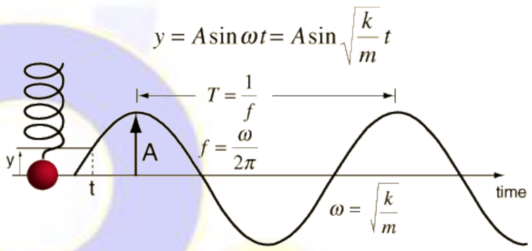
Tema 8: Movimiento Ondulatorio

8.0.- Introducción

Una partícula tiene movimiento oscilatorio cuando se mueve alrededor de una posición de equilibrio, pasando alternativamente (en un sentido y en el contrario) por ésta. El movimiento de un péndulo, las vibraciones de un muelle, o las oscilaciones de un cuerpo que flota en el agua constituyen ejemplos de movimientos oscilatorios.

Si las oscilaciones se repiten cada cierto tiempo fijo, se dice que las oscilaciones son periódicas, y el movimiento es oscilatorio periódico.

Ejemplos de este movimiento pueden ser, un péndulo simple o un muelle del que colgamos un cuerpo de masa m.



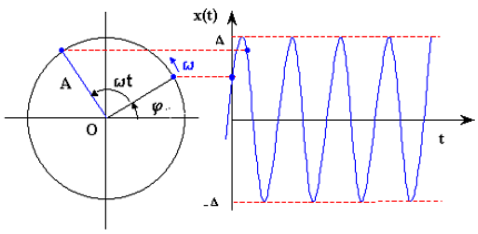
8.1.- Movimiento Oscilatorio. Movimiento Armónico Simple

El movimiento oscilatorio de un cuerpo sobre una trayectoria recta es ***armónico simple*** cuando está sometido a la acción de una fuerza de atracción proporcional al vector de posición, con origen en su punto de equilibrio o centro de oscilación, y de sentido contrario.

El **movimiento armónico simple** (se abrevia m.a.s.), es un movimiento periódico que queda descrito en función del tiempo por una función armónica (seno o coseno), es un caso particular de movimiento oscilatorio periódico. Lo estudiaremos por dos razones:

1) Es el más sencillo de los movimientos oscilatorios.
2) Cualquier otro movimiento oscilatorio puede descomponerse en suma de m.a.s. (Análisis de Fourier).

8.1.1.- Cinemática del M.A.S.



Para deducir la ecuación del m.a.s. tendremos en cuenta que éste puede considerarse como la proyección de un punto que se mueve con m.c.u. de radio A sobre el diámetro vertical (ver figura). Entonces, se observa que el movimiento descrito por la proyección de ese punto es...

- ...rectilíneo, pues sigue una trayectoria recta (el diámetro).
- ...oscilatorio o vibratorio, puesto que la posición respecto al origen pasa por un valor máximo y otro mínimo.

Si escogemos como eje X el eje vertical, tendremos que si la partícula ha girado inicialmente, para t = 0, un ángulo φ_o, su posición sobre dicho eje vendrá dada por:

$$x = A \cdot sen(\omega t + \varphi_o)$$

Caracterísitcas de un M.A.S.

- ***Vibración u oscilación*** es la distancia recorrida por la partícula en un movimiento completo de vaivén.

- ***Centro de Oscilación***, ***O***, es el punto medio de la distancia que separa las dos posiciones extremas alcanzadas por la partícula móvil.

- ***Elongación***, ***x***, es la distancia que en cada instante separa la partícula del centro de oscilación, O, tomado como origen de las elongaciones. Su valor es positivo o negativo de acuerdo con el criterio cartesiano de signos, derecha positivo e izquierda negativo. En el S.I. se expresa en m.

- ***Amplitud***, ***A***, es el valor máximo de la elongación, o separación máxima con respecto a la posición de equilibrio de la partícula que vibra u oscila. En el S.I. se expresa en m.

- Al ángulo $\omega t + \varphi$ se le llama ***fase***, determina el estado de vibración del objeto, permite calcular la elongación en cualquier instante y se mide en radianes (rad) en el S.I.; φ_o es la ***fase inicial*** o constante de fase, y nos indica el estado de vibración del objeto al comenzar la medida del tiempo (t=0).

  Según esto:
  - Dos puntos tienen igual fase si se mueven en el mismo sentido y sus elongaciones son iguales en valor y signo.
  - Dos puntos tienen fase opuesta si sus elongaciones son iguales en valor, pero de signo contrario.

- ***Longitud de onda***, λ , es la distancia que separa dos puntos consecutivos que tienen igual fase.

- ***Período*** (***T***) es el tiempo que el objeto tarda en volver a pasar por la misma posición, o el tiempo que tarda en describir una oscilación completa.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- ***Frecuencia*** (***f***) se define como el número de oscilaciones descritas en un segundo. Su unidad en el S.I. es el hertzio (Hz), y se calcula a partir del período mediante la ya conocida expresión:

$$f = \frac{1}{T}$$

- ***Frecuencia angular o pulsación***, ω , es el número de periodos comprendidos en 2π unidades de tiempo y su valor depende de la rapidez con que oscila o vibra el objeto. Se mide en rad/s en el S.I., y está relacionada con el período mediante:

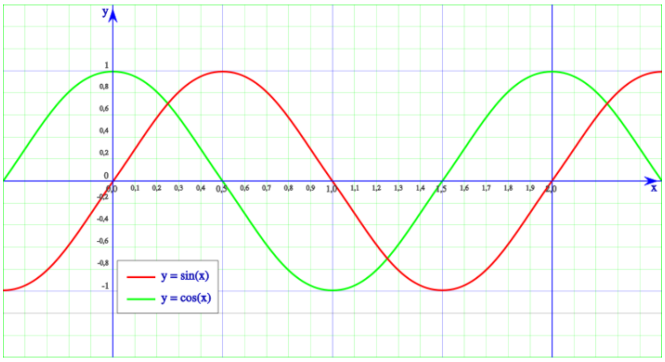
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

✔ Las constantes del m.a.s. son los valores de A, ω y φ_o de cada movimiento concreto.
✔ Llamamos oscilador armónico o mecánico a cualquier partícula que describa un m.a.s.

OBSERVACIÓN: La ecuación del m.a.s. también puede escribirse utilizando una función coseno:

$$\boldsymbol{x = A \cos(\omega t + \varphi_o)}$$

Se trata, en realidad, de la misma expresión que hemos escrito antes; la única diferencia es que entre ambas existe un desfase de $\pi/2$ radianes.



Mediante relaciones trigonométricas podemos transformar la ecuación con seno en la ecuación con coseno, ya que:

$$sen\left(\omega t+\varphi_o\right)=\cos\left(\omega t+\varphi_o-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\omega t+\varphi_o\right)=sen\left(\omega t+\varphi_o+\frac{\pi}{2}\right)$$

De la misma forma, si trabajamos en el eje y, podemos encontrar que la ecuación de un m.a.s. puede ser:

$$\boldsymbol{y = A\cos(\omega t + \varphi_o)}$$

Ejemplo 8.1.- Una partícula oscila según un MAS de manera que su posición viene dada por la ecuación: $x=0{,}05\cos\left(24t+\frac{\pi}{4}\right)$. Calcular:

a) La posición en t=3 seg
b) La frecuencia y el periodo de su movimiento
c) La posición en el momento inicial
d) La ecuación del movimiento en la forma seno.

a) Sustituyendo t=3, tenemos $x=0{,}05\cos\left(24\cdot 3+\frac{\pi}{4}\right)=-0{,}043m$

b) La frecuencia $\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{24}{2\pi}=3{,}81Hz$ y el periodo: $T=\frac{1}{\nu}=0{,}26s$

c) Para t=0 se tiene $x_o=0{,}05\cos\left(24\cdot 0+\frac{\pi}{4}\right)=0{,}05\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0{,}035m$

$x=0{,}05sen\left(24t+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=0{,}05sen\left(24t-\frac{\pi}{4}\right)$

8.1.1.1.- Ecuación de la velocidad

Para hallar la velocidad (instantánea) de una partícula que se mueve con m.a.s. derivamos la ecuación de movimiento, que nos indica la posición o elongación de la partícula en cualquier instante, con respecto al tiempo:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(A\cdot Sen\left(\omega t+\varphi_o\right)\right)=A\cdot\omega\cdot Cos\left(\omega t+\varphi_o\right)$$

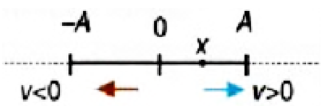
Ahora bien, sabemos que $sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$; así pues, la velocidad también puede expresarse en función de la elongación de la manera siguiente:

$$v=A\cdot\omega\left(\pm\sqrt{1-Sen^2\left(\omega t+\varphi_o\right)}\right)=\pm\omega\sqrt{A^2-A^2Sen^2\left(\omega t+\varphi_o\right)}=\pm\omega\sqrt{A^2-X^2}$$

De donde podemos deducir:

- La velocidad de un m.a.s. se repite periódicamente, es decir, varía en función del tiempo.

- El valor de la velocidad depende de la posición (o elongación); los dos signos nos indican el sentido del movimiento de acuerdo con el criterio cartesiano de signos (ver dibujo a la derecha). Es decir, la dirección de la velocidad es la de la recta en la que tiene lugar el movimiento, y su sentido es el mismo que el de éste.



- El valor máximo de la velocidad, $\pm\omega A$, se alcanza en el centro de la trayectoria (o posición de equilibrio) y se anula en los extremos. Esto es lógico, ya que en dichos puntos se invierte el sentido del movimiento y la velocidad pasa de positiva a negativa, y viceversa.

Ejemplo 8.2.- Un cuerpo vibra con MAS según la ecuación $x = 0{,}05\cdot sen\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$, en unidades SI. Calcula: a) El valor de la elongación cuando t=πs, b) La velocidad del cuerpo cuando t=π/2s, c) El periodo y la frecuencia.

a) Sustituyendo directamente en la ecuación, obtenemos; $x = 0{,}05\cdot sen\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}05m$

b) La velocidad vendrá dada por la derivada de x con respecto al tiempo:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}05\cdot sen\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0{,}05\cdot 3\cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}15\cdot\cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Si sustituimos t=π/2 , tenemos:

$$\upsilon = 0{,}15\cdot\cos\left(3\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}15\cdot\cos\left(4\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}15\ m\cdot s^{-1}$$

c) El periodo, viene dado por: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} = 2{,}09\ s$, mientras que la frecuencia será: $f = \frac{1}{T} = 0{,}48\ Hz$

8.1.1.2.- Ecuación de la Aceleración

Propiedades del MAS

— Movimiento *periódico* y *oscilatorio* de trayectoria recta.

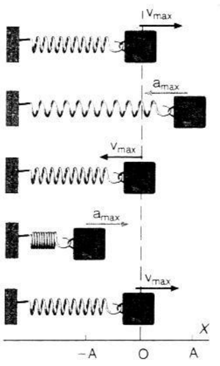
— La *elongación*, la *velocidad* y la *aceleración* varían periódicamente con el tiempo en forma sinusoidal, aunque entre ellas hay diferencia de fase.

— La *aceleración* es directamente proporcional a la elongación y de sentido contrario.

— El *período* y la *frecuencia* son independientes de la amplitud del movimiento.

Recuerda

Posiciones de velocidad y aceleración máximas en un MAS.



t	x	v	a
0	0	$+A\omega$	0
$\frac{T}{4}$	$+A$	0	$-A\omega^2$
$\frac{T}{2}$	0	$-A\omega$	0
$\frac{3T}{4}$	$-A$	0	$+A\omega^2$
T	0	$+A\omega$	0

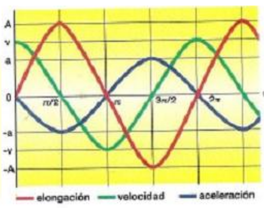
Para hallar la aceleración (instantánea) de una partícula que se mueve con m.a.s. (que será una aceleración tangencial) derivamos la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cdot\omega\cdot Cos\left(\omega t+\varphi_o\right)\right) = -A\cdot\omega^2\cdot sen\left(\omega t+\varphi_o\right) = -\omega^2\cdot x$$

<u>De donde podemos deducir:</u>

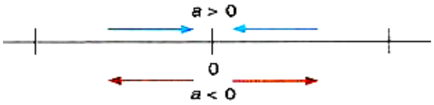
- La aceleración de un m.a.s. se repite periódicamente, es decir, en función del tiempo.

- La velocidad y la aceleración están desfasadas un ángulo de $\pi/2$ rad; la posición y la aceleración están desfasadas un ángulo de π rad. Así, si se representa la fase en el eje X y la elongación, velocidad y aceleración en el eje Y, se obtienen unas gráficas que representan la variación de dichas magnitudes en el tiempo (ver figura adjunta). Vemos que los valores de la elongación y de la aceleración se anulan simultáneamente en la posición de equilibrio, siendo sus sentidos opuestos en todo momento; sin embargo, la velocidad es máxima, en uno u otro sentido, cuando la elongación es nula, y en los puntos de máximo valor de la elongación (extremos de la trayectoria) es donde la velocidad se hace cero.



- El hecho de que la aceleración sea proporcional a la elongación y de signo contrario es una de las propiedades características del m.a.s. (o de los osciladores armónicos), y nos indica que la aceleración está siempre dirigida hacia el centro de la vibración o punto de equilibrio.

- El valor máximo de la aceleración, $\mp\omega^2\cdot A$, se alcanza en los extremos, y se anula en el punto de equilibrio (x=0), tal y como se muestra en la figura de la izquierda.



En resumen, en todo M.A.S. se cumple que:

✓ La elongación, la velocidad y la aceleración varían periódicamente con el tiempo, pero no están en fase.

✓ La aceleración del móvil es proporcional a la elongación, pero de sentido opuesto.

✓ La frecuencia y el periodo del movimiento son independientes de la amplitud.

8.1.2.- Dinámica del M.A.S.

El m.a.s. es acelerado (a > 0) cuando la partícula que vibra se dirige hacia la posición de equilibrio, y es retardado (a < 0) cuando la partícula se dirige a los extremos. Ello implica que la fuerza que origina este movimiento tiende a llevar la partícula hacia la posición de equilibrio; a tales fuerzas se les ***llama fuerzas restauradoras o recuperadoras***, y la fuerza elástica es un ejemplo de ellas.

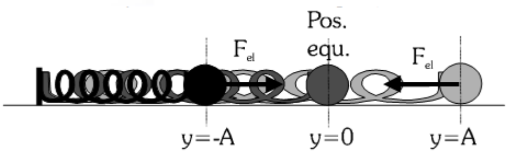
La fuerza recuperadora que origina el m.a.s. es directamente proporcional a la elongación de la partícula y se opone al aumento de dicha elongación; de acuerdo con la 2ª ley de Newton y la ley de Hooke:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad -k \cdot x = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad -k \cdot x = -m \cdot \omega^2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

La constante elástica o recuperadora, k, es característica de cada oscilador, y se mide en N/m. Así pues, resumiendo, si un cuerpo que se mueve sobre una recta está sometido a la acción de una fuerza atractiva hacia un punto fijo, la cual es directamente proporcional a la distancia que lo separa de él, el cuerpo realizará un movimiento vibratorio armónico simple cuyo periodo vendrá dado por la expresión anterior.

Estudiemos algunos casos concretos:

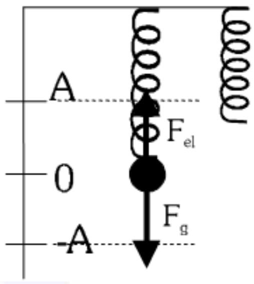
Muelle horizontal sin rozamiento: Es el caso más simple. La fuerza resultante sobre el cuerpo es la fuerza elástica.



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad -k \cdot x = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad -k \cdot x = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

De donde: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Muelle en vertical: Ahora incluimos la acción de la fuerza gravitatoria. De partida, al colgar el cuerpo, cambia la posición de equilibrio (y_{eq}). El cuerpo estaría en reposo cuando $\vec{F}_{el} + \vec{P} = 0$, por tanto $K \cdot y_{eq} = m \cdot g$ y despejando la posición de equilibrio, tenemos:

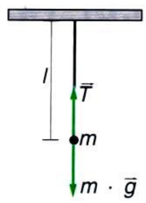


$$y_{eq} = \frac{m \cdot g}{k}$$

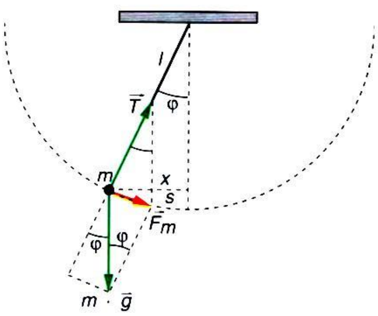
En la posición de equilibrio el muelle ya está algo estirado. (***Deflexión estática***).

Ese es el único efecto que va a tener la fuerza gravitatoria, modificar la posición de equilibrio. Al desviar el cuerpo de esta posición, comenzará a oscilar en torno a ese punto debido a la acción de la fuerza elástica, y las ecuaciones vuelven a ser las que hemos visto, siempre tomando como punto de referencia la nueva posición de equilibrio.

El péndulo simple: Es un sistema ideal formado por una masa puntual, m, suspendida de un hilo inextensible y sin masa, de longitud l.



En su posición de equilibrio, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la masa es nula.



$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Cuando se separa el péndulo de su posición de equilibrio, dicha resultante ya no es nula. El peso tiene dos componentes, de las cuales la perpendicular a la dirección del movimiento se contrarresta con la Tensión:

$$\vec{T} + m\vec{g}\cos\varphi = 0$$

Y aplicando la segunda ley de Newton, tenemos:

$$-mgsen\varphi = m\cdot a \quad \Rightarrow \quad a = -g\cdot sen\varphi$$

Aceleración que se opone al movimiento.

Si suponemos que la oscilación es de ángulo muy pequeño, podemos aproximar el seno al ángulo: $sen\varphi \simeq \varphi$. Y la ecuación quedaría: $a = -g\cdot\varphi$. Además si escribimos la relación entre el arco y el ángulo:

$$\varphi = \frac{s}{l} \simeq \frac{x}{l}$$

Entonces la aceleración queda:

$$a = -g\cdot\frac{x}{l}$$

Como en un m.a.s. sabemos que la aceleración viene dada por la segunda derivada de la elongación:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cdot\omega\cdot Cos\left(\omega t + \varphi_o\right)\right) = -A\cdot\omega^2\cdot sen\left(\omega t + \varphi_o\right) = -\omega^2\cdot x$$

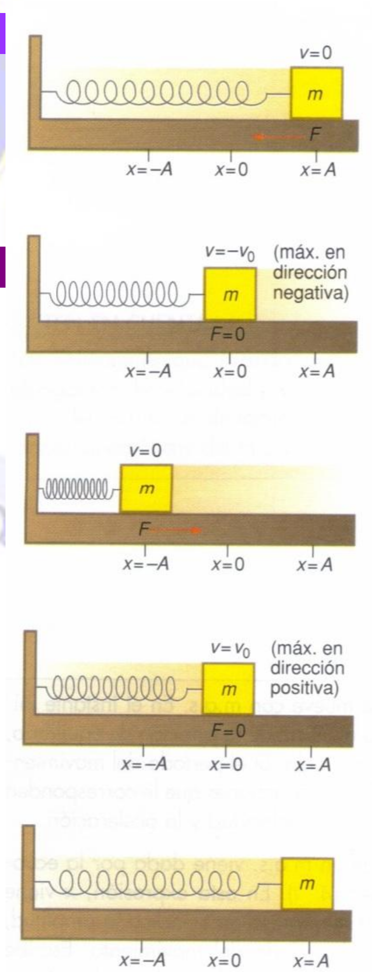
Sustituyendo, tenemos:

$$-\omega^2\cdot x = -g\cdot\frac{x}{l}$$

De donde despejando la pulsación, tenemos: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Y de aquí, el periodo será: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ y la frecuencia: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

8.1.3.- Energía asociada a un M.A.S.



Nos centraremos en el m.a.s. que describe un cuerpo unido a un resorte horizontal sobre una superficie sin rozamiento. (Es el caso más sencillo y el estudio es similar en otros casos.)

8.1.3.1.- Energía cinética un oscilador armónico

La energía cinética de un oscilador armónico viene dada por la expresión ya conocida por todos:

$$E_c = \frac{1}{2}m\cdot v^2$$

Sustituyendo v por el valor de la velocidad en un m.a.s.:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cdot Sen\left(\omega t + \varphi_o\right)\right) = A\cdot\omega\cdot Cos\left(\omega t + \varphi_o\right)$$

Tenemos:

$$E_c = \frac{1}{2}m\cdot A^2\cdot\omega^2\cdot\cos^2(\omega t + \varphi_o)$$

Como la velocidad también la podemos escribir como: $\pm\omega\sqrt{A^2 - X^2}$, la energía cinética queda:

$$E_c = \frac{1}{2}m\cdot\omega^2\left(A^2 - X^2\right)$$

8.2.3.1.- Energía potencial de un oscilador armónico

Por estar ligado al muelle, el cuerpo también posee energía potencial elástica que viene dada por:

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Si expresamos k en función de la pulsación y de la masa: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, tenemos:

$$E_p = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot x^2$$

Y si sustituimos x, por la ecuación de la elongación $x = A \cdot sen(\omega t + \varphi_o)$, quedará:

$$E_p = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 sen^2 (\omega t + \varphi_o)$$

8.2.3.1.- Energía Mecánica de un oscilador armónico

Conocidas la energía potencial y cinética de un oscilador armónico en un punto cualquiera, de elongación x, podemos calcular su energía mecánica.

$$E_M = E_c + E_p$$

Por tanto:

$$E_M = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_o) + \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 sen^2 (\omega t + \varphi_o) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \left(\cos^2(\omega t + \varphi_o) + sen^2(\omega t + \varphi_o)\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

De donde:

La energía mecánica que posse en cada instante un sistema que se mueve con un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud de la vibración.

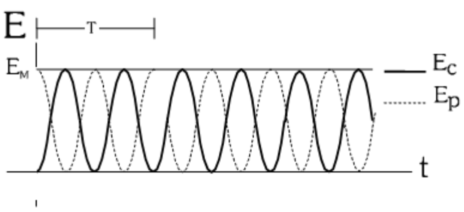
Como $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = 4\pi^2 \cdot \upsilon^2$, sustituyendo tenemos:

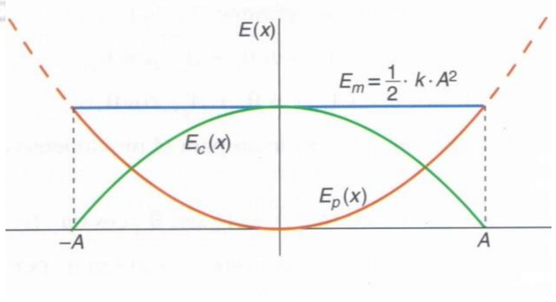
$$E_M = 2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \upsilon^2 \cdot A^2$$

De donde:

La energía de una m.a.s. es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia de la vibración.

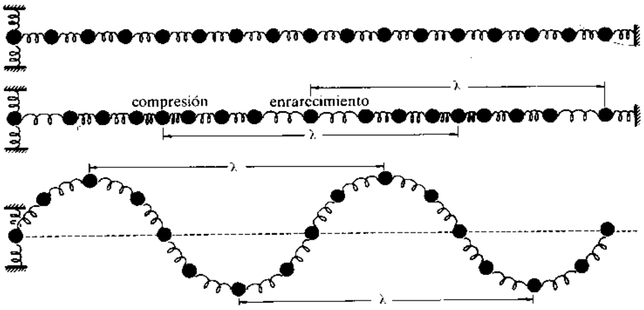
Al mantenerse constante la E_M, tendremos que $\Delta E_c = -\Delta E_{p_{el}}$, es decir, cuando la E_c es máxima, la E_p es nula, y viceversa. La variación podemos verla en las siguientes gráficas, respecto al tiempo y al desplazamiento.





8.2.- Movimiento Ondulatorio. Características

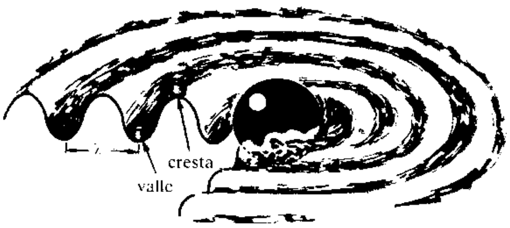
Movimiento Ondulatorio es la propagación de un movimiento oscilatorio en el seno de un medio elástico a través de sus partículas, las cuales, oscilan y obligan a oscilar a las partículas próximas transmitiendo la vibración de un centro emisor a otro.



En general se denomina ***onda*** a toda perturbación que se propaga, o también a la posición que adopta en cada instante la perturbación que se transmite a través del medio elástico, entendiendo por ***perturbación*** a toda energía que, al ser comunicada a un punto es capaz de propagarse.

Desde ahora ha de quedar muy claro que en el movimiento ondulatorio se propaga la energía, pero no las partículas que han recibido esa energía.

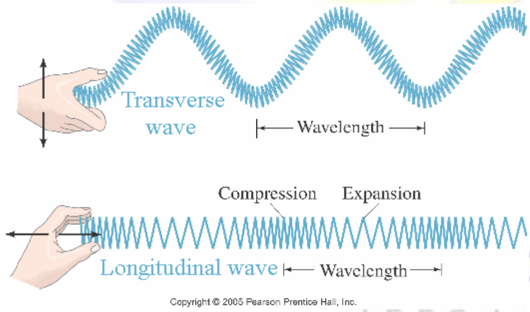
Así por ejemplo: dejando caer una piedra en un estanque en el que flotan algunos corchos, se observa que las partículas superficiales del agua, juntamente con los corchos a ellas adheridos, vibran ***verticalmente***, subiendo y bajando, pero sin desplazarse ***horizontalmente***. En cambio las circunferencias concéntricas (ondas) que se producen alrededor de la piedra en forma de elevaciones (crestas) y depresiones (valles) avanzan ***horizontalmente*** hacia la orilla.

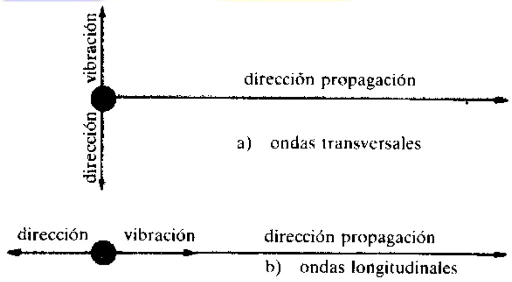


Es decir, no se propaga la partícula vibrante, sino la energía que posee.

8.2.1.- Tipos de Ondas

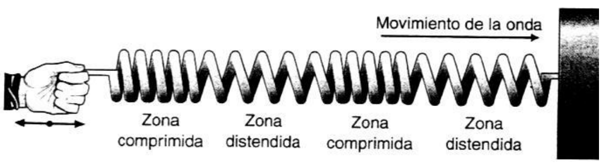
Según la relación que exista entre la ***dirección de propagación*** del movimiento y ***la dirección de vibración*** de cada partícula, las ondas pueden ser ***transversales*** y ***longitudinales***.





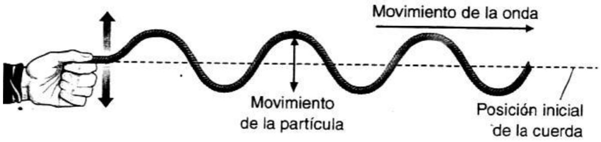
8.2.1.1.- Ondas Longitudinales

Son aquellas en las que las partículas vibran en la misma dirección que la propagación.

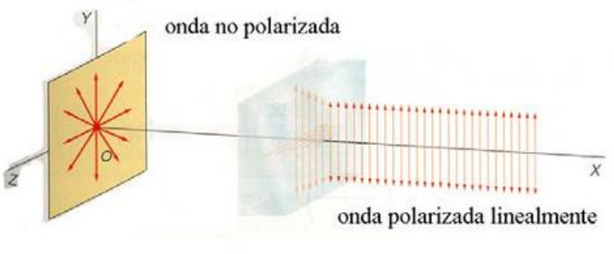


8.2.1.2.- Ondas Transversales. Polarización

Son aquellas en las que las partículas vibran perpendicularmente a la dirección de propagación.



Cuando una onda transversal se propaga, la perturbación puede llevar cualquier dirección, siempre que forme 90º con la de propagación. Esto es lo que ocurre normalmente (con la luz, por ej., los campos eléctricos y magnéticos que componen la perturbación van cambiando de dirección aleatoriamente, aunque siempre perpendiculares a la propagación). Se dice entonces que la onda no está polarizada. Si mediante algún procedimiento conseguimos que la dirección de la perturbación se mantenga fija, diremos que ha ocurrido una polarización. La onda estará ***polarizada***.



Para la luz, esto se consigue mediante unas sustancias llamadas polarizadores. Son sustancias (cristales o plásticos) que por su composición química sólo permiten que los atraviese la luz cuyo campo eléctrico vaya en una dirección determinada.
De lo contrario la luz es absorbida.

8.2.2.- Magnitudes características de las ondas

Las ondas que vamos a estudiar en el próximo apartado del tema son aquellas en las que el movimiento de las partículas del medio (la perturbación) es un m.a.s. Se denominan ondas armónicas.

Para estudiar la propagación de la onda, necesitamos conocer tanto la magnitudes de la perturbación (del m.a.s. originado en el foco) como las magnitudes de la propagación por el medio.

8.2.2.1.-Magnitudes dependientes del foco emisor

Son aquellas características del m.a.s. y que hemos visto con anterioridad:

- ✓ ***Periodo:*** (T)
- ✓ ***Frecuencia***: (υ)
- ✓ ***Frecuencia angular***: (ω)
- ✓ ***Fase inicial***: (ϕ_0)
- ✓ ***Amplitud***: (A)

8.2.2.2.-Magnitudes dependientes del medio

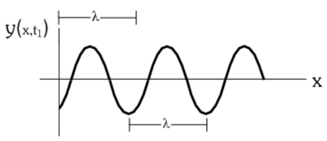
- ✓ ***Velocidad de propagación***: (v) Velocidad a la que se transmite la energía de una partícula a otra del medio. Si las características del medio se mantienen constantes, también la velocidad de propagación será una constante.

Por ser uniforme el movimiento ondulatorio, de la definición de periodo se deduce la velocidad de propagación: relación entre un espacio recorrido igual a la longitud de onda y el tiempo invertido en recorrerlo.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{1/\upsilon} = \lambda \cdot \upsilon$$

8.2.2.3.-Magnitudes dependientes tanto del foco como del medio

- ✓ **Longitud de onda:** (λ) Distancia más corta entre dos puntos del medio que tienen el mismo valor de la perturbación. Es decir, es la distancia a la que se repite el valor de la perturbación. En el S.I. se mide en m.



La longitud de onda está relacionada con la velocidad de propagación mediante las expresiones:

$$\lambda = v \cdot t \qquad \lambda = \frac{v}{\upsilon} = \frac{v}{f}$$

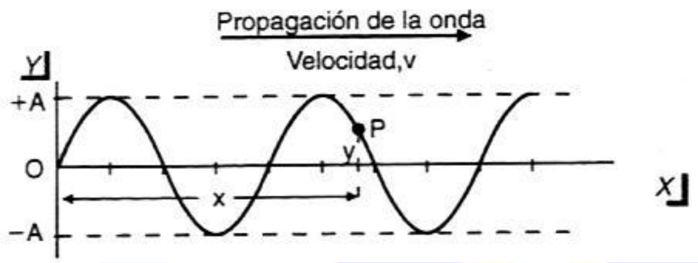
- ✓ **Número de onda:** (k) Es una magnitud inversa a la longitud de onda. Su unidad en el S.I. es rad/m.
Se calcula mediante la expresión:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad k = \frac{\omega}{v}$$

8.3.- Ecuación del Movimiento Ondulatorio. Ondas Armónicas

Llamamos ***ondas armónicas*** a las que tienen su origen en las perturbaciones producidas en un medio elástico por un movimiento armónico simple

Supongamos una onda armónica unidimensional que se propaga a lo largo del eje X en sentido positivo, como consecuencia de cierta perturbación periódica producida en el punto O.



La expresión matemática que describe el estado de vibración de cada partícula en función del tiempo es:

$$y = A \cdot sen(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_o)$$

Conocida como ***ecuación del movimiento ondulatorio armónico*** o ***función de onda***.

La ***función de onda, y***, representa el valor de la elongación para cada punto del medio en función del tiempo.

Donde:

- Y es la elongación
- A es la amplitud
- ω es la pulsación o frecuencia angular
- K es el número de ondas
- X es la distancia recorrida.
- φ_o es la fase inicial

Concordancia en fase:
Dos puntos de una onda están en ***concordancia de fase*** cuando la diferencia de fase entre ellos vale 2πn, con n número entero. En cualquier instante su sentido de vibración es el mismo,

Dos puntos de una onda están en ***oposición de fase*** si la diferencia entre ellos es de (2n+1)π. En cualquier instante su estado de vibración es opuesto.

Si sustituimos ω y k por su valor, obtenemos:

$$y = A \cdot sen\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Si la onda se propagara en el sentido negativo del eje x, su expresión sería: $y = A \cdot sen(\omega t + k \cdot x)$

Ejemplo 8.3.- La función de onda de una onda armónica en una cuerda viene dada en unidad es SI por: $y = 0{,}001 \cdot sen(314 \cdot t + 62{,}8 \cdot x)$. Determina: a) En qué sentido se mueve la onda y con qué velocidad, b) La longitud de onda, el periodo y la frecuencia, c) las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración en función del tiempo para un partícula que se encuentra en el punto x=-3 cm.

a) Comparando la función de onda dada con la función de onda general $y = A \cdot sen(\omega t + k \cdot x + \varphi_o)$ podemos determinar: A=0,001; ω =314 rad/s, k=62,8 m^{-1} y φ_o =0.
El signo positivo del término kx, indica que la partícula se mueve en el sentido negativo del eje X.
Para determinar la velocidad, sustituimos en la siguiente expresión los datos del problema: $v = \lambda \cdot f = \frac{2\pi\omega}{k 2\pi} = 5 m \cdot s^{-1}$

b) La longitud de onda vale: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{62{,}8} = 0{,}1 m$, el periodo será: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}02 s$ y la frecuencia: $f = \frac{1}{T} = 50\ Hz$

c) La ecuación de la velocidad se obtiene derivando la función de onda respecto del tiempo: $v = \frac{dy}{dt} = 0{,}314 \cdot \cos(3147 + 62{,}8x)$ y para x=-0,03 tenemos: $v = 0{,}314 \cdot \cos(314t - 1{,}88)$
La aceleración es la segunda derivada de y con respecto al tiempo: $a = \frac{dv}{dt} = -98{,}6 \cdot sen(314t + 62{,}8x)$ y para x=-0,03 tenemos: $a = -98{,}6 \cdot sen(314t - 1{,}88)$

8.4.- Energía e intensidad del movimiento Oscilatorio. Atenuación y Absorción

8.4.1.- Magnitudes características de las ondas

8.4.1.1.- Energía del movimiento Ondulatorio

Cuando una partícula del medio elástico en que se propaga el movimiento ondulatorio comienza a vibrar, adquiere una cierta energía, que será:

- Cinética solo, en la posición de equilibrio, cuando la elongación es cero.
- Potencial solo, en los puntos de máxima elongación.
- En parte cinética y en parte potencial, en otro instante cualquiera de la vibración.

Como en virtud del principio de conservación de la energía, ésta debe permanecer cte, vamos a calcular su valor en el caso más sencillo: aquel en el que la partícula solo posee energía cinética.

La velocidad de la partícula viene dada en función de tiempo por:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi A}{T} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

Siendo su valor máximo:

$$v_{\max} = \frac{2\pi A}{T}$$

Su energía será:

$$\boxed{E = E_{c_{\max}} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{2\pi^2 m}{T^2} \cdot A^2 = 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot A^2}$$

Lo que nos permite enunciar:

La energía propagada en un movimiento ondulatorio es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.

Y si dividimos la energía mecánica total transmitida por una onda entre el tiempo durante el cual se ha transmitido esta energía, se obtiene el valor de la ***potencia de la onda***, P.

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{2\pi^2 m A^2 f^2}{\Delta t}$$

8.4.1.2.- Intensidad del movimiento ondulatorio

Intensidad, I, de un movimiento ondulatorio es la energía que durante 1 segundo pasa por la unidad de superficie colocada perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.

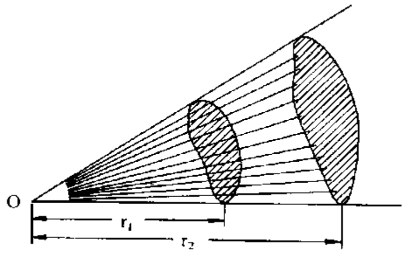
En el S.I. se mide en $J/s{\cdot}m^2$ que equivale a W/m^2

Si el medio es isótropo, la energía emitida se propaga mediante ondas esféricas. En este caso la intensidad en un punto situado a la distancia r del foco emisor valdrá:

$$\boxed{I = \frac{P}{4{\cdot}\pi{\cdot}r^2}}$$

Siendo P la potencia de la onda.

Si consideramos la intensidad a dos distancias r_1 y r_2 de un mismo foco, tendremos:



$$I_1 = \frac{p}{4{\cdot}\pi{\cdot}r_1^2}$$

$$I_2 = \frac{p}{4{\cdot}\pi{\cdot}r_2^2}$$

De donde podemos deducir:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

La intensidad va ***disminuyendo*** proporcionalmente al cuadrado de la distancia al foco emisor.

Y como la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, también debe serlo la intensidad. Por tanto podemos escribir:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

<u>Ejemplo 8.4.-</u> La potencia emisiva de un foco es de 25W. ¿Cuál es la intensidad de la onda a distancias r_1=1 m y r_2=2m?. ¿qué relación existe entre las intensidades y las amplitudes de esos puntos?.

A un metro del foco: $I_1 = \frac{p}{4{\cdot}\pi{\cdot}r_1^2} = \frac{25}{4{\cdot}\pi{\cdot}1} = 2\ W{\cdot}m^{-2}$; A dos metros del foco: $I_2 = \frac{p}{4{\cdot}\pi{\cdot}r_1^2} = \frac{25}{4{\cdot}\pi{\cdot}2^2} = 0{,}5\ W{\cdot}m^{-2}$

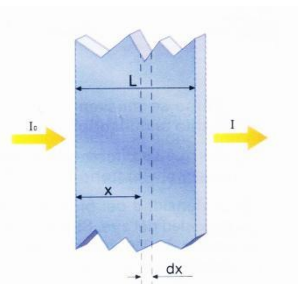
La relación entre las intensidades es $\frac{I_1}{I_2} = \frac{2}{0{,}5} = 4$

Y entre las amplitudes: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{1} = 2$

8.4.1.3.- Atenuación y absorción de las ondas

Acabamos de ver que en un medio la intensidad de un movimiento ondulatorio disminuye proporcionalmente con la distancia al cuadrado.

En el caso de ondas planas, si llamamos a α coeficiente de absorción del medio, tenemos:

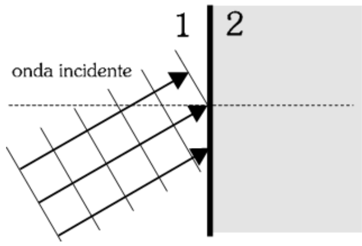


$$\boxed{I = I_o{\cdot}e^{-\alpha{\cdot}l}}$$

Que constituye la ley general de absorción del movimiento ondulatorio.

Donde I_o es la intensidad inicial e I la intensidad de la onda después de haber atravesado un medio de espesor l

En todo movimiento ondulatorio la intensidad y la amplitud se van amortiguando al aumentar la distancia al foco emisor. Sin embargo la frecuencia de la vibración se conserva cte.



Cuando una onda que se propaga por un cierto medio, se encuentra con un medio diferente (por ejemplo, luz o sonido que se propagan por el aire y se encuentran con agua, o con un cristal). Al llegar a la superficie que separa ambos medios, puede ocurrir que se absorba toda la energía, desapareciendo totalmente la onda. ***(Absorción).***

Ejemplo 8.5.- El coeficiente de absorción de un determinado medio es de 0,5 cm^{-1}. ¿Cuál ha de ser su espesor para que la intensidad de una onda que lo atraviesa se reduzca a la quinta parte de la incidente?.

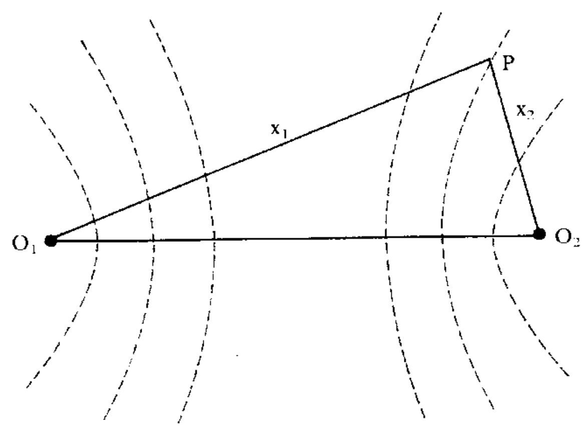
Teniendo en cuenta la ley general de la absorción, como $I = \frac{I_o}{5}$ y $\alpha = 0{,}5cm^{-1}$, sustituyendo resulta: $\frac{I_o}{5} = I_o \cdot e^{-0{,}5l} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} = e^{-0{,}5l}$, tomando logaritmos neperianos y despejando L, queda:

$$-\ln 5 = -0{,}5L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\ln 5}{0{,}5} = 3{,}2cm$$

8.5.- Interferencias

Interferencia es el encuentro de dos o más ondas cuyas acciones se suman, dando origen en los puntos de coincidencia a una nueva onda. Esto quiere decir que cada punto recibe una perturbación que es la ***suma vectorial*** de las originadas por cada onda aislada.

Una interferencia puede ser ***constructiva***, si las dos ondas poseen elongaciones del mismo sentido, o ***destructiva***, si las elongaciones tienen sentido opuesto.



En un punto situado a la distancia x_1 de O_1 y x_2 de O_2, las perturbaciones producidas por ambas ondas son:

$$y_1 = A_1 \cdot sen 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right)$$

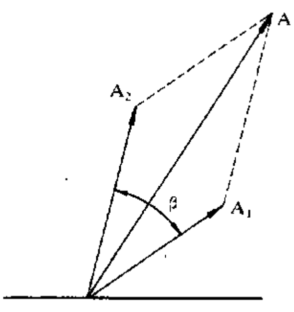
$$y_2 = A_2 \cdot sen 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right)$$

Siendo la perturbación resultante:

$$Y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot sen 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + A_2 \cdot sen 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right)$$

Cuya amplitud vendrá dada por:

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \cos\beta}$$



pero como en este caso $\varphi_1 = 2\pi \cdot \frac{x_1}{\lambda}$ y $\varphi_2 = 2\pi \cdot \frac{x_2}{\lambda}$, resulta que $\beta = 2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda}$

El ángulo β es la diferencia de fase en el punto P entre las dos perturbaciones.

A la vista de lo expuesto, se llega a la conclusión de que la amplitud de la perturbación resultante en un punto determinado depende de la diferencia de fase con que los movimientos llegan a dicho punto.

Esta será máxima cuando $Cos\beta = Cos2\pi\frac{x_1 - x_2}{\lambda} = 1$, es decir cuando $2\pi\frac{x_1 - x_2}{\lambda} = 2n\cdot\pi$ (siendo n=0; 1; 2..), de donde se deduce la siguiente condición para la ***interferencia constructiva***:

$$x_1 - x_2 = n\cdot\lambda$$

- ***La amplitud será máxima*** $(A = A_1 + A_2)$ en aquellos puntos del medio para los cuales la diferencia de caminos es un múltiplo entero de la longitud de onda. Estos puntos son conocidos como ***vientres*** o ***antinodos***.

Por el contrario, si $Cos\beta = Cos2\pi\frac{x_1 - x_2}{\lambda} = -1$, lo cual sucede cuando $2\pi\frac{x_1 - x_2}{\lambda} = (2n+1)\cdot\pi$, es decir si:

$$x_1 - x_2 = (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{2}$$

Obtenemos la condición para la ***interferencia destructiva***.

- ***La amplitud será mínima*** $(A = |A_1 - A_2|)$ en aquellos puntos del medio para los cuales la diferencia de marcha es un múltiplo impar de la *semilongitud de onda*. Estos puntos son conocidos como ***nodos*** o ***puntos nodales***.

*Las líneas que unen los vientres se denominan **líneas ventrales**, mientras que las que unen a los nodos se llaman **líneas nodales**. Cada línea ventral o nodal está formado por los puntos cuya diferencia de distancias a los focos de ambas ondas es una constante (x_1-x_2=Cte)*

8.6.- Ondas Estacionarias

Un caso particular de los fenómenos de interferencia es la formación de las llamadas ondas estacionarias.

Onda estacionaria es la onda que resulta del encuentro de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud, que se propagan en la misma dirección, pero en sentidos contrarios.

Esta nueva onda resultante "da la sensación" de no avanzar, encontrándose estacionada (de ahí su nombre) en el espacio, presentando unos puntos inmóviles (nodos) y otros que se mueven de manera que al vibrar alcanzan una amplitud máxima (vientres).

Vientres, son los puntos (V) donde, por encontrarse las dos ondas en igual fase, se refuerzan haciendo que la amplitud de la onda resultante (onda estacionaria) sea el doble de la de una de ellas.

Nodos son los puntos (N) donde al encontrarse ambas ondas en fase opuesta, la amplitud de la onda resultante se anula. Los nodos son puntos fijos inmóviles.

Supongamos dos ondas de la misma A y de la misma λ

$$y_1 = Asen2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad y_2 = Asen2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

La perturbación resultante en dicho punto será:

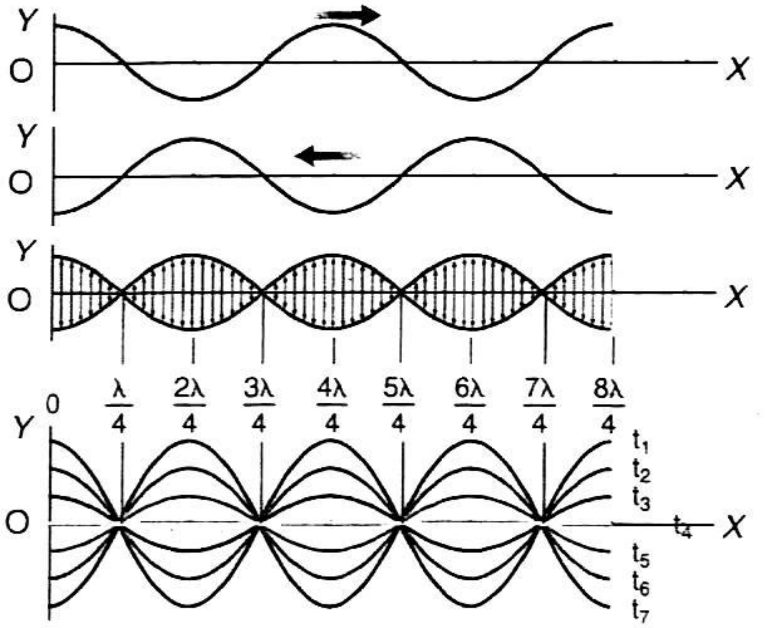
$$Y = y_1 + y_2 = A\left[sen2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + sen2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}sen\frac{2\pi t}{T}$$

Por lo tanto, el punto en cuestión vibrará con igual periodo que los movimientos ondulatorios componentes, y con una amplitud resultante:

$$A_r = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$$

Que depende de la situación del punto.

La onda estacionaria es armónica de igual frecuencia que las componentes y su amplitud A_r, es independiente del tiempo, pero varía sinusoidalmente con la abscisa x.



Por lo tanto, excepto en los puntos en que la amplitud es nula (los nodos), que no oscilan, todos los puntos de la onda oscilan armónica y verticalmente respecto de OX y alcanzan a la vez la posición de equilibrio.

Puesto que los nodos se encuentran siempre en reposo, la onda estacionaria parece permanecer fija sobre la dirección de propagación (de ahí su nombre), no viaja, y por tanto, no transporta energía.

Al no existir transporte de energía, no podemos considerar las ondas estacionarias como ondas en sentido estricto de la palabra.

Estas ondas tienen una ***velocidad de propagación nula***. Aunque las ondas que la componen (ondas viajeras) si tienen velocidad de propagación.

La ***amplitud es nula*** en aquellos puntos donde $\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$, es decir:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$$

O sea:

$$\boxed{x = (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{4} \quad \text{con n=(0,1,2,3…)}}$$

Que corresponde a los ***nodos.***

Por el contrario la ***amplitud será máxima*** cuando $\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$, es decir:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$$

O sea:

$$\boxed{x = 2n\cdot\frac{\lambda}{4} \quad \text{con n=(0,1,2,3..)}}$$

Que corresponde a la situación de los ***vientres.***

La distancia entre dos nodos o entre dos vientres consecutivos será:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$$

Y la distancia entre vientre y nodo consecutivos será:

$$(2n+1)\frac{\lambda}{4} - 2n\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}$$

La ***distancia*** entre ***dos vientres*** o ***dos nodos consecutivos*** es igual a ***media longitud de onda***. Por tanto, la ***distancia*** entre ***un vientre y un nodo*** es de ***un cuarto de longitud de onda***.

8.6.1.- Ondas Estacionarias en una Cuerda

Entre las ondas estacionarias destacan las producidas en una cuerda tensa y flexible, con uno o dos extremos fijos. Como toda onda estacionaria, los puntos de la cuerda, exceptuando los nodos, oscilan al mismo tiempo con un movimiento armónico de igual frecuencia aunque de amplitud variable que depende de su posición.

8.6.1.1.- Cuerda fija en sus dos extremos

Consideremos una cuerda de longitud L fija por sus dos extremos:

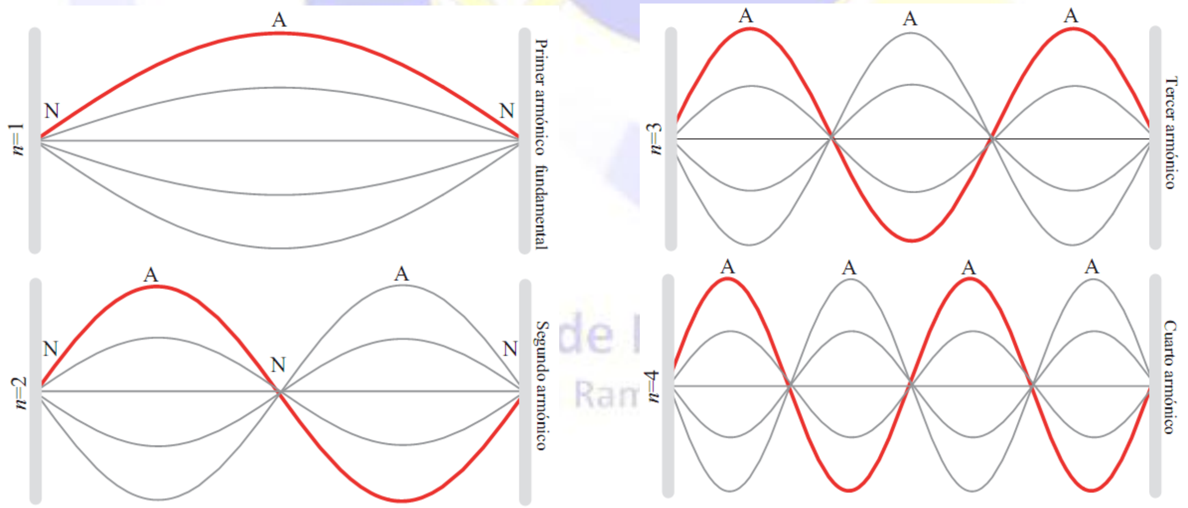
- Al apartarla de su posición de equilibrio y soltarla, las fuerzas elásticas de recuperación la hacen vibrar.
- Las ondas que se propagan en sentidos contrarios dan lugar a distintas ondas estacionarias.
- Cada una de las ondas estacionarias componentes del movimiento tiene una ***frecuencia*** característica y se denomina ***modo normal de vibración***.
- Los extremos de la cuerda, de abscisas O y L, deben ser nodos, ya que en estos puntos no hay vibración
- Para determinar las longitudes de onda de cada uno de los modos normales de vibración, debemos tener en cuenta que en toda onda estacionaria la distancia entre nodos consecutivos vale λ/2. Por lo tanto, la formulación de ésta requiere que la longitud de la cuerda cumpla:

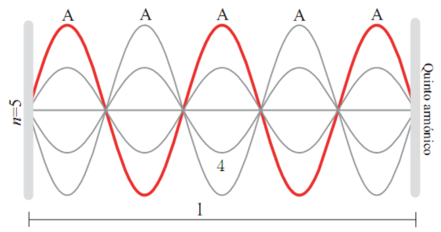
$$L = n\frac{\lambda}{2} \text{ de donde: } \lambda = \frac{2L}{n} \qquad con \qquad n = 0,1,2,3\ldots$$

- Esta expresión muestra que solo son posibles las ondas estacionarias cuya λ sea submúltiplo del doble de la longitud de la cuerda.
- Cada modo normal lleva asociada una frecuencia que depende de la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

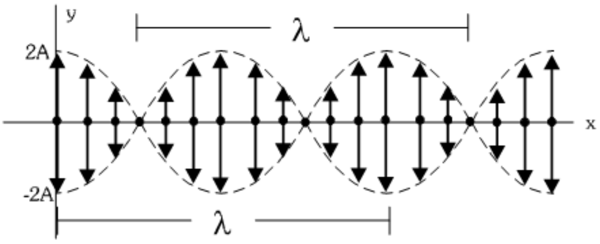
$$f = \frac{v}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad f = n\frac{v}{2L} \qquad con \qquad n = 0,1,2,3\ldots$$

La frecuencia menor se denomina ***frecuencia fundamental*** o ***primer armónico***; la siguiente, ***segundo armónico***; y así sucesivamente constituyen una ***serie armónica.***





Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación es función de la tensión de la cuerda: $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, donde T es la tensión y μ la densidad lineal de la cuerda: $\mu = \frac{m}{L}$, podemos calcular la frecuencia de los armónicos en función de la tensión: $f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$



Una onda estacionaria, ***no transporta energía***, lo cual es lógico porque los nodos permanecen siempre en reposo.

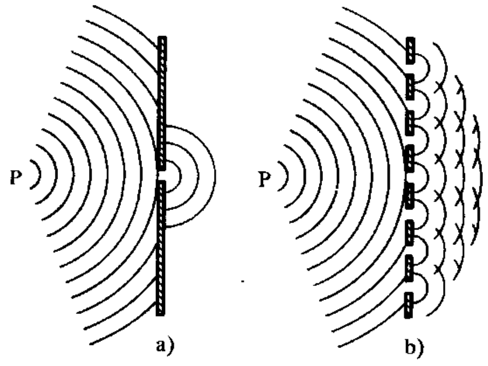
Decimos que dos ondas armónicas son ***coherentes*** si están en fase o su diferencia de fase es constante.

8.7.- Principio de Huygens: Reflexión y refracción

Hemos visto que cuando una perturbación se transmite a través de un medio, los puntos alcanzados por la misma vibran de la misma forma que lo hace el punto situado en el foco. Todo punto del medio alcanzado por una onda se comporta como un foco emisor.

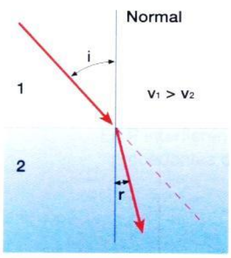
Principio Huygens para cualquier onda "***todo punto de un frente de ondas es el origen de una nueva onda que genera un número indefinido de frentes de onda***".

La envolvente de estos frentes es el nuevo frente de la onda primitiva. El nuevo frente de onda está acompañado de otro que retrocede hacia el foco. Cada foco puntual "radia" su energía de manera uniforme. La intensidad es máxima en el sentido del avance real. Cuando un frente de onda plano se encuentra con un obstáculo que tiene un agujero, el frente de onda que se obtiene detrás del mismo es semiesférico.



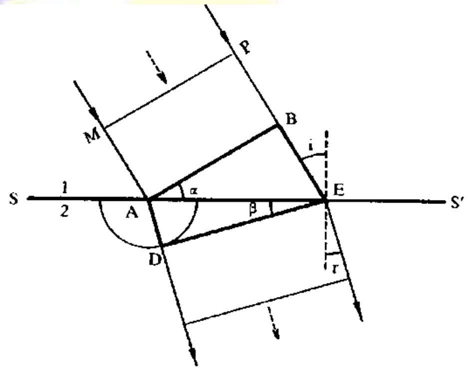
Cuando una onda va por un medio y encuentra en su camino la frontera de otro medio distinto, se divide en dos: una que penetra en el muevo medio y se llama ***onda refractada*** y otra que rebota y vuelve al primer medio y recibe el nombre de ***onda reflejada***.

8.7.1.- Refracción

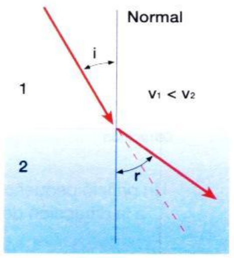


La onda refractada se acerca a la normal.

Refracción es el cambio de dirección que experimentan las ondas al pasar oblicuamente de un medio a otro en el que se propagan con diferente velocidad.



- ***Rayo incidente*** es la dirección en que se propaga la onda en el primer medio y ***rayo refractado*** es la nueva dirección que adquiere el penetrar en el otro medio.



La onda refractada se aleja de la normal.

- ***Angulo de incidencia*** (i) es el ángulo que forma el rayo incidente con la normal a la superficie de separación de ambos medios, y ***ángulo de refracción*** (r) es el ángulo que forma el rayo refractado con la normal.

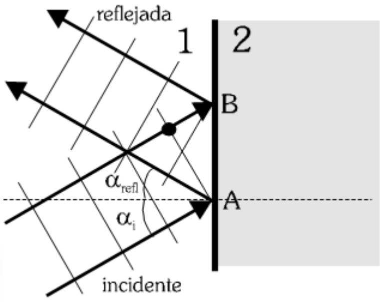
En la refracción de ondas se cumple la ***ley de Snell***: *La razón entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es, para dos medios dados, constante e igual a la razón de las velocidades con que se propaga la onda en ambos medios.*

$$\boxed{\frac{sen(i)}{sen(r)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = Cte.}$$

Donde n es el índice de refracción del medio $n = \frac{c}{V}$, y C es la velocidad de la luz en ese medio, mientras que V es la velocidad de la onda en dicho medio.

8.7.2.- Reflexión

Reflexión es el fenómeno que tiene lugar cuando las ondas que avanzan por un medio homogéneo chocan contra un obstáculo que las hace retroceder cambiando de dirección y sentido.



Se llama ***ángulo de incidencia (i)*** al ángulo que forma la dirección en que llega la onda con la normal a la superficie reflectora, y ***ángulo de reflexión (r)*** al que forma la normal con la dirección que sigue la perturbación después del choque.

Leyes de la reflexión:

- El rayo incidente, el reflejado, el refractado y la normal a la superficie de separación de los dos medios están en el mismo plano.
- El rayo incidente y el reflejado forman con la normal ángulos iguales
- Los senos de los ángulos de incidencia y refracción son iguales $sen\alpha = sen\beta$

Reflexión total es el fenómeno que se produce cuando un rayo de luz, atravesando un medio de índice de refracción n_2 menor que el índice de refracción n_1 en el que éste se encuentra, se refracta de tal modo que no es capaz de atravesar la superficie entre ambos medios reflejándose completamente.

Este fenómeno solo se produce para ángulos de incidencia superiores a un cierto valor límite, α_L Para ángulos mayores la luz deja de atravesar la superficie y es reflejada internamente de manera total. La reflexión total solamente ocurre en rayos viajando de un medio de alto índice refractivo hacia medios de menor índice de refracción.

El *ángulo límite* también es el ángulo mínimo de incidencia a partir del cual se produce la reflexión total. El ángulo de incidencia se mide respecto a la normal de la separación de los medios. El ángulo límite viene dado por:

$$\alpha_L = Arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios con $n_2 > n_1$. Vemos que esta ecuación es una simple aplicación de la ley de Snell donde el ángulo de refracción es 90°.

8.8.- Difracción

Es el fenómeno de "desviación" de la dirección de propagación de la onda al encontrarse con un obstáculo. Aunque ocurre siempre, sólo es apreciable y significativo cuando el obstáculo es de un tamaño parecido a la λ de la onda que se propaga. El obstáculo puede ser tanto un agujero como un cuerpo sólido.

¿Cómo se explica la difracción?. Pues hemos de recordar el principio de Huygens. Cada punto del medio se comporta como un foco puntual emisor de nuevas ondas. Normalmente tenemos infinitos puntos, y la superposición de todos ellos es lo que constituye el frente de onda. En el agujero, el número de puntos que vibran es reducido, y puede considerarse prácticamente como un foco puntual. El frente de onda será esférico.

Para el caso del sonido, la longitud de onda la varía entre algunos cm y algunos metros. Estamos rodeados de obstáculos de ese tamaño, y es natural que apreciemos el fenómeno.

La difracción permite distinguir entre ondas y partículas, ya que de las partículas no cabe esperar este comportamiento. Un chorro de partículas seguirá una trayectoria rectilínea. Este experimento sirvió en 1801 a Young para comprobar que la luz se comportaba como una onda, y en 1927 a Davidson y Germer para observar un comportamiento similar en los electrones.

La diferencia entre interferencia y difracción es más una diferencia de matiz que otra cosa. El fenómeno de la ***difracción***, es la interferencia de partes de un mismo frente de onda. El fenómeno consiste en que una onda que se enfrenta con una apertura de amplitud adecuada, o bien con un obstáculo de longitud adecuada, debido a la interferencia entre partes de la propia onda, deja de propagarse en línea recta, y puede ser detectada detrás del obstáculo, o bien en la zona de sombra creada por las paredes de la apertura. Se puede demostrar que existe una relación sencilla entre el ángulo de difracción, α, la longitud del obstáculo d y la longitud de onda del movimiento ondulatorio empleado λ, a base de considerar la diferencia de camino recorrido por dos rayos cualesquiera provenientes de dos partes del frente de onda, la relación es :

$$sen\,\alpha = \frac{\lambda}{2d}$$

Observando esta ecuación se comprende que hay difracción, cuando la longitud del obstáculo, representada por d, es del orden de la longitud de onda utilizada. Esto explica el que podamos oír una conversación a través de la pared. El sonido ***dobla*** el obstáculo porque las longitudes de onda audibles son del orden del metro, y las dimensiones de los obstáculos y aberturas y los obstáculos son del mismo orden.

8.9.- Características de las ondas sonoras

Las ondas sonoras las podemos clasificar en los siguientes tipos:

1- Ondas infrasónicas o infrasonidos: son ondas mecánicas cuya frecuencia < 20 Hz.
2- Ondas sónicas o sonidos: son ondas mecánicas cuya frecuencia está comprendida dentro de los límites de audición.
3- Ondas ultrasónicas o ultrasonidos: son ondas mecánicas cuya frecuencia es superior al límite de audición (pueden tener una frecuencia hasta 10^6 Hz).

Entre las muchas aplicaciones que tienen podemos citar:

- En sondeos, para medir la profundidad del mar.
- Aumentar la velocidad de algunas reacciones químicas.
- En biología y Medicina.

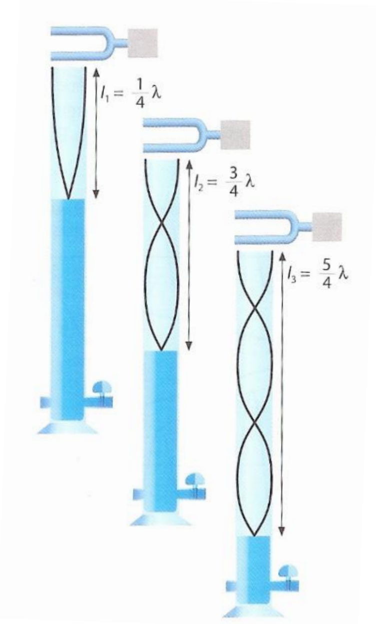
El mecanismo por el cual se "afinan" las cuerdas de los instrumentos musicales al tensarlas o destensarlas. Teniendo en cuenta que la velocidad de propagación es función de la tensión de la cuerda, podemos calcular la frecuencia de los armónicos en función de dicha tensión:

$$f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda, con lo que el sonido emitido por las cuerdas cambiará al cambiar su tensión, de la misma manera que ocurrirá al cambiar la longitud de la misma.

8.9.1.- Instrumentos de Viento

También es posible establecer ondas sonoras estacionarias en el extremo abierto de un tubo que contenga agua en su interior. El fundamento es muy similar al de las ondas estacionarias en cuerdas.



Las vibraciones de un diapasón de frecuencia f situado cerca del extremo abierto de un tubo producen ondas sonoras en su interior que, al reflejarse en la superficie del agua, pueden producir la superposición de la onda incidente y reflejada (interferencia) y dar lugar al establecimiento de ondas estacionarias. Cuando se genera la onda estacionaria, se produce una resonancia en el interior del tubo y nuestro oído es capaz de percibir la onda sonora. Ahora bien, ¿cuándo ocurre esto?

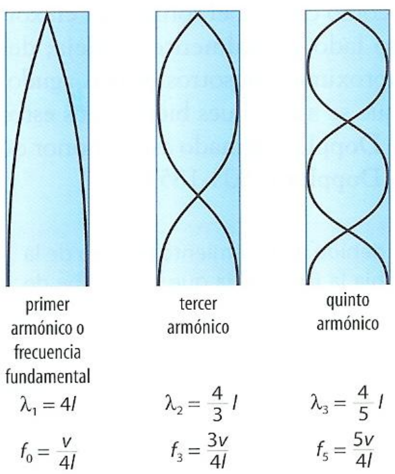
Las moléculas del aire que se hallan en contacto con la superficie del agua no pueden desplazarse, por lo que en esa zona se produce un nodo de desplazamiento. En el extremo abierto del tubo, por el contrario, se genera un antinodo o vientre de desplazamiento. Por tanto, como puede verse en la figura, si λ es la longitud de onda correspondiente a las ondas sonoras emitidas por el diapasón, la primera resonancia en el tubo se origina cuando $l_1 = \frac{1}{4}\lambda$

Puesto que siempre habrá un nodo de desplazamiento en la superficie del agua y un vientre en el extremo abierto, si vamos variando la altura de la columna del aire dejando salir agua (o añadiendo agua de manera continuada), también se producirán resonancias cuando:

$$l_2 = \frac{3}{4}\lambda \;;\; l_3 = \frac{5}{4}\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \boxed{\mathbf{l = (2n+1)}\frac{\lambda}{4}} \quad \text{donde } n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

En el caso analizado, los resultados son, de manera muy aproximada, los reales, siempre y cuando el diámetro del tubo sea muy pequeño en comparación con la longitud de onda. En caso contrario, el vientre de desplazamiento no se produce exactamente en el extremo abierto.

La mayoría de los instrumentos de viento emiten sonidos por un mecanismo similar al descrito en la experiencia anterior. Así, en el caso de un tubo abierto por donde entra o soplamos aire, y que tiene el otro extremo cerrado, lo que ocurrirá es que en el extremo cerrado se formará un nodo de desplazamiento, mientras que en el abierto habrá un vientre. Por lo tanto, al igual que en el caso anterior, se establecerán ondas estacionarias en el interior del tubo cuando $\boxed{\mathbf{l = (2n+1)}\frac{\lambda}{4}}$ donde $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$



Las longitudes de ondas estacionarias que pueden formarse son:

$$\boxed{\lambda = \frac{4l}{2n+1}}$$

y las **frecuencias o armónicos** permitidos estarán regidos por la expresión:

$$\boxed{\mathbf{f = (2n+1)}\frac{v}{4l}}$$

expresión que indica que sólo aparecen armónicos impares.

8.9.2.- Contaminación Acústica

La acústica es el estudio de la propagación del sonido. Sabemos que el sonido consiste en vibraciones del aire (u otro medio) que se propagan longitudinalmente. Su velocidad de propagación depende del medio, e incluso en el aire varía con la temperatura según la expresión: $v = \sqrt{\dfrac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}}$, donde γ es una constante que depende de la humedad del aire, y M es la masa molecular promedio.

Tono y timbre de un sonido:

El tono es la característica del sonido que nos indica si éste es agudo (tono alto) o grave (tono bajo). La magnitud física que determina el tono es la frecuencia del sonido. Una frecuencia alta significa un sonido agudo. Una frecuencia baja, un sonido grave.

Sin embargo, cuando escuchamos la misma nota musical (el mismo tono) emitida por dos instrumentos musicales diferentes (un piano y un violín, por ejemplo), suenan de forma distinta, y podemos distinguir a qué instrumento pertenecen. Todo instrumento musical, al vibrar, produce ondas estacionarias de múltiples frecuencias (los armónicos). El armónico fundamental es el que nos da la nota musical, y el resto de los armónicos le dan al sonido las características propias del instrumento. Estos armónicos secundarios constituyen el timbre del sonido.

Ultrasonidos e infrasonidos:

El oído humano es capaz de percibir sonidos comprendidos entre 16 Hz y 20000 Hz de frecuencia.

Por debajo de la frecuencia mínima (infrasonidos), no somos capaces de oír las vibraciones. Pueden producirse infrasonidos intensos por el viento, o en los momentos previos a un terremoto. Si bien no los oímos, estas vibraciones pueden afectar a órganos internos y a terminaciones nerviosas, lo que origina malestar e irritabilidad.

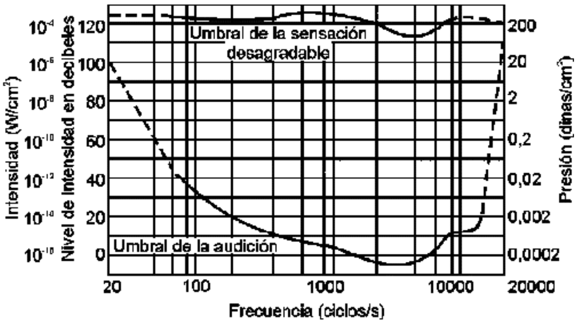
Por encima de 20 kHz se sitúan los ultrasonidos. Existen especies animales (perros, murciélagos, delfines, por ejemplo) que son capaces de distinguir frecuencias más elevadas que el hombre. Los ultrasonidos de muy alta frecuencia transmiten mucha energía y pueden concentrarse en un punto con mucha facilidad, por lo que son utilizados en comunicaciones, en medicina (para romper cálculos de riñón), etc.

Intensidad de una onda sonora. Escala de decibelios (dB):

La intensidad de una onda es la energía que propaga el frente de onda por cada unidad de superficie. En el S.I se mide en $J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} = W/m^2$. Ya hemos estudiado que, al ampliarse el frente de onda, la energía se reparte y, por tanto, la intensidad disminuye.

Para medir la intensidad se usa una magnitud, el nivel de intensidad (β), que usa un valor de referencia ($I_0 = 10^{-12}$ W/m^2). Se utiliza una escala logarítmica, para evitar las potencias de 10. Así: $\beta = 10 \cdot \log \dfrac{I}{I_o}$ La unidad de β es el decibelio (dB), en honor a A.G. Bell, inventor del teléfono.

El oído humano es capaz de percibir sonido en un cierto rango de frecuencias (entre 16 Hz y 20000 Hz). Su sensibilidad es tal que, para cada frecuencia, existe un nivel de intensidad mínimo que es capaz de percibir (umbral de audición), y un nivel máximo (umbral de dolor), por encima del cual se producen daños para el oído.



En el gráfico aparecen estos umbrales para las diferentes frecuencias.

Contaminación sonora:

Está comprobado que el ruido afecta al oído y al sistema nervioso. Es causa de sordera, trastornos psicológicos, irritabilidad, estrés, bajo rendimiento, dificultades para dormir… cuando en una zona el nivel de intensidad del ruído es tal que afecta a la salud, se habla de que padece contaminación sonora.

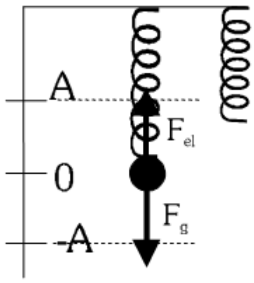
El tráfico, las obras, bares, discotecas, son focos de contaminación sonora. Una exposición continuada a un sonido de intensidad superior a 80 dB produce daños a la salud. Existe una legislación sobre contaminación sonora que pretende disminuir el efecto del ruido. Por ejemplo, el horario de cierre de locales de ocio, la insonorización de los mismos con materiales absorbentes (no debe salir al exterior una intensidad mayor de 65 dB), regulación del nivel de vehículos, etc.

8.10.- Ejercicios Resueltos

1. Al suspender un cuerpo de 0,5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si, a continuación, se tira hacia abajo del cuerpo, hasta alargar el muelle 2 cm más, y se suelta, comienza a oscilar.

a) Haga un análisis energético del problema y escriba la ecuación del movimiento de la masa.

b) Si, en lugar de estirar el muelle 2 cm, se estira 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación de movimiento del cuerpo?



a) Una vez el sistema en equilibrio, estaremos en la posición O (Energía potencial cero), si tiramos del muelle 2 cm llegaremos a la posición –A y aquí tendremos energía potencial elástica. Cuando soltemos el cuerpo, el muelle tirará de él hacia arriba de forma que cuando pase por el punto O, toda su energía se habrá transformado en energía cinética. Una ve3z sobrepase el punto O, esta energía cinética volverá a transformarse poco a poco en energía potencial, de forma que en el punto A, volvemos a tener solo energía potencial, ahora el muelle empujará al cue3rpo hacia abajo y otra vez la energía potencial elástica se transformará en energía cinética que volverá a ser máxima cuando el cuerpo pase por la posición O.

Para escribir la ecuación del movimiento del cuerpo, tenemos que A= 0,02 m porque es lo que estiramos el muelle. Para calcular la constante del muelle, nos fijamos en la posición de equilibrio, en este punto la suma de fuerzas será cero, y por un lado tendremos el peso y por otro la ley de Hooke. Por tanto:

$$m\cdot g - k\cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad m\cdot g = k\cdot x$$

Y despejando k, tendremos:

$$k = \frac{m\cdot g}{x} = \frac{0,5\cdot 9,81}{0,05} = 98,1 N\cdot m^{-1}$$

Calculamos la pulsación angular mediante:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{98,1}{0,5}} = 14 rad\cdot s^{-1}$$

De forma que la ecuación del MAS será:

$$y = 0,02\cdot sen(14t + \varphi_0)$$

Solo nos queda calcular la fase inicial:

Como al principio (t=0) tenemos que y=-0,02, entonces $sen(\varphi_0) = -1$ y de aquí que $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, por tanto la ecuación del movimiento quedará de la forma:

$$y = 0{,}02 \cdot sen\left(14t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

b) Si estiráramos el muelle 3 cm solo cambiaría la amplitud del movimiento, de forma que ahora la ecuación sería:

$$y = 0{,}03 \cdot sen\left(14t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}$$

2.- La ecuación de un MAS es: $x = 3\cos\left(600t + \frac{\pi}{4}\right)$ donde x está en cm y t en seg.

Calcular el periodo, la velocidad, la aceleración máxima, la posición y la velocidad en t=0.

Sabiendo que la pulsación es de 600 rad·s^{-1}, calculamos el periodo de la siguiente forma:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{600} = \frac{\pi}{300} = 0{,}0104 seg$$

La velocidad la calculamos derivando con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0{,}03\cos\left(600t + \frac{\pi}{4}\right)\right] = -18 sen\left(600t + \frac{\pi}{4}\right)$$

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-18 sen\left(600t + \frac{\pi}{4}\right)\right] = -10800 \cdot \cos\left(600t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Por tanto la aceleración máxima será:

$$a_{máx} = -10800 \; m \cdot s^{-2}$$

La posición y la velocidad en t=0 será;

$$x_o = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \; m$$

$$v_o = -18 sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -9\sqrt{2} \; m \cdot s^{-1}$$

3.- Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0,1 π s de periodo y su energía cinética máxima es de 0,5 J.

a) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determine la constante elástica del resorte.

b) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: i) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; ii) se sustituye el objeto por otro de masa doble.

a) Si el periodo es de 0,1 π, entonces su pulsación será: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}1\pi} = 20 \; rad \cdot s^{-1}$

Si además su energía cinética máxima es de 0,5J, como la energía cinética viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_o)$$

Tenemos que:

$$Ec_{max} = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

Despejando A, nos queda:

$$A=\sqrt{\frac{2\cdot Ec_{max}}{m\cdot\omega^2}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}5}{0{,}2\cdot 400}}=\frac{\sqrt{5}}{20}=0{,}112m$$

Con todo esto tenemos que la ecuación del movimiento será:

$$x=0{,}112\cdot sen\left(20t+\varphi_o\right)$$

Como no dicen nada de la posición inicial, supondremos que en t=0, la partícula se encuentra en x=0 y por tanto:

$$x=0{,}112\cdot sen\left(20t\right)$$

La constante del muelle la obtenemos mediante:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

De donde, despejando k:

$$k=m\cdot\omega^2=0{,}2\cdot 400=80N\cdot m^{-1}$$

b) Si la constante elástica es el doble, entonces la pulsación sería:

$$\omega'=\sqrt{\frac{2k}{m}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{2}\omega$$

Y por tanto ahora la amplitud sería:

$$A'=\sqrt{\frac{2\cdot Ec_{max}}{m\cdot 2\omega'^2}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}5}{0{,}2\cdot 800}}=\frac{\sqrt{10}}{40}=0{,}08m$$

Así que la ecuación del movimiento sería:

$$x=0{,}08\cdot sen\left(20\sqrt{2}\cdot t\right)$$

Si ahora doblamos la masa, la pulsación sigue siendo la misma, pero lo que varía sería la amplitud.

$$A'=\sqrt{\frac{2\cdot Ec_{max}}{2m\cdot\omega'^2}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}5}{0{,}4\cdot 400}}=\frac{\sqrt{10}}{40}=0{,}08m$$

Y la ecuación del movimiento sería:

$$x=0{,}08\cdot sen\left(20t\right)$$

4.- La ecuación de una onda es: $y=0{,}3\cdot sen(6\pi\cdot t-\pi x)$ en unidades SI. Calcula: a) Velocidad de propagación de la onda; b) la velocidad de vibración del punto que ocupa la posición x=3 para t=8 s; c) La aceleración máxima de dicho punto en su movimiento de vibración.

a) La velocidad de propagación de la onda viene dada por: $\upsilon=\frac{\lambda}{T}$, por tanto necesitamos calcular antes la longitud de onda y el periodo. Por simple inspección de la función de onda, tenemos que $w=6\pi$ y como $w=\frac{2\pi}{T}\quad\Rightarrow\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{6\pi}=\frac{1}{3}s$ y que $k=\pi$, pero como $k=\frac{2\pi}{\lambda}\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\pi}=2$ entonces, sustituyendo tenemos:

$$\upsilon=\frac{\lambda}{T}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6m\cdot s^{-1}$$

b) Para calcular la velocidad de vibración, derivamos la elongación con respecto al tiempo:

$$\upsilon=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left[0{,}3\pi\cdot sen(6\pi\cdot t-\pi x)\right]=1{,}8\pi\cos(6\pi\cdot t-\pi x)$$

Para x=3 m y t= 8 s, tenemos:

$$v = 1{,}8\pi\cos(6\pi\cdot 8 - \pi 3) = 1{,}8\pi\cos 45\pi = -5{,}65\ m\cdot s^{-1}$$

c) Para calcular la aceleración máxima en dicho punto, derivamos la velocidad con respecto al tiempo.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[1{,}8\cos(6\pi\cdot t - \pi x)\right] = -10{,}8 sen(6\pi\cdot t - \pi x)$$

La aceleración será máxima cuando

$$sen(6\pi\cdot t - \pi x) = 1$$

$$a_{máx} = -10{,}8\pi^2 = 106{,}6 m\cdot s^{-2}$$

5.- Una onda de 0,3 m de amplitud tiene una frecuencia de 6 Hz y una longitud de onda de 5 m. Calcular:

a) el periodo y la velocidad de propagación de la onda.
b) la velocidad de vibración del punto que ocupa la posición x=2m para t=10 s.
c) la distancia mínima de dos puntos que estén en fase.
d) ¿Cuál es la distancia mínima para que dos puntos estén en oposición de fase?.

a) Como el periodo es la inversa de la frecuencia: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3} s$ y la velocidad de propagación es:

$$v = \lambda\cdot f = 5\cdot 6 = 30 m\cdot s^{-1}$$

b) Para escribir la función de onda necesitamos conocer A, k y ω, que pasamos a calcular:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5} m^{-1} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\cdot f = 12\pi rad\cdot s^{-1} \qquad A = 0{,}3m$$

Por tanto, la función de onda será:

$$y = 0{,}3\cdot sen\left(12\pi\cdot t - \frac{2\pi x}{5}\right)$$

Hemos supuesto que se desplaza en sentido positivo del eje x y que en t=0 x=0 e y=0.

c) Para que dos puntos estén en fase, su posición debe diferir un número entero de longitudes de onda. Por lo tanto la distancia mínima entre dos puntos que están en fase es igual a la longitud de onda: 5m.

d) Para que dos puntos de una onda estén en ***oposición de fase*** la diferencia entre ellos ha de ser $(2n+1)\pi$

6.- La ecuación de una onda plana viene dada por la expresión: $y(x,t) = 0{,}05\cdot sen\left(600\pi\cdot t - 6\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$ *en unidades de SI. Halla:*

a) La amplitud, la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.
b) La velocidad máxima de la vibración
c) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase sea $\frac{\pi}{4}$

a) Por simple inspección de la función de onda, vemos que A=0,05 m, y además, tenemos que $w = 600\pi$ y como $w = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{600\pi} = \frac{1}{300}s$ y que $k = \pi$, pero como $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$ entonces, sustituyendo tenemos:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6m{\cdot}s^{-1}$$

b) La velocidad la calculamos derivando con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[0,05{\cdot}sen\left(600\pi{\cdot}t - 6\pi x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 30\pi\cos\left(600\pi{\cdot}t - 6\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$$

La velocidad máxima se alcanzará cuando:

$$\cos\left(600\pi{\cdot}t - 6\pi x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

Por tanto:

$$v_{máx} = 30\pi\ m{\cdot}s^{-1}$$

c) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase se $\pi/4$ la calculamos mediante:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = K(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \quad (x_2 - x_1) = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{k} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4} = 0,25\ m$$

7.- Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje OX. Si A=5 mm, f=200 Hz y $\lambda = 10$ cm , y en el instante t=0 la elongación en x=0 es de 2,5 mm y ese punto se mueve hacia arriba, determina:

a) la ecuación de onda.
b) La velocidad máxima en un punto dela cuerda
c) En qué instante será máxima la elongación en un punto situado a 5 cm del foco emisor

a) La expresión general de la función de onda en el sentido positivo del eje OX es:

$$y(t,x) = Asen(\omega t - kx + \varphi_o)$$

Por tanto, debemos determinar k, ω y φ_o, para escribir la función de onda de este movimiento.

Como $\omega = 2\pi f = 400\pi rad{\cdot}s^{-1}$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,1} 20\pi m^{-1}$

Podemos escribir:

$$y(t,x) = 0,005sen(400\pi t - 20\pi x + \varphi_o)$$

Sabemos que:

$$v = \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = 2\pi\cos(400\pi t - 20\pi x + \varphi_o)$$

Sustituimos en ambas expresiones las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{matrix} 2,5{\cdot}10^{-3} = 0,005sen\varphi_o \\ 2\pi\cos\varphi_o > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} sen\varphi_o = 0,5 \\ \cos\varphi_o > 0 \end{matrix}\right\}$$

De la 1ª ecuación obtenemos $\varphi_o = \frac{\pi}{6}$ y $\varphi_o = \frac{5\pi}{6}$ y como $\cos\varphi_o > 0$, resulta que $\varphi_o = \frac{\pi}{6}$, podemos escribir:

$$y(t,x)=0{,}005sen\left(400\pi t-20\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$$

b) La velocidad será:

$$v=2\pi\cos\left(400\pi t-20\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Y la velocidad máxima será:

$$v=2\pi\ m{\cdot}s^{-1}$$

c) La elongación será máxima cuando:

$$sen\left(400\pi t-20\pi x+\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$400\pi t-20\pi x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi n\ (n\in\mathbb{Z})$$

De donde:

$$400t=\frac{4}{3}+2n\quad\Rightarrow\quad t=\frac{\frac{4}{3}+2n}{400}$$

La primera solución con t>0 corresponde a n=0 y es $t=3{,}3\cdot10^{-3}$ s. Para n=1,2,3…, obtendríamos otras soluciones.

8.- De cierta onda se sabe que tiene una amplitud máxima de 8 m, que se desplaza de izquierda a derecha con una velocidad de 3 m/s, y que la mínima distancia entre dos puntos que vibran en fase es de 10 m.

a) Escribe su ecuación.
b) Escribe la ecuación de otra onda idéntica pero desplazándose en sentido contrario.
c) Escribe la ecuación de la onda resultante de la interferencia que se produce entre las dos ondas anteriores e indica sus características.
d) Calcula las posiciones de los nodos y los vientres de esta onda resultante.

Haced un dibujo en donde se vean los resultados obtenidos.

a) La ecuación de este movimiento atiende a: $y=A{\cdot}sen(\omega t-kx)$, puesto que se desplaza de izquierda a derecha. Si la amplitud máxima es 8m, tenemos que A=8, si su velocidad de propagación es de 3 $m{\cdot}s^{-1}$, como $v=\frac{\lambda}{T}\quad\Rightarrow\quad T=\frac{\lambda}{v}$, necesitamos λ, como nos dicen que la mínima distancia entre dos puntos en fase es 10 metros, en realidad nos están dando la longitud de onda, así que $\lambda=10m$, $T=\frac{\lambda}{v}=\frac{10m}{3m{\cdot}s^{-1}}=\frac{10}{3}s$. Conocido el periodo como $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{10}{3}}=\frac{6\pi}{10}=\frac{3\pi}{5}rad{\cdot}s^{-1}$. Y el número de ondas lo calculamos mediante: $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\pi}{5}m^{-1}$, así que con todo esto, la ecuación de la onda queda de la forma:

$$y=8{\cdot}sen\left(\frac{3\pi}{5}t-\frac{\pi}{5}x\right)\text{ m.}$$

b) La ecuación de otra onda que se desplaza en sentido contrario es igual que la anterior, pero cambiando el signo de –kx por el de + kx, así que esta onda será:

$$y=8{\cdot}sen\left(\frac{3\pi}{5}t+\frac{\pi}{5}x\right)$$

c) Si sumamos estas dos ondas, obtenemos una interferencia, y nos da lugar a una onda estacionaria.

Una **onda estacionaria** se forma por la interferencia de dos ondas de la misma naturaleza con igual amplitud, longitud de onda (o frecuencia) que avanzan en sentido opuesto a través de un medio.

Las ondas estacionarias permanecen confinadas en un espacio (cuerda, tubo con aire, membrana, etc.). La amplitud de la oscilación para cada punto depende de su posición, la frecuencia es la misma para todos y coincide con la de las ondas que interfieren. Hay puntos que no vibran (nodos), que permanecen inmóviles, estacionarios, mientras que otros (vientres o antinodos) lo hacen con una amplitud de vibración máxima, igual al doble de la de las ondas que interfieren, y con una energía máxima. El nombre de onda estacionaria proviene de la aparente inmovilidad de los nodos. La distancia que separa dos nodos o dos antinodos consecutivos es media longitud de onda.

Una onda estacionaria se puede formar por la suma de una onda y su onda reflejada sobre un mismo eje.

En un punto cualquiera, la onda resultante es la suma de ambas ondas

$$y_1 = 8 \cdot sen\left(\frac{3\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}x\right) \quad y_2 = 8 \cdot sen\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{\pi}{5}x\right)$$

La perturbación resultante en dicho punto será:

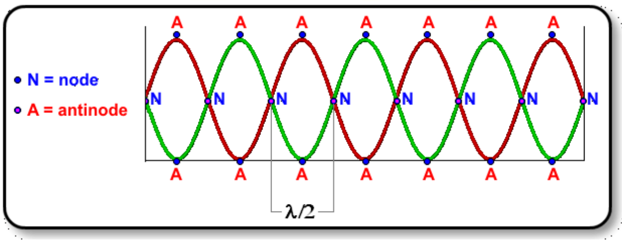
$$Y = y_1 + y_2 = 8\left[sen\left(\frac{3\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}x\right) + sen\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{\pi}{5}x\right)\right] = 16\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right) \cdot sen\left(\frac{3\pi}{5}t\right)$$

d) La posición de los nodos, puntos de amplitud nula, se encuentran donde la amplitud de esta onda $A_r = 16\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)$ es nula, por tanto: $0 = \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{5}x = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, despejando x, obtenemos:

Los nodos se encuentran en $x = (2n-1)\frac{5}{2} = \begin{cases} n = 1 \Rightarrow x = 2{,}5 \\ n = 2 \Rightarrow x = 7{,}5 \\ n = 3 \Rightarrow x = 12{,}5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n = n \Rightarrow x = (2n-1) \cdot 2{,}5 \end{cases}$ metros, donde n=1,2,3,4….

La posición de los vientres o antinodos, puntos de amplitud máxima, se encuentran donde la amplitud de esta onda $A_r = 16\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)$ es máxima, por tanto: $1 = \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{5}x = k\pi$, despejando x, obtenemos:

Los Vientres se encuentran en $x = 5k = \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 0 \\ k = 1 \Rightarrow x = 5 \\ k = 2 \Rightarrow x = 10 \\ k = 3 \Rightarrow x = 15 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k = k \Rightarrow x = 5k \end{cases}$ metros, donde k=0,1,2,3,4….



8.11.- Ejercicios Propuestos

0.- Una partícula vibra según la ecuación $y = 0{,}03 \cdot sen\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.) Calcular:

a) Amplitud, periodo y frecuencia del movimiento.
b) Tiempo mínimo que transcurre entre dos instantes en fase.
c) Posición y velocidad iniciales de la partícula.
d) Represente posición y velocidad de dicho movimiento en función del tiempo.

Solución: a) A = 0,03 m , T = 0,2 s , υ=5 Hz ; b) 0,2 s ; c) y_0= 0,03 m , v_{yo} = 0 m/s

1.- De un resorte elástico de constante K = 500 N/m, cuelga una masa puntual de 5 kg. Estando el conjunto en equilibrio, se desplaza la masa 10 cm, dejándola oscilar libremente a continuación. Calcule:

a) Ecuación de movimiento armónico que describe la masa puntual.
b) Puntos en los que la aceleración de dicha masa es nula.
c) Tiempo que transcurre entre dos instantes en oposición de fase.

Solución: a) x = 0,1 cos (10 t) m , ó x = 0,1 sen (10 t +1,57) m ; b) x = 0 m ; c) t = T/2 = 0,31 s

2. Una partícula de 0,5 kg, que describe un movimiento armónico simple de frecuencia 5/π Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J, y una energía potencial de 0,8 J.

a) Calcule la posición y velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.
b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?

Solución: a) v_I = 0,89 m/s ; x_I = 0,18 m ; $v_{MÁX}$ = 2 m/s; b) 0,14 m

3.- Un movimiento ondulatorio viene dado, en unidades del S.I., por $y = 5 \cdot \cos(4t + 10x)$; con "y" expresada en metros. Calcular:

a) λ, υ, ω, A.
b) Velocidad de propagación de la onda.
c) Perturbación que sufre un punto situado a 3 m. del foco a los 20 s.
d) Expresiones generales de la velocidad y la aceleración de las partículas afectadas por la onda.

Solución: a) λ=0,63 m; υ=0,64Hz; ω=4 rad/s; A=5m; b) 0,4m/s; c) y=-5m ; d) v_y=-20sen (4t+10x); a_y=-80·cos(4t+10x)

4.- La ecuación de una onda es y = 2·sen [2π(5t+0,1x)], en unidades C.G.S. ("y" dada en cm).

a) Calcular: λ, υ, y velocidad de propagación de la onda.
b) ¿Cuál es la velocidad máxima que adquirirán los puntos afectados por la onda? ¿En qué instantes adquirirá dicha velocidad un punto situado a 10 cm de la fuente de perturbación?

Solución: a) λ=0,1 m ; υ=5 Hz ; v=0,5 m/s hacia la izda. ; b) $v_{máx}$=0,628 m/s ; t=(n-2)/10 s

5. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es: y(x,t) = 0,5 sen π (8 t - 4 x) (S.I.)

a) Determine la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de un punto de la cuerda y explique el significado de cada una de ellas.
b) Represente gráficamente la posición de los puntos de la cuerda en el instante t = 0, y la elongación en x= 0 en función del tiempo.

Solución: a) v = 2 m/s; v_y = 4π cos (8πt - 4πx) m/s

6.- La ecuación de un onda transversal es y = 10·sen(2πt-10πz) en el S.I. Calcular:

a) Velocidad de propagación.
b) υ, ω, λ, T y k.
c) Velocidad y aceleración máximas de las partículas de la cuerda afectadas por la onda

Solución: a) 0,2 m/s; b) υ=1 Hz ; $\omega=2\pi$ rad/s ; λ=0,2 m ; T=1s ; k=10π m^{-1} c) $v_{máx}=20\pi$ m/s ; $a_{máx}=40\pi^2$ m/s^2

7.- Escribir la expresión de una onda sinusoidal que se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje OX. La amplitud es 0,02 m, la frecuencia 60 Hz y la velocidad de propagación 10 m/s.

Solución: $y = 0{,}02\ \text{sen}(120\pi t - 12\pi x)$ m

8.- El periodo de un movimiento ondulatorio que se propaga por el eje OX es $3\cdot10^{-3}$ s y la distancia entre los dos puntos más próximos con diferencia de fase $\pi/2$ rad. es de 30 cm en el eje X.
a) Calcular λ y la velocidad de propagación.
b) Si el periodo se duplicase ¿qué le ocurriría a las magnitudes del apartado anterior?

Solución: 1,2 m; 400 m/s

9.- Una onda sinusoidal se propaga a lo largo de una cuerda. El tiempo que transcurre entre el instante de elongación máxima y el de elongación nula en un punto de la cuerda es de 0,17 s. Calcular:
a) Periodo y frecuencia de la onda
b) Velocidad de propagación si $\lambda = 1{,}4$ m.

Solución: a) T=0,68 s ; υ=1,47 Hz ; b)v=2,06 m/s

10.- Una onda armónica se propaga por una cuerda tensa según $y = 0{,}4\cdot\cos(50t-0{,}2x)$ (S.I). Calcular:
a) Longitud de onda λ, y periodo T.
b) Velocidad máxima de oscilación de los puntos de la cuerda.
c) Diferencia de fase, en el mismo instante, entre dos puntos separados 7,5 m.

Solución a) λ = 31,4 m ; T = 0,125 s ; b) vmáx =20 m/s ; c) 1,5 rad

11.- Una onda longitudinal se propaga a lo largo de un resorte en el sentido negativo del eje OX y la distancia más próxima entre dos puntos en fase es de 20 cm. El foco emisor, fijo a un extremo del resorte, vibra con una amplitud de 3 cm y $\upsilon = 25$ Hz. Determinar:
a) Velocidad de propagación de la onda.
b) Expresión de la onda sabiendo que la perturbación en el instante inicial en x = 0 es nula. Represente gráficamente la elongación en función de la distancia para el instante inicial.
c) Velocidad y aceleración máximas de un punto del resorte.

Solución: a) 5 m/s ; b) $y = 0{,}03\ \text{sen}(50\pi t + 10\pi x)$; c) 4,7 m/s ; 740,22 m/s^2

12.- Una onda transversal y sinusoidal tiene una frecuencia de 40 Hz y se desplaza en la dirección negativa del eje x con una velocidad de 28,8 cm/s. En el instante inicial, la partícula situada en el origen tiene un desplazamiento de 2 cm y su velocidad es de -377 cm/s. Encontrar la ecuación de la onda. ¿Qué datos pueden obtenerse de ella? Represente gráficamente la elongación en función de la distancia en el instante inicial.

Solución: $y = 0{,}024\ \text{sen}(80\pi t + 872{,}6x - 0{,}95)$ m ; λ = 0,0072 m ; T = 0,025 s

13.- Una onda estacionaria viene dada por $y = 0{,}04\ \text{sen}(0{,}4x)\cos(25t)$ (S.I.). ¿Cuál es su velocidad de propagación?. Calcular υ, λ, A y la velocidad de propagación de las O.V.

Solución: v_{OE} = 0 m/s ; υ= 3,97 Hz ; λ = 15,7 m ; A = 0,02 m ; v_{OV} = 62,36 m/s

14.- Un alambre vibra según $y = 0{,}5 \cdot \text{sen}(\pi/3x) \cdot \cos(40\pi t)$ (C.G.S). Calcular:

a) υ, A, λ y velocidad de propagación de las ondas viajeras.
b) Distancia entre los nodos.
c) Velocidad de una partícula del alambre que está en x = 1,5 cm en el instante t = 9/8 s.

Solución: a) υ = 20 Hz ; A = 0,25 cm ; λ = 6 cm ; v_{OV} = 1,5 cm/s ; b) 3 cm ; c) 0 cm/s

15.- La ecuación de una onda transversal en una cuerda es $y = 10 \cdot \cos \pi(2x-10t)$ (C.G.S):

a) Escribir la expresión de la onda que, al interferir con ella, producirá una O.E.
b) Indicar la distancia entre los nodos en la O. E. y la amplitud que tendrán los antinodos.

Solución: a) $y = 10 \cos \pi(2x + 10t)$; b) d = 0,5 cm ; A = 20 cm

16.- Una onda viene dada por $y = 10 \cdot \cos(\pi/6\ x) \cdot \cos(10t)$ (C.G.S). Calcular la A de las ondas viajeras y su velocidad de propagación, la distancia entre nodos y entre un nodo y un vientre.

Solución: A_{OV} = 5 cm ; v_{OV} = 19,1 cm/s ; d_{nodos} = 6 cm ; $d_{nodo\text{-}vientre}$ = 3 cm

17.- La ecuación de una onda es $y = 6 \cdot \cos(0{,}2\pi x) \cdot \text{sen}(4\pi t)$ (S.I). Calcular la amplitud de la onda estacionaria y de las ondas cuya superposición podría originarla; la posición de los nodos y antinodos; y la velocidad de una partícula situada en x = 2 m.

Solución: A_{OE} = 6 m ; AOV = 3 m ; x_{nodos} = 2,5 m + nl/2 ; x_{anti} = 0 m + nλ/2 ; $v_y = 7{,}4\ \pi \cos(4\pi t)$ m/s

18.- La ecuación de una onda en una cuerda es $y = 0{,}2 \cdot \cos(0{,}5\pi x) \cdot \text{sen}(30\pi t)$ (S.I.). Determinar:

a) Magnitudes características
b) ¿En qué instantes será máxima la velocidad del punto x = 0,5 m?
c) Amplitud y velocidad de fase de las ondas cuya superposición podría producirla.

Solución: a) A_{OE} = 0,2 m ; λ = 4 m ; υ= 15 Hz ; T = 0,066 s ; k = 0,5π rad/m ; b) t = n/30 s. c) A = 0,1 m ; v = 60m/s

19.- Calcular la energía cinética de una partícula oscilante de 3 g de masa a su paso por la posición de equilibrio, siendo su periodo 0,2 s y su amplitud 4 cm. Representar dicha energía cinética en función del tiempo y de la elongación.

Solución: Ec = $2{,}37 \cdot 10^{-3}$ J

20.- Al suspender un cuerpo de 0,5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si, a continuación, se tira hacia abajo del cuerpo, hasta alargar el muelle 2 cm más, y se suelta, comienza a oscilar.

a) Haga un análisis energético del problema y escriba la ecuación del movimiento de la masa.
b) Si, en lugar de estirar el muelle 2 cm, se estira 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación de movimiento del cuerpo?

Solución: a) $x = 0{,}02 \text{ sen } (14{,}14\ t + 3\pi/2)$ m ; b) sólo cambia A, que toma el valor 0,03 m.

8.12.- Para saber más

21.- Una partícula describe un movimiento oscilatorio armónico simple, de forma que su aceleración máxima es de 18 m/s^2 y su velocidad máxima es de 3 m/s. Encontrar:

a) La frecuencia de oscilación de la partícula.
b) La amplitud del movimiento.

Solución: 0'955 Hz, 0'5 m *(P.A.U. Sep 92)*

22.- Una partícula de 5 g está sometida a una fuerza de tipo F = - kx. En el instante inicial pasa por x=0 con una velocidad de 1 ms^{-1}. La frecuencia del movimiento resultante es de $2/\pi$ Hz. Hallar:

a) la aceleración en el punto de máxima elongación.
b) la energía cinética en función del tiempo

Solución: 4 ms^{-2}; 0'0025 $\cos^2 4t$ *(P.A.U. Sep 93)*

23.- Si un reloj de péndulo adelanta, ¿se debe aumentar o disminuir la longitud del péndulo para corregir la desviación? Razona la respuesta. *(P.A.U. Jun 94)*

24.- Un punto material de masa 25 g describe un M.A.S. de 10 cm de amplitud y período igual a 1 s. En el instante inicial, la elongación es máxima. Calcular

a) La velocidad máxima que puede alcanzar la citada masa y
b) El valor de la fuerza recuperadora a cabo de un tiempo igual a 0'125 s.

Solución: 0'63 m/s; 0'07 N *(P.A.U. Sep 94)*

25.- La energía total de un cuerpo que realiza un M.A.S. es de 3.10^{-4} J y la fuerza máxima que actúa sobre el es $1'5.10^{-2}$ N. Si el período de las vibraciones es 2 s y la fase inicial 60º, determinar:

a) La ecuación del movimiento de este cuerpo;
b) Su velocidad y aceleración para t = 0.

Solución: $x = 0'04\ \text{sen}(\pi t+\pi/3)$; $v_0 = 0'0628$ m/s; $a_0 = -0'342$ m/s^2 *(P.A.U.)*

26.-La ecuación de una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda viene dada por la expresión: $y= 25\ \text{sen}\ [2\pi(0.80t-1.25x)]$, donde x e y se expresan en cm y t en segundos. Determinad la velocidad máxima de oscilación que puede tener un punto cualquiera de la cuerda. (Mayo 91; mayo 93 Anaya Sel., Extremadura, 89)

27.-Una onda sinusoidal transversal que se propaga de derecha a izquierda tiene una longitud de onda de 20 m, una amplitud de 4 m y una velocidad de propagación de 200 m/s. Hallar:

a) La ecuación de la onda.
b) Velocidad transversal máxima de un punto alcanzado por la vibración.
c) Aceleración transversal máxima de un punto del medio en vibración.
d) Definir qué se entiende por onda estacionaria. (Mayo 91; Anaya Sel., Salamanca, 89)

Solución: $y=4\cdot\text{sen}2\pi(t/0.1 - x/20)$; 80π m/s; $1600\pi^2$ m/s^2.

28.- Determinar la diferencia de fase que habrá entre las vibraciones de dos puntos que se encuentran, respectivamente, a las distancias de 10 y 16 m del centro de vibración, sabiendo que la velocidad de propagación es de 300 m/s y el período es de 0.04 s. Calcula la longitud de onda, el número de onda k y la frecuencia f. (Mayo 91; mayo 93; Anaya Sel., Valencia, junio 89).

Solución: π rad

29.-Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda de 1.4 m de longitud, sujeta por sus extremos, y vibrando en su modo fundamental (armónico fundamental, n=1). El tiempo que tarda un punto en pasar de su desplazamiento máximo a su desplazamiento nulo es de 0.17 s. Determinad la frecuencia de vibración, la velocidad de propagación de la onda, y la longitud de onda. (Mayo 91; Anaya Sel., Cádiz, 89)

Solución:: 1.47 Hz; 4.116 m/s; 2.8 m.

30.-Una onda transversal se propaga por una cuerda según la ecuación $y=0.4\cos(100t-0.5x)$ en unidades S.I. Calculad: Amplitud, periodo, frecuencia y longitud de onda. Determinad la velocidad de propagación. Calculad el estado de vibración (elongación, velocidad y aceleración) de un punto situado a 20 cm del foco en t=0.5 s. (Mayo 93; Anaya Sel., Granada, junio 91)

Solución: 0.4 m; 15.9 Hz; 0.063 s; 4 m; 200 m/s; 0.374 m, 14.296 m/s, -3735 m/s^2.

31.-Se dispone de un cilindro de 5 m de longitud con una de sus bases plateada en forma de espejo plano. El cilindro es transparente y de índice de refracción n=2. Si por la base no plateada y perpendicularmente a ella penetra un rayo de luz de longitud de onda en el vacío de 6•10-7 m, determínese el tiempo que tarda en salir el rayo de luz del cilindro y la distancia entre los nodos de las ondas estacionarias que forma la onda incidente y la reflejada en el cilindro. (Mayo 93; Anaya Sel., Córdoba, 89) .

Solución: $6.7\ 10^{-8}$ s; $3\ 10^{-7}$ m.

32.-Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación y=5 sen(10t - 4x), donde x e y vienen medidos en metros y t en segundos.

a) Determina la amplitud, frecuencia, longitud de onda, velocidad, dirección y sentido de propagación de la onda.
a) b) Escribe la ecuación de otra onda que interfiriendo con la anterior produjese una onda estacionaria.
b) c) Determina la ecuación de la onda estacionaria producida.
c) d) Calcula la velocidad de vibración de un punto de la primera onda situado a x=0.5 m del foco. Ídem para la onda estacionaria. (Sept. 97; Selectividad, Universidad de Murcia, 1992)

Solución: 5m; 5 Hz; 0.2 s; 2.5 m/s; 0.5 m; $y = 5\ \text{sen}\ (10\pi t+4\pi x)$: $y=10\cos 4\pi x \,\text{sen} 10\pi t$; $50\pi\cos 10\pi t$; 0 (nodo)

33.-En una cuerda tensa, sujeta por sus extremos, de 1 m de longitud, observamos la existencia de una onda estacionaria. La velocidad de propagación de la perturbación vale 293,7 m/s, y observamos el armónico cuya frecuencia es de 440 Hz. ¿De qué armónico se trata: el fundamental, el 2º, el 3º,.... ? ¿Cuántos nodos presenta? ¿Y cuántos vientres? ¿Qué frecuencia tendría el armónico o modo fundamental? (Mayo 98 ; Bruño, 8, 248)

Solución: El 3º ; 4 nodos y 3 vientres ; 146.85 Hz

34.-En dos vértices consecutivos de un cuadrado de 4 cm de lado hay dos focos que emiten ondas idénticas de amplitud 3 cm, longitud de onda 1 cm y frecuencia 100 Hz. Escribid las ecuaciones de ambas ondas. Encontrad la ecuación de la perturbación resultante en uno cualquiera de los otros vértices. ¿Cuánto vale la máxima amplitud de la perturbación obtenida en ese vértice? Razona, sin hacer más cálculos, cuanto valdrá la amplitud resultante en el centro del cuadrado. (Mayo 99)

Solución: 2.83 cm; 6 cm

35.-Una onda sinusoidal de 10 m de amplitud se propaga de izquierda a derecha con un periodo de 12 s. Calcula la elongación en el origen para t=1 s a partir del inicio del movimiento desde la posición de equilibrio. En el instante t = 1 s la elongación se anula en un punto situado a 4 cm a la derecha del origen. Calcula la longitud de onda (Mayo 99; Sel. 88)

Solución: 5 m; 0.48 m

36.-La ecuación de una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda viene dada por la expresión y= 0.5 sen [(x-0.1t- 1/3). Determina:

a) La amplitud, el período y la longitud de onda.
b) La frecuencia y la velocidad angular.
c) La velocidad de propagación.
d) La velocidad máxima de un punto en vibración. (Mayo 91; Anaya Sel., Sevilla, 89)

Solución: 0.5 m; 20 s; 2 m; 0.1 m/s; 0.5 Hz; $\pi/10$ rdn/s; 0.05π m/s.

37.-Un punto está sometido a la acción de las perturbaciones producidas en dos focos coherentes (que producen ondas idénticas) y situado a 4 m de uno y a 6 m del otro. Determina la ecuación que define su estado de vibración sabiendo que el movimiento ondulatorio de los focos se propaga a 1600 m/s, con una amplitud de 10 cm y una frecuencia de 400 Hz. (Mayo 91; Edelvives, X, 212, 3)

Solución: y=0.

38.-Una onda atraviesa la superficie de separación entre dos medios diferentes. En el segundo la velocidad de propagación de la onda es el doble que en el primero. Calculad para qué valores del ángulo de incidencia es posible la refracción. (Mayo 91; mayo 93; Anaya Sel., Valladolid, 89).

Solución: $\hat{\imath} \leq 30^{o}$

39.- La ecuación de onda de un movimiento ondulatorio viene dada por la expresión siguiente: y= 2 sen (10 t+x), donde x está en cm y t en segundos. Determinad el sentido de propagación, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación de la onda. Calculad también en qué instante alcanza su velocidad máxima un punto que dista 10 cm de la fuente de ondas. (Mayo 92; Anaya Sel., las Islas Baleares , junio 91).

Solución: 5 Hz; 2π cm; -10π cm/s; t=[0.0817+n0.1] s.

40.- Dos ondas armónicas tienen en el S.I. las ecuaciones $y_1=10\text{sen}(1000t-200x)$ e $y_2=10\text{sen}(1000t+200x)$. Determinad la ecuación de la onda estacionaria resultante, la amplitud en los nodos, y la distancia entre dos vientres consecutivos. (Mayo 93; Schaum, XIV, 303, 32)

Solución: $y=20\cos 200x \,\text{sen}1000t$; 0; $\pi/200$ m.

41.-Dos fuentes vibrantes, A y B, de la misma frecuencia 100 Hz están en fase, separadas 3 cm, produciendo ambas vibraciones idénticas de 2 mm de amplitud que se propagan a una velocidad de 0.6 m/s. Determina el estado vibratorio y la amplitud de un punto P que está situado a una distancia $r_2=3.3$ cm de A y a una distancia $r_1=2.4$ cm de B. Determina la posición de los puntos situados en la recta AB que estén inmóviles. (Set. 93; Anaya Sel., Barcelona, junio 92)

Solución: y=0; 1.65, 1.95, 2.25, 2.55, 2.85 m.

42.- De cierta onda se sabe que tiene una amplitud máxima de 8 m, que se desplaza de izquierda a derecha con una velocidad de 3 m/s, y que la mínima distancia entre dos puntos que vibran en fase es de 10 m. Escribid su ecuación. Escribid la ecuación de otra onda idéntica pero desplazándose en sentido contrario. Escribid la ecuación de la onda resultante de la interferencia que se produce entre las dos ondas anteriores. Calculad las posiciones de los nodos y los vientres de esta onda resultante. (Mayo 97; Crespo, Selectividad, 238, 31)

Solución: $y=8\text{sen}2\pi(0.3t-0.1x)$; $y=8\text{sen}2\pi(0.3t+0.1x)$; $y=16\cos(0.2\pi x)\text{sen}(0.6\pi t)$; 2.5, 7.5, 12.5,...; 0, 5, 10,...

43.- Por una cuerda se desplaza una onda cuya ecuación es $y(x,t)=0.03$ sen $2(x-0{,}1t)$ en el S.I.. Calculad su período, frecuencia y longitud de onda. Calculad el desfasaje (en radianes) entre dos puntos alcanzados por la onda separados entre sí 2π metros. (Mayo 98)

Solución: π m ; 10π s ; $1/10\pi$ Hz ; 4π rad

44.- A la onda anterior se le hace una película con una cámara de vídeo que sólo graba una pequeña porción de la cuerda, situada a 10 metros del foco. ¿Qué se verá en esa película ? Explicadlo y dibujadlo. ¿Cuál será la ecuación de lo que se ve? (Mayo 98)

Solución: 0.03sen2(10-0.1t)

45.- La ecuación de una onda viene dada en el SI por $y(x,t) = 0.5$ sen$[(\pi/2)(x - 12\,t + 2)]$. Calculad la amplitud, la frecuencia, el período, la longitud de onda y la velocidad de propagación. Calculad su fase inicial en radianes. Calculad el valor de la perturbación en el foco en el instante inicial. Calculad la velocidad de vibración en el foco en el instante inicial. Comentad los resultados obtenidos. (Mayo 99)

Solución: 0.5 m; 3 Hz; 0.33 s; 12 m/s; π rdn ; 0 m; 3π m/s

46.- De una onda estacionaria se sabe que tiene una amplitud máxima de 6 cm, una longitud de onda de 4 m y un período de 0.02 s. Escribid su ecuación y las ecuaciones de las dos ondas que la originaron. Calculad la posición de sus tres primeros nodos y de sus tres primeros vientres. Haced un dibujo en donde se vean los resultados obtenidos. (Mayo 99)

Solución: $6\cdot\cos(2\pi x/4)\cdot\text{sen}(2\pi 50t)$; $3\text{sen}2\pi(50t-x/4)$; $3\text{sen}2\pi(50t+x/4)$; 1, 3, 5...0, 2, 4... m

47.- La ecuación de una onda transversal que se propaga la través de una cuerda es $y=0{,}1\text{sen}[2\pi(0{,}4t–6{,}25x)]$ (sistema internacional). Determina:

a) La amplitud, longitud de onda, frecuencia, constante y velocidad de propagación.
b) Velocidad y aceleración transversal de las partículas del medio en x = 0, t = T / 2.

Solución: a) A = 0,1 m; λ = 0,16 m; f = 0,4 Hz; k = 39 rad/m; v = 0,064 m/s; b) v = -0,25 m/s; a = 0

48.- Una onda se transmite a lo largo de una cuerda. El punto situado en x=0 oscila según la ecuación $y=0{,}1\cos 10\pi t$ y otro punto situado en x=0,03m oscila según la ecuación $y=0{,}1\cos(10\,\pi\,t - \pi\,/\,4)$. Calcula:

a) La constante de propagación, la velocidad de propagación y la longitud de onda.
b) La velocidad de oscilación de un punto cualquiera de la cuerda.

Solución: a) k = 26 rad/m; v = 1,2 m/s; λ = 0,24 m; b) v = - π · sen (10 π t - 8,33 π x) m/s

49.- La función de onda que describe la propagación de un sonido es $y(x) = 6\cdot10^{-2}\cos(628t-1{,}90x)$ (magnitudes en el sistema internacional). Calcula:

a) La frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.
b) La velocidad y la aceleración máximas de un punto cualquier del medio en el que se propaga la onda.

Solución: a) f = 100 Hz; λ = 3,31 m; v = 330 m/s; b) $v_{máx}$ = 40 m/s; $a_{máx} = 2\cdot10^4$ m/s^2

50.- Una onda armónica transversal se propaga en la dirección del eje x: y (x, t) = 0,5 sen (4x – 6t) (S.I.). Calcula:

a) La longitud de onda, la frecuencia con la que vibran las partículas del medio y la velocidad de propagación de la onda.
b) La velocidad de un punto situado en x = 1 m en el instante t = 2 s
c) Los valores máximos de la velocidad y la aceleración.

Solución: a) λ = 1,6 m; f = 0,96 Hz; v = 1,5 m/s; b) v1 = 0,44 m/s; c) $v_{máx}$ = 3 m/s; $a_{máx}$ = 18 m/s^2

51.- La ecuación de propagación de un movimiento ondulatorio es y(x, t) = 2 sen(8 π t – 4π x) (S.I.)

a) ¿Cuál es la amplitud, la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda?
b) ¿Cuál es (en función del tiempo) la velocidad y la aceleración de un punto para el que x es constante?

Solución: a) A = 2 m; n = 4 Hz; v = 2 m/s; b) v = 16 π · cos(8π t- 4π x) m/s; a = -128 π^2 · sen(8π t- 4π x) m/s^2

52.- La ecuación de una onda sonora que se propaga en la dirección del eje X es: y = 4 sen 2π (330 t – x) (S.I.). Halla:

a) La velocidad de propagación.
b) La velocidad máxima de vibración de un punto del medio en el que se transmite la onda.
c) Define la energía de una onda armónica.

Solución: a) v = 330 m·s^{-1} ; b) $v_{máx} = 8{,}3\cdot10^3$ m/s

53.- Por una cuerda tensa se propaga una onda transversal con amplitud 5 cm, frecuencia 50 Hz y velocidad de propagación 20 m/s. Calcula:

a) La ecuación de onda y(x, t)
b) Los valores del tiempo para los que y(x, t) es máxima en la posición x = 1 m

Solución: a) y = 0,05 · sen(100π t – 5π x) [m]; b) t = 0,055 +0,02 n [s], (n = 0, 1, 2 ...)

54.- Una onda periódica viene dada por la ecuación y(t, x) = 10 sen 2π(50t – 0,2x) en unidades del S.I. Calcula:

a) Frecuencia, velocidad de fase y longitud de onda.
b) La velocidad máxima de una partícula del medio y los valores del tiempo t para los que esa velocidad es máxima (en un punto que dista 50 cm del origen)

Solución: a) f = 50 Hz; λ = 5,0 m; v = 250 m/s; b) $v_{máx}$ = 3,1 km/s; t = 0,002 + 0,010 n [s], (n = 0, 1, 2 ...)

55.- Una onda plana se propaga en la dirección x positiva con velocidad v = 340 m/s, amplitud A = 5 cm y frecuencia f = 100 Hz (fase inicial φ_0 = 0)

a) Escribe la ecuación de la onda.
b) Calcula la distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un instante dado es 2π/3.

Solución: a) y = 0,05 · sen(200π t – 0,588π x) [m]; b) Δx = 1,13 m

56.- La ecuación de una onda es y(x, t) = 2 cos 4π (5t - x) (S.I.). Calcula:

a) La velocidad de propagación.
b) La diferencia de fase entre dos puntos separados 25 cm.
c) En la propagación de una onda ¿qué se transporta materia o energía? Justifícalo con un ejemplo.

Solución: a) v = 5 m/s; b) $\Delta\varphi$ = π rad

57.- La ecuación de una onda transversal es $y(t, x) = 0,05 \cos(5t - 2x)$ (magnitudes en el S.I.). Calcula:

a) Los valores de t para los que un punto situado en x = 10 m tiene velocidad máxima.
b) ¿Qué tiempo ha de transcurrir para que la onda recorra una distancia igual a 3λ?
c) ¿Esta onda es estacionaria?

Solución: a) f = 50 Hz; λ = 5,0 m; v = 250 m/s; b) $v_{máx}$ = 3,1 km/s; t = 0,002 + 0,010 n [s], (n = 0, 1, 2 ...)

58.- La ecuación de una onda es $y(t, x) = 0,2 \text{ sen } \pi (100 t - 0,1 x)$. Calcula:

a) La frecuencia, el número de ondas k, la velocidad de propagación y la longitud de onda.
b) Para un tiempo fijo t, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto que se encuentra en x = 10 m?
c) Para una posición fija x, ¿para qué tiempos el estado de vibración de ese punto está en fase con la vibración para t = 1 s?

Solución: a) f = 50 Hz; k = 0,31 rad/m; v = $1,0 \cdot 10^3$ m/s; λ = 20 m ; b) x = 10+20 n; c) t=1,0+0,020 n

59.- Una onda armónica se propaga en dirección x con velocidad v = 10 m/s, amplitud A = 3 cm y frecuencia f = 50 Hz. Calcula:

a) La ecuación de la onda.
b) La velocidad y aceleración máxima de un punto de la trayectoria.
c) Para un tiempo fijo t, ¿qué puntos de la onda están en fase con el punto x = 10 m?

Solución: a) $y = 0,030 \text{ sen}(100\pi t - 10\pi x)$ [m]; b) v_{max} = 9,42 m/s; $a_{max} = 2,96 \cdot 10^3$ m/s2; c) x´=10+0,2 n

60.- De un resorte elástico de constante k = 500 $N \cdot m^{-1}$ cuelga una masa puntual de 5 kg. Estando el conjunto en equilibrio, se desplaza la masa 10 cm, dejándola oscilar a continuación libremente.
Calcula:

a) La ecuación del movimiento armónico que describe la masa puntual.
b) Los puntos en los que la aceleración de esta masa es nula.

Solución: a) $y = 0,1 \cdot \cos(10 t)$ [m], b) y = 0

61.- Una butaca está montada sobre un resorte. Cuando se sienta una persona de 75 kg, oscila con una frecuencia de 1 Hz. Si sobre ella se sienta ahora otra persona de 50 kg,

a) ¿Cuál será la nueva frecuencia de vibración?
b) ¿Cuánto descenderá la butaca cuando alcance el equilibrio?
DATOS: g = 9,81 $m \cdot s^{-2}$

Solución: a) f = 0,8 Hz; b) Δy = 0,2 m

62.- Un objeto de 100 g, unido a un muelle de k = 500 $N \cdot m^{-1}$, realiza un movimiento armónico simple.
La energía total es de 5 J. Calcula:

a) La amplitud.
b) La velocidad máxima y la frecuencia de la oscilación.
c) Indica cualitativamente en una gráfica como varían la energía total, cinética y potencial con la elongación x.

Solución: a) A = 0,14 m; b) v_{max} = 9,9 m/s; f = 11 Hz

63.- Una masa de 0,05 kg realiza un M.A.S. según la ecuación $x = A \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$. Sus velocidades son 1 m/s y 2 m/s cuando sus elongaciones son, respectivamente, 0,04 y 0,02 m. Calcula:
a) El período y la amplitud del movimiento.
b) La energía del movimiento oscilatorio y la energía cinética y potencial cuando x = 0,03 m.

Solución: a) T = 0,13 s; A = 0,045 m; b) E = 0,125 J; EP = 0,056 J; Ec = 0,069 J

64.- Un cuerpo de masa 100 gramos está unido a un resorte que oscila en uno plano horizontal. Cuando se estira 10 cm y se suelta, oscila con un período de 2 s. Calcula:

a) La velocidad cuando se encuentra a 5 cm de su posición de equilibrio.
b) La aceleración en ese momento.
c) La energía mecánica.

Solución: a) v_5 = 0,27 m/s, b) a = -0,49 m/s^2 ; c) E = $4,93 \times 10^{-3}$ J

65.- La fuerza máxima que actúa sobre una partícula que realiza un movimiento armónico simple es $2\cdot10^{-3}$ N y la energía total es de $5\cdot10^{-4}$ J.

a) Escribe la ecuación del movimiento de esa partícula si el período es de 4 s y la fase inicial es de 30º.
b) ¿Cuánto vale la velocidad al cabo de 1 s de comenzar el movimiento?

Solución: a) $x = 0{,}50 \cdot \cos(\pi\, t / 2 + \pi / 6)$ [m]; b) $v_1 = -0{,}68$ m/s.

66.- Una masa de 0,1 kg unida a un resorte de masa despreciable realiza oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia de 4 Hz siendo la energía total del sistema oscilante 1 J. Calcula:

a) La constante elástica del resorte y la amplitud de las oscilaciones.

b) La energía cinética y potencial de la masa oscilante en un punto situado a distancia A/4 de la posición de equilibrio.

Solución: a) $k = 63\ N\cdot m^{-1}$; $A = 0{,}18$ m; b) $Ep = 6{,}3\cdot10^{-2}$ J; $Ec \approx 0{,}9$ J

67.- Un resorte de masa despreciable se estira 10 cm cuando se le cuelga una masa de 200 g. A continuación el sistema formado por el resorte y la masa se estira con la mano otros 5 cm y se suelta en el instante t = 0 s. Calcula:

a) La ecuación del movimiento que describe el sistema.
b) La energía cinética y potencial cuando la elongación y = 3 cm.

Dato $g = 9{,}80\ m/s^2$

Solución: a) $y = 0{,}05 \cdot \cos(9{,}9t)$ [m]; b) $Ec = 15{,}7\cdot10^{-3}$ J; $Ep = 8{,}8\cdot10^{-3}$ J.

68.- Un resorte de masa despreciable se estira 0,1 m cuando se le aplica una fuerza de 2,45 N. Se fija en su extremo libre una masa de 0,085 kg y se estira 0,15 m a lo largo de una mesa horizontal a partir de su posición de equilibrio y se suelta dejándolo oscilar libremente sin rozamiento. Calcula:

a) La constante elástica del resorte y el período de oscilación.
b) La energía total de la oscilación y las energías potencial y cinética cuando x = 0,075 m.

Solución: a) k = 24,5 N/m; T = 0,37 s; b) E = 0,28 J; $E_p = 0{,}07$ J; $E_c = 0{,}21$ J

69.- Una masa de 0,01 kg realiza un movimiento armónico simple de ecuación $y = 5 \cos (2t+\pi/6)$. (Magnitudes en el S.I.). Calcula:

a) Posición, velocidad y aceleración en t = 1 s.
b) Energía potencial en y = 2 m.
c) La energía potencial, ¿es negativa en algún instante?

Solución: a) $y_1 = -4{,}08$ m; $v_1 = -5{,}79$ m/s; $a_1 = 16{,}3\ m/s^2$; b) $E_p = 0{,}08$ J

70.- De un resorte de 40 cm de longitud se cuelga un peso de 50 g de masa y, alcanzado el equilibrio, la longitud del resorte es de 45 cm. Se estira con la mano el conjunto masa-resorte 6 cm y se suelta. Halla:

a) La constante del resorte.
b) La ecuación del M.A.S. que describe el movimiento.
c) Deduce la ecuación de la energía potencial elástica.

Dato: g = 9,8 m·s-2

Solución: a) k = 9,8 N/m; b) $y = 0{,}060 \cdot \cos(14\ t)$ [m]

71.- Una masa de 5 g realiza un movimiento armónico simple de frecuencia 1 Hz y amplitud 10 cm. Si en t=0 la elongación es la mitad de la amplitud, calcula:

a) La ecuación del movimiento.
b) La energía mecánica.
c) ¿En qué punto de la trayectoria es máxima la energía cinética y en cuáles es máxima la energía potencial?

Solución: a) $x = 0{,}100 \cdot \mathrm{sen}(2\,\pi \cdot t + \pi / 6)$ [m] b) $E = 9{,}87\cdot10^{-4}$ J

72.- Un péndulo simple oscila con una elongación de 18º dando 10 oscilaciones cada segundo. Tomando como instante inicial la posición de equilibrio:

a) Escribe su elongación en función del tiempo.

b) Determina su período de oscilación en la Luna, donde la gravedad es aproximadamente un sexto de la terrestre.

Solución: a) $s = 7{,}81\times10^{-4}\cdot \text{sen}(20\,\pi\,t)$ [m]; b) $T_L = 0{,}245$ s.

73.- Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16\,\pi^2\,x$.

a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm.
b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio.

74.- Un bloque de 0´5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m/s.

a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso.
b) Determine la amplitud y la frecuencia de oscilación.

75.- Una cuerda de guitarra de longitud L=65 cm vibra estacionariamente en su modo fundamental a una frecuencia f=440 Hz. Representa gráficamente el perfil de esta onda, indicando la posición de nodos y vientres, y calcula la velocidad de propagación de ondas transversales en esta cuerda.

Solución: $\lambda = 1{,}30m \qquad \upsilon = 572 m\cdot s^{-1}$

76.- Sea un tubo de un metro de longitud, abierto por un extremo y cerrado por el otro. Por el procedimiento adecuado se producen ondas estacionarias dentro del tubo y se oye un sonido de 84 Hz, que corresponde a la frecuencia fundamental. Calcula: a) La velocidad del sonido, b) la frecuencia del segundo armónico.

Solución: $\upsilon = 336 m\cdot s^{-1} \qquad f_2 = 252Hz$

77.- Se aplica una tensión de 64 N a una cuerda de 2m de longitud y 20 gr de masa fija por sus dos extremos. Calcula: a) La velocidad de propagación de las ondas transversales en la cuerda, b) La frecuencia fundamental de vibración de la cuerda, c) La tensión que habría que aplicar sobre ella para que su frecuencia fundamental se duplicara.

Solución: $a) 80 m\cdot s^{-1} \qquad b) f = 20Hz \qquad c) F = 256N$

8.13.- Exámenes Pruebas Acceso a la Universidad UGR

8.13.1.- Movimiento armónico simple. PAU

(97-E) Al suspender un cuerpo de 0,5 kg del extremo libre de un muelle que cuelga verticalmente, se observa un alargamiento de 5 cm. Si a continuación, se tira hacia abajo del cuerpo, hasta alargar el muelle 2 cm más, y se suelta, comienza a oscilar.

a) Haga un análisis energético del problema y escriba la ecuación del movimiento de la masa.
b) Si, en lugar de estirar el muelle 2 cm, se estira 3 cm, ¿cómo se modificaría la ecuación del movimiento del cuerpo?

(97-R) Un muelle de constante elástica 250 Nm^{-1}, horizontal y con un extremo fijo, está comprimido 10 cm. Un cuerpo de 0,5 kg situado en su extremo libre, sale despedido al librarse el muelle.

a) Explique las variaciones de energía del muelle y del cuerpo, mientras se estira el muelle.
b) Calcule la velocidad del cuerpo en el instante de abandonar el muelle.

(97-R) Sobre una superficie horizontal se dispone un cuerpo de 0,5 kg, unido a uno de los extremos de un muelle que está fijo por el otro. Cuando se tira del cuerpo hasta alargar el muelle 10 cm y se suelta, comienza a oscilar con un período de 2 s.

a) Haga un análisis energético del problema y calcule los valores de las energías cinética y potencial en los puntos extremos de la oscilación y en el punto de equilibrio.
b) Represente la posición del cuerpo en función del tiempo. ¿Cómo cambiaría dicha representación si la masa del cuerpo fuera de 2 kg?

(98-E) Una partícula de 0,5 kg, que describe un movimiento armónico simple de frecuencia $\frac{5}{\pi}$ Hz, tiene inicialmente una energía cinética de 0,2 J y una energía potencial de 0,8 J.
a) Calcule la posición y la velocidad iniciales, así como la amplitud de la oscilación y la velocidad máxima.
b) Haga un análisis de las transformaciones de energía que tienen lugar en un ciclo completo. ¿Cuál sería el desplazamiento en el instante en que las energías cinética y potencial son iguales?

(98-E) Un cuerpo de 10 kg se lanza con una velocidad de 30 m s^{-1} por una superficie horizontal lisa hacia el extremo libre de un resorte horizontal, de constante elástica 200 N/m, fijo por el otro extremo.
a) Analice las variaciones de energía que tienen lugar a partir de un instante anterior al impacto con el resorte y calcule la máxima compresión del resorte.
b) Discuta en términos energéticos las modificaciones relativas al apartado a) si la superficie horizontal tuviera rozamiento.

(99-R) Un bloque de 8kg desliza por una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad de 10 m s^{-1} e incide sobre el extremo libre de un resorte, de masa despreciable y constante elástica k = 400 N m^{-1}, colocado horizontalmente.
a) Analice las transformaciones de energía que tienen lugar desde un instante anterior al contacto del bloque con el resorte hasta que éste, tras comprimirse, recupera la longitud inicial, ¿cómo se modificaría el balance energético anterior si existiera rozamiento entre el bloque y la superficie?
b) Calcule la comprensión máxima del resorte y la velocidad del bloque en el instante de separarse del resorte, en el supuesto inicial de que no haya rozamiento.

(99-E) Un cuerpo de 0,5 kg se encuentra inicialmente en reposo a un altura de 1 m por encima del extremo libre de un resorte vertical, cuyo extremo inferior está fijo. Se deja caer el cuerpo sobre el resorte y, después de comprimirlo, vuelve a subir. El resorte tiene una masa despreciable y una constante elástica k = 200 N m^{-1}.
a) Haga un análisis energético del problema y justifique si el cuerpo llegará de nuevo al punto de partida.
b) Calcule la máxima compresión que experimenta el resorte. Datos: g = 10 m s^{-2}

(99-R) Una partícula de 2 g oscila con movimiento armónico simple de 4 cm de amplitud y 8 Hz de frecuencia y en el instante t = 0 se encuentra en la posición de equilibrio.
a) Escriba la ecuación del movimiento y explique las variaciones de energías cinética y potencial de la partícula durante un periodo.
b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando la elongación es de 1 cm.

(99-R) Una partícula describe un movimiento armónico simple, entre dos puntos A y B que distan 20 cm, con un periodo de 2 s.
a) Escriba la ecuación de dicho movimiento armónico simple, sabiendo que para t = 0 la partícula se encuentra en el punto medio del segmento AB.
b) Explique cómo varían las energías cinética y potencial durante una oscilación completa.

(00-R) Un bloque de 5 kg desliza sobre una superficie horizontal. Cuando su velocidad es de 5 m s^{-1} choca contra un resorte de masa despreciable y de constante elástica k = 2500 N/m. El coeficiente de rozamiento bloque superficie es 0,2.
a) Haga un análisis energético del problema.
b) Calcule la longitud que se comprime el resorte y la distancia que recorrerá el bloque cuando se mueve despedido por el resorte, medida desde la posición de equilibrio de éste. g = 10 m s^{-2}

(00-R) Un resorte vertical se alarga 2 cm cuando se cuelga de su extremo inferior un cuerpo de 10 kg. Se desplaza dicho cuerpo hacia abajo y se suelta, de forma que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3 cm.
a) Calcule la constante recuperadora del resorte y el período del movimiento.

b) Haga un análisis de las transformaciones energéticas que tienen lugar en una oscilación completa y calcule el valor de las energías cinética y potencial elástica cuando el desplazamiento es de 1,3 cm.

(01-E) Un objeto de 0,2 kg, unido al extremo de un resorte, efectúa oscilaciones armónicas de 0,1 π s de periodo y su energía cinética máxima es de 0,5 J.

a) Escriba la ecuación de movimiento del objeto y determinar la constante elástica del resorte.
b) Explique cómo cambiarían las características del movimiento si: i) se sustituye el resorte por otro de constante elástica doble; ii) se sustituye el objeto por otro de masa doble.

(01-R) Un cuerpo de 2 kg cae sobre un resorte elástico de constante k = 4000 N m^{-1}, vertical y sujeto al suelo. La altura a la que se suelta el cuerpo, medida sobre el extremo superior del resorte, es de 2 m.

a) Explique los cambios energéticos durante la caída y la compresión del resorte.
b) Determine la deformación máxima del resorte. g = 10 m s^{-2}

(02-E) a) ¿Qué características debe tener una fuerza para que al actuar sobre un cuerpo le produzca un movimiento armónico simple? B) Represente gráficamente el movimiento armónico simple de una partícula dado por $y = 5 \cos (10 t + \pi/2)$ (S I) y otro movimiento armónico que tenga una amplitud doble y una frecuencia mitad que el anterior.

(03-R) Sobre un plano horizontal sin rozamiento se encuentra un bloque de masa m = 1,5 Kg, sujeto al extremo libre de un resorte horizontal fijo por el otro extremo. Se aplica al bloque una fuerza de 15 N, produciéndose un alargamiento del resorte de 10 cm y en esta posición se suelta el cuerpo, que inicia un movimiento armónico simple.

a) Escriba la ecuación de movimiento del bloque.
b) Calcule las energías cinética y potencial cuando la elongación es de 5 cm.

(03-R) Un bloque de 0,5 kg está colocado sobre el extremo superior de un resorte vertical que está comprimido 10 cm y, al liberar el resorte, el bloque sale despedido hacia arriba verticalmente. La constante elástica del resorte es 200 N m^{-1}.

a) Explique los cambios energéticos que tienen lugar desde que se libera el resorte hasta que el cuerpo cae y calcule la máxima altura que alcanza el bloque.
b) ¿Con qué velocidad llegará el bloque al extremo del resorte en su caída? g = 10 m s^{-2}

(04-E) Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16 \pi^2 x$.

a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm.
b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio.

(05-R) Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J.

a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima.
b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios en la energía cinética y potencial durante una oscilación.

(06-E) Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica k = 72 N m^{-1}. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m s^{-1}.

a) Razone los cambios energéticos que se producen en el proceso.
b) Determine la amplitud y la frecuencia de oscilación.

(07-R) Un bloque de 2 kg se encuentra sobre un plano horizontal, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica k = 150 N m-1, comprimido 20 cm. Se libera el resorte de forma que el cuerpo desliza sobre el plano, adosado al extremo del resorte hasta que éste alcanza la longitud de equilibrio, y luego continúa moviéndose por el plano. El coeficiente de rozamiento es de 0,2.

a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar a lo largo del movimiento del bloque y calcule su velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte.
b) Determine la distancia recorrida por el bloque hasta detenerse. ($g = 10\ m\ s^{-2}$)

(07-E) Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.
a) Escriba la ecuación de movimiento si la aceleración máxima es $5\pi^2$ cm s^{-2}, el periodo de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.
b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

(09-R) Un cuerpo de 2 kg se encuentra sobre una mesa plana y horizontal sujeto a un muelle, de constante elástica $k = 15\ N \cdot m^{-1}$. Se desplaza el cuerpo 2 cm de la posición de equilibrio y se libera.
a) Explique cómo varían las energías cinética y potencial del cuerpo e indique a qué distancia de su posición de equilibrio ambas energías tienen igual valor.
b) Calcule la máxima velocidad que alcanza el cuerpo.

(09-R) Un bloque de 1 kg, apoyado sobre una mesa horizontal y unido a un resorte, realiza un movimiento armónico simple de 0,1 m de amplitud. En el instante inicial su energía cinética es máxima y su valor es 0,5 J.
a) Calcule la constante elástica del resorte y el periodo del movimiento.
b) Escriba la ecuación del movimiento del bloque, razonando cómo obtiene el valor de cada una de las variables que intervienen en ella.

(10-E) Un cuerpo, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, efectúa un movimiento armónico simple y los valores máximos de su velocidad y aceleración son 0,6 m s^{-1} y 7,2 m s^{-2} respectivamente.
a) Determine el período y la amplitud del movimiento.
b) Razone cómo variaría la energía mecánica del cuerpo si se duplicara: i) la frecuencia; ii) la aceleración máxima.

(10-R) Un bloque de 0,12 kg, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, oscila con una amplitud de 0,20 m.
a) Si la energía mecánica del bloque es de 6 J, determine razonadamente la constante elástica del resorte y el periodo de las oscilaciones.
b) Calcule los valores de la energía cinética y de la energía potencial cuando el bloque se encuentra a 0,10 m de la posición de equilibrio.

8.13.2.- Movimiento Ondulatorio. PAU

(96-E) Una antena emite una onda electromagnética de frecuencia 50 Hz.
a) Calcule su longitud de onda.
b) Determine la frecuencia de una onda sonora de la misma longitud de onda.

$$c = 3 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}\ ;\ v_s = 340\ m\ s^{-1}$$

(97-R) El espectro visible en el aire está comprendido entre las longitudes de onda 380 nm (violeta) y 780 nm (rojo).
a) Calcule las frecuencias de estas radiaciones extremas. ¿Cuál de ellas se propaga a mayor velocidad?
b) Determine entre qué longitudes de onda está comprendido el espectro visible del agua, cuyo índice de refracción es 4/3.

$$c = 3 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}$$

(97-R) Una onda electromagnética tienen, en el vacío, una longitud de onda de $5 \cdot 10^{-7}$ m.
a) Determine la frecuencia y el número de onda. ¿Cuál es la energía de los fotones?
b) Si dicha onda entra en un determinado medio, su velocidad se reduce a 3c/4. Determine el índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda en el medio.

$$c = 3 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}\ ;\ h = 6{,}36 \cdot 10^{-34}\ J\ s$$

(98.R) Un rayo de luz amarilla, emitida por una lámpara de sodio, tiene una longitud de onda en el vacío de $580 \cdot 10^{-9}$ m.

a) Determine la velocidad de propagación y la longitud de onda de dicha luz en el interior de una fibra de cuarzo, cuyo índice de refracción es n = 1,5.
b) ¿Pueden existir valores del ángulo de incidencia para los que un haz de luz, que se propague por el interior de una fibra de cuarzo, no salga al exterior? Explique el fenómeno y, en su caso, calcule los valores del ángulo de incidencia para los cuales tiene lugar.

$c = 3\cdot10^{8}\ m\ s^{-1}$

(98-R) Un rayo de luz pasa del agua al aire con un ángulo de incidencia de 30º respecto a la normal.
a) Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y calcule el ángulo de refracción.
b) ¿Cuál debería ser el ángulo de incidencia para que el rayo refractado fuera paralelo a la superficie de separación agua-aire?

(Índice de refracción del agua respecto al aire: n = 1,3)

(98-R) El espectro visible tiene frecuencias comprendidas entre $4\cdot10^{14}$ Hz y $7\cdot10^{14}$ Hz.
a) Determine las longitudes de onda correspondientes a dichas frecuencias en el vacío.
b) ¿Se modifican estos valores de las frecuencias y de las longitudes de onda cuando la luz se propaga por el agua? En caso afirmativo, calcule los valores correspondientes.

(Índice de refracción del agua respecto al aire: n = 1,3; $C = 3\cdot10^{8}\ m\ s^{-1}$)

(99-E) Un objeto se encuentra frente a un espejo plano a una distancia de 4 m del mismo.
a) Construya gráficamente la imagen y explique sus características.
b) Repita el apartado anterior si se sustituye el espejo plano por uno cóncavo de 2 m de radio.

(99-R) a) Un objeto se encuentra a una distancia de 0,6 m de una lente delgada convergente de 0,2 m de distancia focal.
a) Construya gráficamente la imagen que se forma y explique sus características.
b) Repita el apartado anterior si el objeto se coloca a 0,1 de la lente.

(99-R) Cuando un rayo de luz se propaga a través del agua (n = 1,33) emerge hacia el aire para ciertos valores del ángulo de incidencia y para otros no.
a) Explique este fenómeno e indique para qué valores del ángulo de incidencia emerge el rayo.
b) ¿Cabría esperar un hecho similar si la luz pasa del aire al agua?

(00-R) Un diamante está sumergido en agua y un rayo de luz incide a 30º sobre una de sus caras.
a) Haga un esquema del camino que sigue el rayo luminoso y determine el ángulo con que se refracta dentro del diamante.
b) ¿Cuál es el ángulo límite para la luz que pasa del diamante al agua? ¿Y si pasa del agua la diamante?

n (diamante) = 2,41 ; n (agua) = 1,33

(00-R) Una lámina de caras paralelas, de vidrio de índice de refracción 1,54 y de espesor 10 cm, está colocada en el aire. Sobre una de sus caras incide un rayo de luz con un ángulo de incidencia de 30º.
a) Haga un esquema de la marcha del rayo y determine el tiempo que este tarda en atravesar la lámina.
b) ¿Con qué ángulo se refracta el rayo en la segunda cara? Compare este resultado con el ángulo de incidencia.

$c = 3 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$

(01-R) Un rayo de luz amarilla, emitido por una lámpara de vapor de sodio, posee una longitud de onda en el vacío de $5,9 \times 10^{-9}$ m.
a) Determine la frecuencia, velocidad de propagación y longitud de onda de la luz en el interior de una fibra óptica de índice de refracción 1,5.
b) ¿Cuál es el ángulo de incidencia mínimo para que un rayo que incide en la pared interna de la fibra no salga al exterior? ¿Cómo se denomina este ángulo?

$c = 3 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$

(01-R) Al iluminar la superficie de un cierto metal con un haz de luz ultravioleta de frecuencia $f = 2 \cdot 10^{15}$ Hz, la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos es de 2,5 eV.
a) Determine el trabajo de extracción del metal.
b) Explique qué ocurriría si la frecuencia de la luz incidente fuera: i) 2f; ii) f/2.

$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

(01-R) Construya la imagen de un objeto situado a una distancia entre f y 2f de una lente:
a) Convergente.
b) Divergente.
Explique en ambos casos las características de la imagen.

(01-R) Una onda electromagnética armónica de 20 MHz se propaga en el vacío, en el sentido positivo del eje OX. El campo eléctrico de dicha onda tiene la dirección del eje OZ y su amplitud es de $3 \cdot 10^{-3}$ N C^{-1}
a) Escriba la expresión del campo eléctrico **E**(x, t), sabiendo que en x = 0 su módulo es máximo cuando t = 0.
b) Represente en una gráfica los campos **E**(t) y **B**(t) y la dirección de propagación de la onda.

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}

(02-E) Un haz de luz roja penetra en una lámina de vidrio, de 30 cm de espesor, con un ángulo de incidencia de 45º.
a) Explique si cambia el color de la luz al penetrar en el vidrio y determine el ángulo de refracción.
b) Determine el ángulo de emergencia (ángulo del rayo que sale de la lámina con la normal). ¿Qué tiempo tarda la luz en atravesar la lámina de vidrio?

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $n_{vidrio} = 1,3$

(02-R) Un haz de luz monocromática de frecuencia $5 \cdot 10^{14}$ Hz se propaga por el aire.
a) Explique qué características de la luz cambian al penetrar en una lámina de vidrio y calcule la longitud de onda.
b) ¿Cuál debe ser el ángulo de incidencia en la lámina para que los rayos reflejado y refractado sean perpendiculares entre sí?

$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $n_{vidrio} = 1{,}2$

(02-R) Construya gráficamente la imagen y explique sus características para:
a) Un objeto que se encuentra a 0,5 m frente a una lente delgada biconvexa de 1 m de distancia focal;
b) Un objeto situado a una distancia menor que la focal de un espejo cóncavo.

(03-E) Un rayo de luz monocromática emerge desde el interior de un bloque de vidrio hacia el aire. Si el ángulo de incidencia es de 19,5º y el de refracción de 30º.
a) Determine el índice de refracción y la velocidad de propagación de la luz en el vidrio.
b) Como sabe, pueden existir ángulos de incidencia para los que no hay rayo refractado; es decir, no sale luz del vidrio. Explique este fenómeno y calcule los ángulos para los que tiene lugar.

$c = 3\ 10^{8}$ m s^{-1}; $n_{aire} = 1$

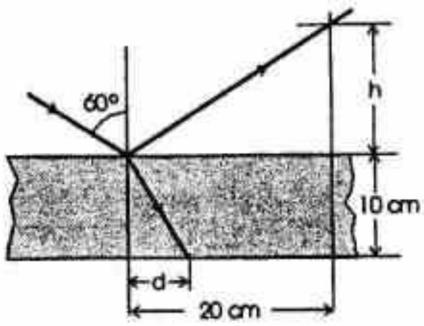
(03-R) Un rayo de luz, cuya longitud de onda en el vacío es $6 \cdot 10^{-7}$ m se propaga a través del agua.
a) Defina el índice de refracción y calcule la velocidad de propagación y la longitud de onda de esa luz en el agua.
b) Si el rayo emerge del agua al aire con un ángulo de 30º, determine el ángulo de incidencia del rayo en la superficie del agua.

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $n_{agua} = 1{,}33$

(03-R) Construya gráficamente la imagen de:
a) Un objeto situado a 0,5 m de distancia de un espejo cóncavo de 2 m de radio.
b) Un objeto situado a la misma distancia delante de un espejo plano.
Explique en cada caso las características de la imagen y compare ambas situaciones.

(04-E) Una lámina de vidrio, de índice de refracción 1,5, de caras paralelas y espesor 10 cm, está colocada en el aire. Sobre una de sus caras incide un rayo de luz, como se muestra en la figura. Calcule:
a) La altura **h** y la distancia **d** marcadas en la figura.
b) El tiempo que tarda la luz en atravesar la lámina.

$c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}



(05-E) Un rayo de luz que se propaga por un medio a una velocidad de 165 km s^{-1} penetra en otro medio en el que la velocidad de propagación es 230 km s^{-1}. a) Dibuje la trayectoria que sigue el rayo en el segundo medio y calcule el ángulo que forma con la normal si el ángulo de incidencia es de 30º. b) ¿En qué medio es mayor el índice de refracción? Justifique la respuesta.

(05-R) a) ¿Cuál es la longitud de onda de una estación de radio que emite con una frecuencia de 100 MHz?
b) Si las ondas emitidas se propagaran por el agua, razone si tendrían la misma frecuencia y la misma longitud de onda. En el caso de que varíe alguna de estas magnitudes, determine su valor.

$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; nagua/aire = 1,3

(05-R) Un haz de luz que viaja por el aire incide sobre un bloque de vidrio. Los haces reflejado y refractado forman ángulos de 30º y 20º, respectivamente, con la normal a la superficie del bloque. a) Calcule la velocidad de la luz en el vidrio y el índice de refracción de dicho material. b) Explique qué es el ángulo límite y determine su valor para al caso descrito.

$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}

(06-E Un rayo de luz monocromática incide en una de las caras de una lámina de vidrio, de caras planas y paralelas, con un ángulo de incidencia de 30º. La lámina está situada en el aire, su espesor es de 5 cm y su índice de refracción 1,5.

a) Dibuje el camino seguido por el rayo y calcule el ángulo que forma el rayo que emerge de la lámina con la normal.
b) Calcule la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.

(06-R) Un rayo luminoso que se propaga en el aire incide sobre el agua de un estanque formando un ángulo de 20º con la normal.
a) ¿Qué ángulo formarán entre sí los rayos reflejado y refractado?
b) Variando el ángulo de incidencia, ¿podría producirse el fenómeno de reflexión total? Razone la respuesta.

$n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1{,}33$

(06-R) El ángulo límite vidrio-agua es de 60º. Un rayo de luz, que se propaga por el vidrio, incide sobre la superficie de separación con un ángulo de 45º y se refracta dentro del agua.

a) Explique qué es el ángulo límite y determine el índice de refracción del vidrio.
b) Calcule el ángulo de refracción en el agua.

$n_a = 1{,}33$

(07-R) Un foco luminoso puntual está situado bajo la superficie de un estanque de agua. a) Un rayo de luz pasa del agua al aire con un ángulo de incidencia de 30º. Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y calcule el ángulo de refracción. b) Explique qué es el ángulo límite y determine su valor para este caso.

$n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1{,}33$

(07-E) El láser de un reproductor de CD genera luz con una longitud de onda de 780 nm medida en el aire.
a) Explique qué características de la luz cambian al penetrar en el plástico del CD y calcule la velocidad de la luz en él.
b) Si la luz láser incide en el plástico con un ángulo de 30º, determine el ángulo de refracción.

$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; $n_{aire} = 1$; $n_{plástico} = 1{,}55$

(07-E) Un haz de luz de $5\cdot10^{14}$ Hz viaja por el interior de un diamante.
a) Determine la velocidad de propagación y la longitud de onda de esa luz en el diamante.
b) Si la luz emerge del diamante al aire con un ángulo de refracción de 10º, dibuje la trayectoria del haz y determine el ángulo de incidencia.

$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1} ; n (diamante) = 2,42

(08-R) Un teléfono móvil opera con ondas electromagnéticas de frecuencia $f = 9\cdot10^8$ Hz.
a) Determine la longitud de onda y el número de onda en el aire.
b) Si la onda entra en un medio en el que su velocidad de propagación se reduce a 3c/4, razone qué valores tienen la frecuencia y la longitud de onda en ese medio y el índice de refracción del medio.

$c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} ; $n_{aire} = 1$

(08-R) Un haz de luz láser cuya longitud de onda en el aire es $550 \cdot 10^{-9}$ m incide en un bloque de vidrio.
a) Describa con ayuda de un esquema los fenómenos ópticos que se producen.
b) Si el ángulo de incidencia es de 40º y el de refracción 25º, calcule el índice de refracción del vidrio y la longitud de onda de la luz láser en el interior del bloque.

$n_{aire} = 1$

(08-R) Sobre la superficie de un bloque de vidrio de índice de refracción 1,60 hay una capa de agua de índice 1,33. Una luz amarilla de sodio, cuya longitud de onda en el aire es $589 \cdot 10^{-9}$ m, se propaga por el vidrio hacia el agua.
a) Describa el fenómeno de reflexión total y determine el valor del ángulo límite para esos dos medios.
b) Calcule la longitud de onda de la luz cuando se propaga por el vidrio y por el agua.

$c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}

(09-R) Un haz de luz roja penetra en una lámina de vidrio de 30 cm de espesor con un ángulo de incidencia de 30 º.
a) Explique si cambia el color de la luz al penetrar en el vidrio y determine el ángulo de refracción.
b) Determine el ángulo de emergencia (ángulo que forma el rayo que sale de la lámina con la normal) y el tiempo que tarda la luz en atravesar la lámina de vidrio.

$c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} ; $n_{vidrio} = 1,3$; $n_{aire} = 1$

(09-R) Un rayo láser de $55 \cdot 10^{-8}$ m emerge desde el interior de un bloque de vidrio hacia el aire. El ángulo de incidencia es de 25º y el de refracción de 40º.
a) Calcule el índice de refracción del vidrio y la longitud de onda del rayo láser en el aire.
b) Explique para qué valores del ángulo de incidencia el rayo no sale del vidrio.

$n_{aire} = 1$

(09-E) Una antena emite una onda de radio de $6 \cdot 10^7$ Hz.
a) Explique las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda y determine la frecuencia de esta última.
b) La onda de radio penetra en un medio y su velocidad se reduce a 0,75c. Determine su frecuencia y su longitud de onda en ese medio.

$c = 3 \cdot 10^8$ ms^{-1}; $v_{sonido} = 340$ ms^{-1}

(10-E) Una antena emite una onda de radio de $6 \cdot 10^7$ Hz.
a) Explique las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda y determine la frecuencia de esta última.
b) La onda de radio penetra en un medio material y su velocidad se reduce a 0,75 c. Determine su frecuencia y su longitud de onda en ese medio.

$c = 3 \cdot 108$ m s^{-1}; $v_{(sonido\ en\ el\ aire)} = 340$ m s^{-1}

(10-R) Un haz láser que se propaga por un bloque de vidrio tiene una longitud de onda de 550 nm. El haz emerge hacia el aire con un ángulo de incidencia de 25º y un ángulo de refracción de 40º.
a) Calcule el índice de refracción del vidrio y la longitud de onda de la luz láser en el aire.
b) Razone para qué valores del ángulo de incidencia el haz láser no sale del vidrio.

$c = 3 \cdot 108$ m s^{-1}; $n_{aire} = 1$

(10-R) Un teléfono móvil opera con ondas electromagnéticas cuya frecuencia es $1,2 \cdot 10^9$ Hz.
a) Determine la longitud de onda.
b) Esas ondas entran en un medio en el que la velocidad de propagación se reduce a 5c/6. Determine el índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda en dicho medio.

$c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} ; $n_{aire} = 1$; $v_{sonido} = 340$ m s^{-1}