanto, la respuesta correcta es la **c**.

**42. Sean dos cargas, $Q_1$ y $Q_2$, colocadas en los puntos del plano *XY* dados por (–*d*, 0) y (*d*, 0), respectivamente. Si $Q_1 > 0$ y $Q_2 < 0$ y se cumple $|Q_1| = 4 \cdot |Q_2|$, averigua en qué puntos del plano *XY* el potencial electrostático es nulo.**

El potencial total en un punto se calcula con la suma $V_T = V_1 + V_2$. Para que se anule buscamos los puntos que cumplan:

$$|V_1| = |V_2| \Rightarrow \cancel{k} \cdot \frac{|Q_1|}{r_1} = \cancel{k} \cdot \frac{|Q_2|}{r_2}$$




Donde $r_1 = \sqrt{y^2 + (d+x)^2}$ y $r_2 = \sqrt{y^2 + (d-x)^2}$. Teniendo en cuenta que $|Q_1| = 4 \cdot |Q_2|$:

$$\frac{4 \cdot \cancel{|Q_2|}}{\sqrt{y^2 + (d+x)^2}} = \frac{\cancel{|Q_2|}}{\sqrt{y^2 + (d-x)^2}}$$

$$\frac{16}{y^2+(d+x)^2}=\frac{1}{y^2+(d-x)^2}$$
$$16\cdot\left(y^2+d^2+x^2-2\,d\cdot x\right)=y^2+d^2+x^2+2\,d\cdot x$$
$$15x^2+15y^2-34\,d\cdot x+15\cdot d^2=0$$

Por tanto, los puntos del plano *XY* en los que se anula el potencial electrostático verifican la ecuación:

$$\mathbf{15x^2+15y^2-34\,d\cdot x+15\cdot d^2=0}$$

**43. Calcula:**

**a) La velocidad de escape desde la superficie de la Luna.**

**b) Se lanza verticalmente un objeto desde la superficie de la Luna con velocidad inicial igual a la de escape. ¿A qué distancia del centro de la Luna se reduce su velocidad a la mitad de la inicial?**

**Datos: $G$ = 6,67 · 10$^{-11}$ N · m$^2$/kg$^2$; masa y radio de la Luna: $M_L$ = 7,35 · 10$^{22}$ kg, $R_L$ = 1,74 · 10$^6$ m.**

a) La velocidad de escape en la Luna es:

$$v_e=\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_L}{R_L}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}74\cdot 10^6\ \text{m}}}=\mathbf{2360\ m/s}$$

b) Suponiendo que la única interacción a la que está sometido el objeto es la atracción gravitatoria que ejerce la Luna, se conservará su energía mecánica en relación con esta fuerza central. Llamando punto A al punto de lanzamiento y punto B al punto en el que su velocidad es la mitad de la inicial:

$$E_{M,A}=E_{M,B}\quad\Rightarrow\quad E_{C,A}+E_{P,A}=E_{C,B}+E_{P,B}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot v_{\text{escape}}^2-G\cdot\frac{M_L\cdot\cancel{m}}{R_L}=\frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot\left(\frac{v_{\text{escape}}}{2}\right)^2-G\cdot\frac{M_L\cdot\cancel{m}}{r}$$
$$\frac{1}{2}\cdot v_{\text{escape}}^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v_{\text{escape}}}{2}\right)^2=G\cdot\frac{M_L}{R_L}-G\cdot\frac{M_L}{r}\quad\Rightarrow\quad\frac{3}{8}\cdot v_{\text{escape}}^2=G\cdot M_L\left(\frac{1}{R_L}-\frac{1}{r}\right)$$

Teniendo en cuenta la expresión de la velocidad de escape:

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2\cdot\cancel{G\cdot M_L}}{R_L}=\cancel{G\cdot M_L}\left(\frac{1}{R_L}-\frac{1}{r}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{3}{4\cdot R_L}=\frac{1}{R_L}-\frac{1}{r}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{r}=\frac{1}{4\cdot R_L}\quad\Rightarrow\quad r=4\cdot R_L$$

Sustituyendo los datos:

$$r=4\cdot 1{,}74\cdot 10^6\ \text{m}=\mathbf{6{,}96\cdot 10^6\ m}$$

**44. Los NOAA son una familia de satélites meteorológicos de EE. UU. Algunos de ellos orbitan la Tierra pasando sobre los polos, con un periodo aproximado de 5 horas. Calcula:**

**a) La altura a la que orbitan sobre la superficie de la Tierra.**

**b) La velocidad con que lo hacen.**

**Datos: $R_T$ = 6370 km; $M_T$ = 5,97 · 10$^{24}$ kg; $G$ = 6,67 · 10$^{-11}$ N · m$^2$/kg$^2$.**

a) Para el satélite que gira a una altura *h*:

$$F_G=F_C\quad\Rightarrow\quad G\cdot\frac{M_T\cdot\cancel{m_S}}{r^2}=\cancel{m_S}\cdot\frac{v^2}{r}\quad\Rightarrow\quad\frac{G\cdot M_T}{r}=v^2$$

El periodo es:

$$T=5\ \cancel{\text{h}}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}=18\,000\ \text{s}$$

Como conocemos el tiempo que tarda en dar una vuelta, ponemos *v* en función de *T*:

$$v=\omega\cdot r=\frac{2\pi}{T}\cdot r\quad\Rightarrow\quad v^2=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot r^2$$

Igualando las dos expresiones anteriores:

$$G \cdot \frac{M_T}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^2$$

Despejando *r* podremos calcular el radio de la órbita:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}}$$

Sustituyendo los datos y operando:

$$r = \sqrt[3]{\frac{(18\,000\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4\pi^2}} = 1{,}484 \cdot 10^7\ \text{m}$$

Para conocer la altura a la que orbita sobre la superficie terrestre:

$$h = r - R_T = 1{,}484 \cdot 10^7\ \text{m} - 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} = \mathbf{8{,}47 \cdot 10^6\ m}$$

b) Para el satélite que gira a una altura *h*:

$$F_G = F_C \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m_S}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_S} \cdot v^2}{\cancel{r}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{8{,}47 \cdot 10^6\ \text{m}}} = \mathbf{5180\ m/s}$$

**45. Calcula el radio que debería tener la Tierra, conservando su masa, para que la velocidad de escape desde la superficie terrestre fuese igual a la velocidad de la luz en el vacío, *c* = 300 000 km/s.**

**Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².**

A partir de la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}} \quad \Rightarrow \quad R_T = \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{v_e^2} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(3 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2} = 8{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \simeq \mathbf{9\ mm}$$

## FÍSICA EN TU VIDA (página 356)

### INTERPRETA

**1. Cada uno de los cuatro satélites de la constelación tiene una masa de 1200 kg. Calcula la energía potencial gravitatoria de C3 y C1 aquel 5 de junio de 2009.**

Aplicamos la expresión de la energía potencial gravitatoria para cada uno de los satélites:

$$E_{P,G,C3} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_{C3}}{(R_T + h_{C3})} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 1200\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}} = \mathbf{-3{,}74 \cdot 10^{10}\ J}$$

$$E_{P,G,C1} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_{C1}}{(R_T + h_{C1})} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 1200\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 9 \cdot 10^6\ \text{m}} = \mathbf{-3{,}11 \cdot 10^{10}\ J}$$

### USA LAS TIC

**2. Investiga sobre más características del programa Cluster en la web de la Agencia Espacial Europea:**

http://sci.esa.int/cluster

Accedemos al enlace web propuesto y nos informamos sobre el programa Cluster, prestando especial atención a los últimos descubrimientos.

## REFLEXIONA

**3.** **¿Qué ventajas puede aportar para nuestra vida cotidiana este tipo de investigaciones acerca de la magnetosfera?**

El mayor conocimiento científico siempre repercute positivamente en la sociedad. Investigar la magnetosfera nos ha permitido conocer la estructura de esta capa que nos protege del Sol, así como el funcionamiento de fenómenos naturales como las tormentas solares, el viento magnético y las auroras boreales. Todo ello resulta fundamental para prever los posibles cambios en la Tierra, como pueden ser las variaciones del campo magnético terrestre y su influencia en las telecomunicaciones vía satélite.

## OPINA

**4.** **El programa Cluster, como todos los de la Agencia Espacial Europea, es un programa de cooperación internacional. ¿Qué opinión te merece que diferentes estados pongan de acuerdo sus recursos, económicos y personales, para este tipo de investigaciones?**

Resulta ventajoso llevar a cabo investigaciones en las que participen distintos países, ya que de esta forma, podemos optimizar los recursos materiales, económicos y humanos de los distintos miembros, sacando el máximo rendimiento científico al programa de investigación. La cooperación es algo fundamental en los programas de I+D+i. Por tanto, se trata de actuaciones que podemos valorar como positivas.