JUNIO 96

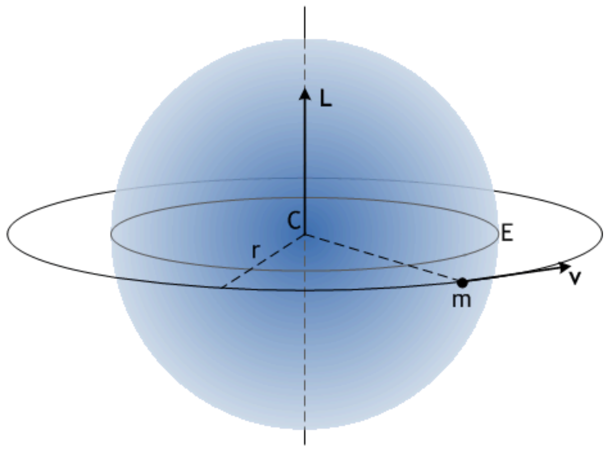
A1.– Un satélite de 2000 kg de masa describe una órbita ecuatorial circular alrededor de la Tierra de 8000 km de radio. Determinar:

a) **Su momento angular respecto al centro de la órbita.**
b) **Sus energías cinética, potencial y total.**

Datos: **Constante de Gravitación, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};** **Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg**

a) Un ejercicio de aplicación de ideas básicas acerca de órbitas circulares. El momento angular del satélite es perpendicular al plano de su órbita, es **constante** (no varía ni su dirección ni su módulo, y sería igualmente constante en una órbita de cualquier tipo, además de las circulares) porque las gravitatorias son **fuerzas centrales**. Su módulo es

$$L = mvr$$



donde m = 2000 kg es la masa del satélite, $r = 8.10^6$ m es el radio de su órbita, y la velocidad del satélite en órbita está perfectamente determinada por su radio, según

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

expresión que podemos usar directamente, ya que los datos nos proporcionan los valores de G y de la masa M de la Tierra. Llevando (2) a (1), y operando,

$$L = mr\sqrt{\frac{GM}{r}} = m\sqrt{GMr} = 2000\sqrt{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}.8.10^{6}} = \mathbf{1{,}13.10^{14}\ kg\ m^2\ s^{-1}}$$

b) Las expresiones de las energías cinética, potencial y total del satélite tienen relaciones que facilitan los cálculos. Por ejemplo, la energía cinética es positiva

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{2r} = 6{,}67.10^{-11}\,\frac{5{,}98.10^{24}.2000}{2.8.10^{6}} = \mathbf{4{,}99.10^{10}\ J}$$

y su valor es, en términos absolutos, la mitad de la energía potencial negativa (esto es así para objetos en órbita circular, no para objetos moviéndose en otras condiciones, por ejemplo, verticalmente o describiendo órbitas elípticas). Así que la energía potencial de nuestro satélite es

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = -2E_c = \mathbf{-9{,}97.10^{10}\ J}$$

La energía total es la suma de las dos anteriores y eso, obviamente, dejará una cantidad igual a la cinética, aunque negativa (de nuevo, esto es así en órbitas circulares):

$$E = E_c + E_p = E_c = \mathbf{-4{,}99.10^{10} J}$$

SEPTIEMBRE 96

A1.– El vehículo espacial Apolo VIII estuvo en órbita circular alrededor de la Luna, 113 km por encima de su superficie. Calcular:

a) **El periodo del movimiento.**
b) **Las velocidades lineal y angular del vehículo.**
c) **La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.**

Datos: **Constante de Gravitación, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};** **Masa de la Luna, $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg;**
Radio medio lunar, $R_L = 1740$ km

a) El radio de la órbita del Apolo VIII sobre la Luna sería r = 1740 + 113 = 1853 km

El periodo de un objeto en órbita circular sobre la Luna está completamente determinado por la masa de la Luna y el radio de la órbita. En efecto, la tercera ley de Kepler para órbitas circulares se escribe

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_L}r^3$$

así que resulta inmediato calcular $$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_L}} = 2\pi\sqrt{\frac{(1853.10^3)^3}{6{,}67.10^{-11}.7{,}36.10^{22}}} = \mathbf{7153{,}05\ s = 1{,}99\ h}$$

b) La velocidad angular, a partir del periodo, en un giro uniforme como este

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ rad}{7153{,}05\ s} = \mathbf{8{,}78.10^{-4}\ rad/s}$$

y la velocidad lineal, a partir de ω, $v = \omega\, r = 8{,}78.10^{-4}\ .\ 1853.10^{3} = \mathbf{1627{,}66\ m/s = 1{,}63\ km/s}$

c) La velocidad de escape a la atracción lunar se obtiene discutiendo el valor de la energía mecánica, suma de energía cinética y energía potencial, del satélite. Hay que recordar que, para poder alejarse indefinidamente de la Luna, el Apolo VIII necesitaría una energía total igual, como mínimo, a 0 J. De hecho, con la velocidad de 1,63 km/s calculada en el apartado anterior, la energía total del Apolo VIII es negativa, como es fácil de comprobar y tal como debe ser, ya que se trata de un objeto **ligado** a la Luna.

Sin embargo, con más velocidad, podría escapar. Para ello, su energía debería ser, como hemos dicho, mayor o igual que 0 J. Por tanto, llamando v_e a la velocidad de escape desde esa órbita, las cuentas serían

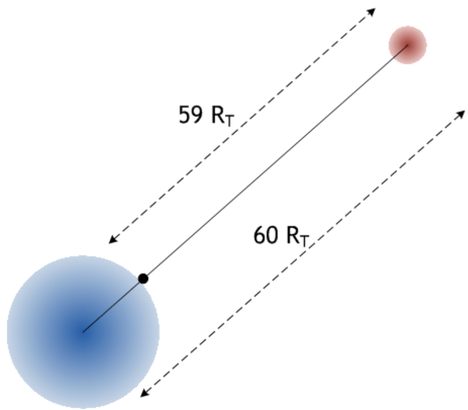
$$E = E_C + E_p = \frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{M_L m}{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{r}} = \sqrt{\frac{2.6{,}67.10^{-11}.7{,}36.10^{22}}{1853.10^{3}}} = \mathbf{2301{,}86\ m/s = 2{,}30\ km/s}$$

como mínimo.

JUNIO 97

C1.– a) Compara las fuerzas de atracción gravitatoria que ejercen la Luna y la Tierra sobre un cuerpo de masa m que se halla situado en la superficie de la Tierra. ¿A qué conclusión llegas?
b) Si el peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra es de 100 kp, ¿cuál sería el peso de ese mismo cuerpo en la superficie de la Luna?

Datos: **La masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna.**
La distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es de 60 radios terrestres.
El radio de la Luna es 0,27 veces el radio de la Tierra.



a) La conclusión parece obvia incluso antes de empezar: para un cuerpo situado en la superficie de la Tierra la atracción gravitatoria lunar es despreciable frente a la terrestre. En la figura aparece la situación tal como la describe el enunciado, con el cuerpo de masa m sobre la superficie terrestre, a una distancia R_T del centro de la Tierra y a una distancia 59 R_T del centro de la Luna.

Como sabemos, la Tierra y la Luna se comportan como masas puntuales para un objeto como m; de este modo, las fuerzas de atracción gravitatoria que nos piden son:

Fuerza gravitatoria terrestre $$F_T = G\,\frac{M_T\, m}{R_T^2} \qquad (1)$$

que sería lo que generalmente llamamos **peso** del cuerpo m, y su valor acabaría siendo 9,8 m, ya que el valor de g terrestre en la superficie es el conocido 9,8 N/kg.

Fuerza gravitatoria lunar $$F_L = G\,\frac{M_L\, m}{(59 R_T)^2} \qquad (2)$$

así que podemos hacer la comparación que nos piden simplemente dividiendo ambas fuerzas, (1) partido por (2):

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{G\,\dfrac{M_T\, m}{R_T^2}}{G\,\dfrac{M_L\, m}{(59R_T)^2}} = \frac{\dfrac{M_T}{R_T^2}}{\dfrac{M_L}{(59R_T)^2}} = \frac{\dfrac{81 M_L}{R_T^2}}{\dfrac{M_L}{(59R_T)^2}} = 81.59^2 = \mathbf{281961}$$

para comprobar que la fuerza gravitatoria terrestre es casi trescientas mil veces mayor que la lunar: ésta última es completamente despreciable.

b) Ahora debemos suponer al cuerpo, cuyo peso en la Tierra es 100 kp, **sobre la superficie lunar**. En este sitio, la fuerza gravitatoria dominante es la atracción lunar, que se escribiría

$$F_L = G\,\frac{M_L\, m}{R_L^2} \qquad (3)$$

de manera que podemos comparar ahora el peso del cuerpo cuando se halla en la superficie terrestre, dado por (1) y de valor 100 kp, con el peso cuando se encuentra en la superficie lunar, dado por (3):

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{100\ \text{kp}}{F_L} = \frac{G\,\dfrac{M_T\, m}{R_T^2}}{G\,\dfrac{M_L\, m}{R_L^2}} = \frac{\dfrac{M_T}{R_T^2}}{\dfrac{M_L}{R_L^2}} = \frac{\dfrac{81 M_L}{R_T^2}}{\dfrac{M_L}{(0{,}27\, R_T)^2}} = 81.0{,}27^2 = 5{,}90 \qquad \Rightarrow \qquad F_L = \frac{100}{5{,}90} = \mathbf{16{,}94\ kp}$$

donde, como puede verse, se concluye que los cuerpos pesan en la Luna unas seis veces menos que en la Tierra.

JUNIO 97

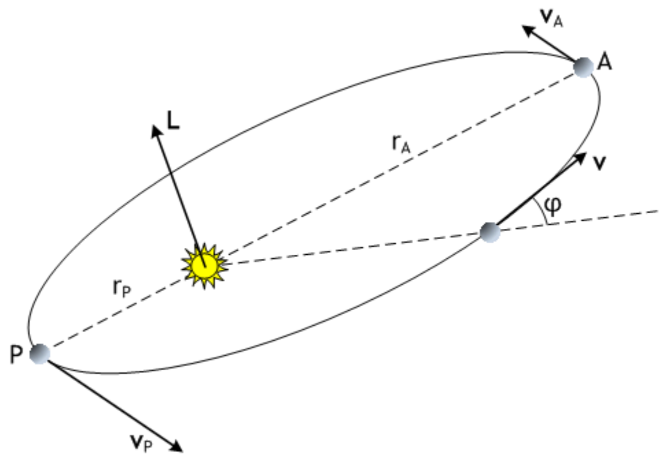
A1.– Se considera el movimiento elíptico de la Tierra en torno al Sol. Cuando la Tierra está en el afelio (la posición más alejada del Sol) su distancia al Sol es de $1{,}52.10^{11}$ m y su velocidad orbital es de $2{,}92.10^4$ m/s. Hallar:

a) **El momento angular de la Tierra respecto al Sol.**
b) **La velocidad orbital de la Tierra en el perihelio (la posición más cercana al Sol) siendo en este punto su distancia al Sol de $1{,}47.10^{11}$ m.**

Datos complementarios: Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \,.\, 10^{24}$ kg

a) La figura recoge la trayectoria de la Tierra en torno al Sol, y muestra el perihelio P y el afelio A de la misma. El momento angular de la Tierra se escribe

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = \mathbf{r} \wedge M_T\mathbf{v}$$



y resulta, como sabemos, un vector perpendicular al plano de la órbita terrestre. Su módulo puede escribirse de forma muy sencilla **en el afelio** y **en el perihelio**, resultando ser

$$L = M_T\, r_A\, v_A = M_T\, r_P\, v_P \qquad (1)$$

donde r_A y r_P son, como muestra la figura, las distancias de la Tierra al Sol en perihelio y afelio, respectivamente; v_A y v_P son las velocidades de la Tierra en esas posiciones. Las expresiones de (1) no se pueden generalizar a posiciones cualesquiera de la órbita, debido a que los vectores posición y velocidad de la Tierra **sólo son perpendiculares en afelio y perihelio**; en otras posiciones, el módulo del momento angular debería escribirse

$$L = M_T\, R\, v \operatorname{sen} \varphi \qquad (2)$$

donde φ sería el ángulo entre los vectores posición **r** y velocidad **v**. Ese ángulo, en el afelio y en perihelio, es de 90º, así que su seno es 1 y no aparece en las expresiones (1). Por supuesto, tal como sabemos, el momento angular de la Tierra es constante, y el resultado de (1) o (2) será el mismo.

Con los datos, parece obvio que calcularemos el momento angular cuando la Tierra está en el afelio:

$$L = 5{,}98.10^{24} \,.\, 1{,}52.10^{11} \,.\, 2{,}92.10^4 = \mathbf{2{,}65.10^{40}\ kg\ m^2\ s^{-1}}$$

b) Ahora podemos emplear las igualdades (1) para deducir la velocidad v_a de la Tierra en el perihelio. Será

$$M_T\, r_A\, v_A = M_T\, r_P\, v_P \Rightarrow \qquad r_A\, v_A = r_P\, v_P \qquad \Rightarrow \qquad v_A = \frac{v_P\, r_P}{r_A} = \frac{2{,}92.10^4 .1{,}52.10^{11}}{1{,}47.10^{11}} = \mathbf{3{,}02.10^4\ m/s}$$

SEPTIEMBRE 97

C1.– a) ¿Cómo se define la gravedad en un punto de la superficie terrestre? ¿Dónde será mayor la gravedad, en los Polos o en un punto del Ecuador?
b) ¿Cómo varía la gravedad con la altura? ¿Qué relación existe entre la gravedad a una altura h y la gravedad en la superficie terrestre?

Razona las respuestas.

a) La gravedad en un punto de la superficie terrestre, como en cualquier otro punto, se define como la **fuerza que aplica el campo gravitatorio terrestre sobre una masa de 1 kg colocada en ese punto**. Como consecuencia de la identidad entre los valores de masa inercial y masa gravitatoria, la gravedad en un punto puede definirse también como **la aceleración con que se moverá una masa cualquiera m, colocada en ese punto, bajo la acción de la fuerza gravitatoria.**

En términos cuantitativos, y para puntos exteriores a la Tierra, incluyendo su superficie, la gravedad toma un valor dado por

$$g = G\frac{M}{r^2} \qquad (1)$$

donde M es la masa de la Tierra y r la distancia del punto en cuestión al centro de la Tierra. En rigor, esa expresión es cierta suponiendo que la Tierra es esférica, cosa que realmente no sucede (en eso se basa la diferencia entre Polos y Ecuador); a pesar de ello la empleamos de forma sistemática.

Así, como la Tierra está algo achatada en los Polos, la distancia r_P al centro del planeta en los Polos es algo menor que r_E, la distancia al centro de la Tierra en el Ecuador. Se sigue de (1), entonces que la gravedad en los Polos es algo mayor que en el Ecuador

$$r_P < r_E \quad \Rightarrow \quad G\frac{M}{r_P^2} > G\frac{M}{r_E^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g_P > g_E}$$

b) Parecería que el enunciado se refiere a la altura sobre la superficie terrestre. La expresión (1) muestra g en función de la distancia r al centro de la Tierra. Para escribirla en función de la altura h sobre la superficie de la Tierra debemos escribir r como

$$r = R + h$$

la suma del radio terrestre R más la altura h sobre la superficie. De este modo, g quedaría

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

una expresión de escasa utilidad, ya que el factor relevante es la distancia al centro de la Tierra, y no a su superficie. Sin duda, claro, la gravedad **disminuye con la altura, pero lo hace de forma cuadráticamente inversa a la distancia al centro de la Tierra.**

Por último, consideremos la gravedad en la superficie terrestre, cuando la distancia al centro de la Tierra es r = R, el radio terrestre. La expresión (1) queda entonces

$$g_{Superficie} = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8\ m/s^2$$

el conocido valor de la gravedad en la superficie terrestre (el mayor de los posibles valores de (1), como sabemos). La relación entre la gravedad a una altura h sobre la superficie y la gravedad en la superficie no es más que el cociente entre (3) y (4):

$$\frac{g}{g_{Superficie}} = \frac{G\frac{M}{(R+h)^2}}{G\frac{M}{R^2}} = \mathbf{\frac{R^2}{(R+h)^2}}$$

En la aproximación de Tierra plana, cuando **h <<< R**, de forma que R + h ≈ R, el cociente a la derecha en esta relación se convierte en 1, de manera que $g = g_{Superficie} = 9{,}8\ m/s^2$ y podemos tomar g como constante.

JUNIO 98

A1.– La nave espacial Lunar Prospector permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determine:

a) La velocidad lineal de la nave y el período de su movimiento.
b) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación, $G = 6{,}67.10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$; Masa de la Luna, $M_L = 7{,}36.10^{22}$ kg; Radio medio lunar, R_L = 1740 km

a) La velocidad lineal de un objeto en órbita de radio r alrededor de la Luna, de masa M_L, se escribe

$$v = \sqrt{G\frac{M_L}{r}}$$

donde el radio r de la órbita es $r = R_L + h = 1740 + 100 = 1840$ km

así que la velocidad lineal queda $v = \sqrt{6{,}67.10^{-11}.\frac{7{,}36.10^{22}}{1840.10^3}} = \mathbf{1633{,}4\ m/s = 1{,}63\ km/s}$

y el periodo, sabiendo v $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi.1840.10^3\ m}{1633{,}4\ m/s} = \mathbf{7077{,}91\ s = 1{,}97\ h}$

b) La velocidad de escape desde la órbita está ligada a la energía mecánica del satélite, que debe ser como mínimo igual a 0 J: en la órbita que hemos descrito, la energía mecánica de la Prospector es negativa. Si se suministrase a la nave la energía necesaria para llegar a 0 J, podría escaparse de la atracción lunar. Su velocidad entonces sería v_e, tal que

$$E = E_C + E_p = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M_L m}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{r}} = \sqrt{\frac{2.6{,}67.10^{-11}.7{,}36.10^{22}}{1840.10^3}} = \mathbf{2309{,}98\ m/s = 2{,}31\ km/s}$$

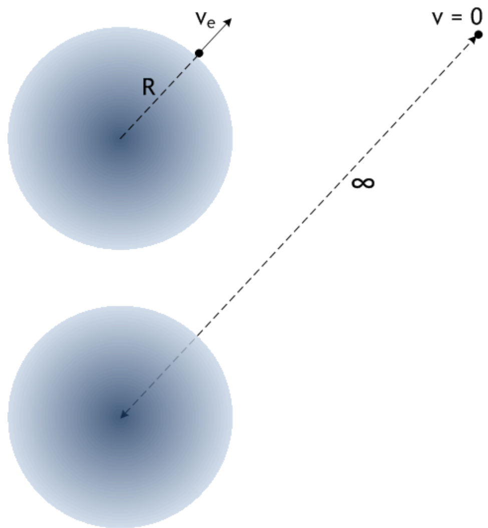
SEPTIEMBRE 98

C1.– a) ¿Cuál es la velocidad de escape de un objeto situado en la superficie de la Tierra?

b) Cómo influye la dirección con que se lanza un objeto desde la superficie de la Tierra en su velocidad de escape?

a) El propósito de este ejercicio parece ser la discusión detallada del concepto velocidad de escape desde la superficie: en principio, se define como tal la **velocidad mínima que ha de imprimirse a un objeto lanzado desde la superficie de la Tierra para que no retorne a ella.** Nótese que, en ausencia de otros campos gravitatorios, eso implica una de dos cosas:

1) Que el objeto se aleje de la Tierra hasta una distancia infinita, donde se agotaría su velocidad (evidentemente, con más razón si al llegar a distancia infinita aún tiene alguna velocidad, pero hablamos de condiciones mínimas).
2) Que el objeto quede atrapado en una órbita alrededor de la Tierra, de modo que no retorna a la superficie de la misma.



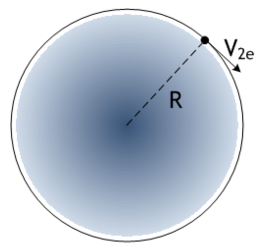
Parece claro que, si el objeto es lanzado desde la superficie de la Tierra **perpendicularmente a ella, en dirección vertical**, sólo puede hablarse de escape si se cumple la primera condición: si el objeto se detiene a una distancia finita de la Tierra, la atracción gravitatoria le hará caer de nuevo sobre la superficie. Como sabemos, la conservación de energía mecánica exige que su valor sea el mismo en el momento de la salida, a una distancia R del centro de la Tierra y con la velocidad v_e, y cuando se detiene ($v = 0$) a una distancia $r \to \infty$. Esto requiere que

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

donde el segundo miembro es cero porque, a distancia infinita, la energía potencial es cero y, además, suponemos que el objeto llega allí con velocidad cero, de modo que tampoco tiene energía cinética. Despejando v_e, nos queda

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} \qquad (1)$$

la conocida expresión que se conoce como **primera velocidad de escape**, y a menudo simplemente como velocidad de escape. Nótese que la condición (mínima) de escape es, en realidad, disponer de energía mecánica igual a 0 J (como mínimo) o mayor. En este sentido, pueden hacerse los mismos cálculos para hallar la velocidad de escape a la atracción terrestre desde cualquier posición (por ejemplo, desde una órbita de radio r), y el resultado sería exactamente igual, sustituyendo R por r. (Véase más adelante, **MODELO 08 B1**, para más detalles al respecto).



b) La segunda posibilidad que tenemos, como ya hemos dicho, es colocar el objeto en órbita. De todas las posibles, la más “baja” sería la órbita “pegada” a la superficie de la Tierra, con radio orbital r = R. La velocidad orbital que le correspondería sería

$$v_{2e} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad (2)$$

así que esa sería la que a menudo se conoce como **segunda velocidad de escape**, y se correspondería con el supuesto de que el objeto sea lanzado desde la superficie de la Tierra, en dirección tangente a la misma, de forma que describiría una órbita justamente sobre la superficie.

Entre estos dos resultados, (1) cuando el lanzamiento es vertical, (2) cuando es tangencial, podemos imaginar direcciones de lanzamiento con inclinaciones variables: las velocidades necesarias estarán comprendidas entre los valores (1) — el máximo — y (2), el mínimo.

Así, el concepto de velocidad de escape desde la superficie terrestre está ligado a la dirección en que se lance el objeto. En general, sin embargo, las preguntas acerca de velocidad de escape se refieren a la primera de las opciones discutidas, y (1) es casi siempre nombrada como velocidad de escape.

SEPTIEMBRE 98

B1.– Si se considera que la Tierra tiene forma esférica, con un radio aproximado de 6400 km, determine:

a) La relación existente entre las intensidades del campo gravitatorio sobre la superficie terrestre y a una altura de 144 km por encima de la misma.

b) La variación de energía cinética de un cuerpo de 100 kg de masa al caer libremente desde la altura de 144 km hasta 72 km por encima de la superficie terrestre.

Datos: Constante de Gravitación, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

a) La intensidad del campo gravitatorio terrestre, para puntos en el exterior de la Tierra (incluyendo la superficie), se escribe

$$g = G\frac{M}{r^2} \qquad (1)$$

donde r es la distancia al centro de la Tierra. Aplicando (1) podemos obtener la intensidad de campo en la superficie, donde r = R = 6400 Km, y en un punto P a 144 km por encima de la superficie, donde r = R + 144 = 6544 km. Nos quedaría

en la superficie, $g_{Sup} = G\frac{M}{R^2}$; a 144 km de la superficie, $g = G\frac{M}{(R+h)^2}$

de forma que la relación pedida es

$$\frac{g_{Sup}}{g} = \frac{G\frac{M}{R^2}}{G\frac{M}{(R+h)^2}} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = \frac{6544^2}{6400^2} = \mathbf{1{,}05}$$

y muestra, como vemos, que la gravedad en la superficie es apenas un 5% mayor que a 144 km de altura. Sin embargo, un 5% de error puede ser excesivo en muchos cálculos: estaríamos, en la medida en que así sea, más allá de lo que suele llamarse aproximación de Tierra plana, en la que se toma g = 9,8 m/s^2 como constante, independientemente de la altura.

b) La respuesta a esta pregunta es, sin duda, una aplicación de la conservación de energía mecánica bajo fuerzas gravitatorias (conservativas, por tanto). La cuestión tiene acaso la dificultad de decidir qué energía potencial gravitatoria usamos, de entre las dos alternativas:

$E_p = -G\frac{Mm}{r}$ que es la energía potencial correcta, depende de la distancia al centro de la Tierra

$E_p = mgh$ que es la energía potencial en la aproximación de Tierra plana. Sólo podemos usarla cuando la altura h sobre la superficie es mucho menor que R, el radio de la Tierra.

Se diría que distancias como 144 km o 72 km son bastante pequeñas frente a 6400 km, y que esta última energía potencial sería adecuada, y más fácil de emplear; por otro lado, el apartado anterior ha mostrado una variación de 5% en el valor de g entre la superficie y la altura de 144 km. Así que, ¿cómo decidirse?

Usaremos este problema, entonces, para mostrar los resultados en ambos casos y poder compararlos. Empezamos con la energía potencial correcta, llamando v_i a la velocidad inicial, cuando el cuerpo de 100 kg está a 144 km de altura, y v_f a la velocidad final, cuando está a 72 km de altura:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{R+h_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{Mm}{R+h_f} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}100\,v_i^2 - G\frac{M100}{(6400+144).10^3} = \frac{1}{2}100\,v_f^2 - G\frac{M100}{(6400+72).10^3}$$

de donde se sigue que la variación de energía cinética (energía cinética final menos energía cinética inicial) es

$$\Delta E_c = E_c^f - E_c^i = G\,M100\left(\frac{1}{6472.10^3} - \frac{1}{6544.10^3}\right) = 6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}.100\left(\frac{72}{6472.6544.10^3}\right) = \mathbf{6{,}78.10^7\ J}$$

Y ahora repetimos el cálculo con la energía potencial en la aproximación de Tierra plana. Esta vez sería

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}100\,v_i^2 + 100.9{,}8.h_i = \frac{1}{2}100\,v_f^2 + 100.9{,}8.h_f$$

y así la variación de energía cinética queda ahora

$$\Delta E_c = E_c^f - E_c^i = mgh_i - mgh_f = mg(h_i - h_f) = 100.9{,}8.72.10^3 = \mathbf{7{,}06.10^7\ J}$$

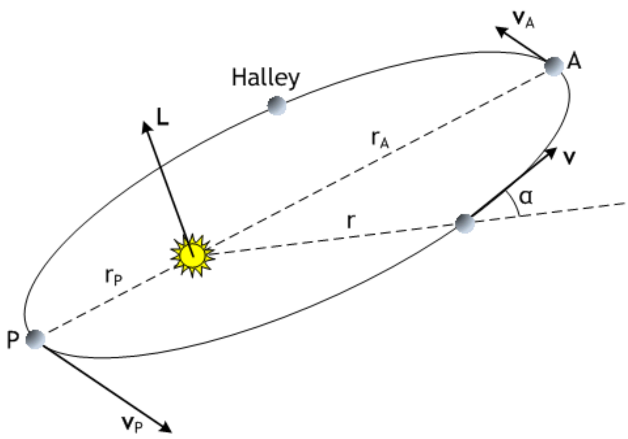
que es un valor notablemente diferente del anterior, concretamente alrededor de un 4%. Se sigue que el resultado correcto para la variación de energía cinética es **6,78.10^7 J**, y que alturas del orden de 100 km sobre la superficie de la Tierra son ya lo suficientemente grandes como para no usar la aproximación de Tierra plana.

JUNIO 99

C1.– El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima) el cometa está a 8,75.107 km del Sol y en el afelio (posición más alejada) está a 5,26.109 km del Sol.

a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?

b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor energía mecánica?



a) El momento angular de un satélite en una órbita elíptica es, como sabemos, **constante**. Se trata de un vector dirigido perpendicularmente al plano de la órbita, tal como refleja la figura.

Podemos hallar el **módulo** del momento angular en cualquier posición de la órbita, de acuerdo a

$$L = m\, v\, r \operatorname{sen} \alpha \qquad (1)$$

donde α es el ángulo entre los vectores posición (desde el Sol) y velocidad de Halley. Hay dos posiciones en las que ese ángulo es de 90º: el **afelio** y el **perihelio**, tal como puede verse en la figura. En ellas, la expresión (1) se simplifica y queda como

$$L = m\, v_A\, r_A = m\, v_P\, r_P$$

por supuesto, v_A y v_P son las velocidades de Halley en el afelio y perihelio, r_A y r_P las respectivas distancias al Sol. Se sigue de aquí la igualdad

$$v_A\, r_A = v_P\, r_P \qquad \frac{v_A}{v_P} = \frac{r_P}{r_A} \qquad (2)$$

y, ya que Halley está más cerca del Sol en el perihelio, su velocidad ahí debe ser **mayor** que en el afelio. Esto, como sabemos, no es sino un modo de enunciar la ley de las áreas de Kepler.

En cuanto a la aceleración, también los puntos singulares afelio y perihelio tienen una particularidad interesante respecto a otros puntos de la órbita: en ellos, **la aceleración de Halley es exclusivamente centrípeta**, ya que forma ángulo de 90º con la velocidad. En otras posiciones de Halley la aceleración tiene componentes tangencial y centrípeta.

Así que podemos escribir las aceleraciones en el afelio y en el perihelio según

$$a_A = \frac{v_A^2}{r_A}\,; \qquad a_p = \frac{v_p^2}{r_p}$$

cosa que no podríamos hacer en otros puntos de la órbita. La relación entre las aceleraciones resulta ser, usando (2)

$$\frac{a_A}{a_P} = \frac{\dfrac{v_A^2}{r_A}}{\dfrac{v_P^2}{r_P}} = \frac{v_A^2\, r_P}{v_P^2\, r_A} = \frac{r_P^3}{r_A^3}$$

así que, como $r_P < r_A$, se sigue que la aceleración en el afelio es menor que en el perihelio, $\mathbf{a_A < a_P}$.

b) La energía potencial, bajo la fuerza gravitatoria solar, está dada por la expresión

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

donde M es la masa del Sol, m la masa de Halley y r la distancia entre ambos. Ya que se trata de cantidades negativas, su valor resulta más alto (menos negativo) cuanto mayor sea r. En consecuencia, la energía potencial tiene **su valor máximo en el afelio,** cuando más lejos está Halley del Sol, y presenta **su valor mínimo en el perihelio**, cuando se encuentra más próximo al Sol.

La energía mecánica, como sabemos, es **constante** como consecuencia del carácter conservativo de la fuerza gravitatoria solar. **Tiene el mismo valor en todos los puntos de la órbita**.

JUNIO 99

A1.– Se coloca un satélite meteorológico de 1000 kg en órbita circular, a 300 km sobre la superficie terrestre. Determine:

a) **La velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo en la órbita.**
b) **El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.**

Datos: Gravedad en la superficie terrestre, $g = 9,8\ m\ s^{-2}$; Radio medio terrestre, $R_T = 6370$ km

a) El radio de la órbita circular en torno a la Tierra es $r = R + h = 6370 + 300 = 6670$ km

y la velocidad lineal en una órbita de radio R está dada por $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$ (1)

donde el producto GM se puede obtener recordando que la gravedad en la superficie terrestre es

$$g_{Sup} = G\frac{M}{R^2} = 9,8\ m/s^2 \quad \Rightarrow \quad GM = 9,8\ R^2$$

así que, entrando en (1), nos queda $v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{\frac{9,8R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9,8.(6370.10^3)^2}{6670.10^3}} = \mathbf{7721,3\ m/s = 7,72\ km/s}$

La aceleración radial (la única, por otro lado) en la órbita circular es, al tiempo, la aceleración de la gravedad en la órbita, de modo que se puede escribir de diversas maneras equivalente

$$a_c = \frac{v^2}{r} = g = G\frac{M}{r^2}$$

Empleando la última expresión, $a_c = g = G\frac{M}{r^2} = \frac{9,8R^2}{r^2} = \frac{9,8.(6370.10^3)^2}{(6670.10^3)^2} = \mathbf{8,94\ m/s^2}$

Y, finalmente, el periodo, que se puede poner también en función del radio de la órbita, en lo que no es sino un uso de la tercera ley de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{9,8R^2}r^3} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{9,8}} = \frac{2\pi}{6370.10^3}\sqrt{\frac{(6670.10^3)^3}{9,8}} = \mathbf{5427,7\ s = 1\,h\ 30\ min\ 28\ s}$$

b) El trabajo para poner en órbita el satélite se obtiene de la diferencia entre la energía mecánica que tiene cuando está en la órbita circular y la que tenía cuando se encontraba en la superficie de la Tierra, en reposo. Empezamos calculando la energía mecánica en la órbita, con la expresión bien conocida

$$E_{órbita} = -E_c = \frac{1}{2}E_p = -G\frac{Mm}{2r} = -9,8R^2\frac{1000}{2r} = -9,8.(6370.10^3)^2\frac{1000}{2.6670.10^3} = -2,98.10^{10}\ J$$

Y ahora hallamos la energía cuando el satélite está en reposo sobre la superficie de la Tierra. Como no tiene energía cinética, sólo hemos de calcular la energía potencial:

$$E_{superficie} = E_p = -G\frac{Mm}{R} = -9,8R^2\frac{1000}{R} = -9,8.R.1000 = -9,8.6370.10^3.10^3 = -6,24.10^{10}\ J$$

así que el trabajo necesario para poner en órbita el satélite resulta

$$W = \Delta E = E_{órbita} - E_{superficie} = -2,98.10^{10} - (-6,24.10^{10}) = \mathbf{3,26.10^{10}\ J}$$

SEPTIEMBRE 99

A1.– Las distancias de la Tierra y de Marte al Sol son respectivamente $149,6.10^6$ km y $228,0.10^6$ km. Suponiendo que las órbitas son circulares y que el periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 365 días:

a) **¿Cuál será el periodo de revolución de Marte?**
b) **Si la masa de la Tierra es 9,6 veces la de Marte y sus radios respectivos son 6370 km y 3390 km, ¿cuál será el peso en Marte de una persona de 70 kg?**

Datos: Gravedad en la superficie terrestre $g = 9,8\ m\ s^{-2}$

a) Una aplicación inmediata de la tercera ley de Kepler, según la cual los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas (en el supuesto de órbitas circulares). De este modo,

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_M^2}{r_M^3} \quad \Rightarrow \quad T_M = T_T\sqrt{\frac{r_M^3}{r_T^3}} = 365\sqrt{\frac{228,0^3}{149,6^3}} = \mathbf{686,75\ días}$$

b) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta se escribe $g = G\frac{M}{R^2}$, donde M es la masa del planeta y R su radio. Podemos aplicar esto a las intensidades de campo gravitatorio en las superficies de Tierra y de Marte

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = 9,8\ m/s^2\ ; \qquad\qquad g_M = G\,\frac{M_M}{R_M^2}$$

y obtener la gravedad marciana dividiendo ambas expresiones

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{g_M}{9,8} = \frac{G\,\frac{M_M}{R_M^2}}{G\,\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{\frac{M_M}{(3390.10^3)^2}}{\frac{9,6\,M_M}{(6370.10^3)^2}} = \frac{6370^2}{3390^2.9,6} = 0,368 \qquad \Rightarrow \qquad g_M = 0,368.9,8 = \mathbf{3,60\ m/s^2}$$

así que una persona de 70 kg pesará en Marte $P_{Marte} = m\,g_M = 70\ .\ 3,60 = \mathbf{252\ N}$

casi tres veces menos que en la Tierra, donde su peso será de 686 N.

JUNIO 00

A1.– Se pone en órbita un satélite artificial de 600 kg a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Si el lanzamiento se ha realizado desde el nivel del mar, calcule:

a) Cuánto ha aumentado la energía potencial del satélite.

b) Qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que se escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación, G = $6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, M_T = $5,98.10^{24}$ kg; Radio medio de la Tierra R_T = $6,37.10^6$ m

a) Hemos de considerar los valores de la energía potencial en la superficie de la Tierra y, más tarde, en la órbita. Por supuesto, la energía potencial debe escribirse

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

ya que alturas de 1200 km sobre la superficie de la Tierra están muy lejos de la aproximación de Tierra plana. De este modo, la energía potencial en la superficie de la Tierra es

$$E_p^{Superficie} = -G\frac{Mm}{R} = -6,67.10^{-11}\,\frac{5,98.10^{24}.600}{6,37.10^6} = -3,76.10^{10}\ J$$

y la energía potencial en la órbita queda

$$E_p^{órbita} = -G\frac{Mm}{r} = -6,67.10^{-11}\,\frac{5,98.10^{24}.600}{7,57.10^6} = -3,16.10^{10}\ J$$

En consecuencia, el aumento de la energía potencial, restando su valor en la órbita menos en la superficie:

$$\Delta E_p = E_p^{órbita} - E_p^{Superficie} = -3,16.10^{10} - (-3,76.10^{10}) = \mathbf{6.10^9\ J}$$

¿Qué hubiese pasado si alguien, alegremente, aplicase la expresión mgh para la energía potencial sobre la superficie de la Tierra, con h = 1200 km y g = 9,8 m/s^2? El resultado habría sido $7,06.10^9$ J, muy por encima del valor correcto que hemos hallado: usar mgh aquí sería disparatado.

b) Ahora tenemos que fijarnos en la **energía mecánica** del satélite en su órbita. Como sabemos, está dada por

$$E_{órbita} = -E_c = \frac{1}{2}E_p = -G\frac{Mm}{2r} = -6,67.10^{-11}\,\frac{5,98.10^{24}.600}{2.7,57.10^6} = -1,58.10^{10}\ J$$

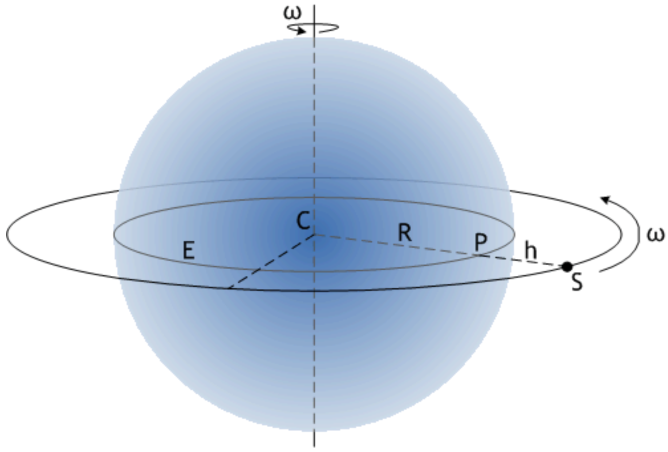
y es negativa, como corresponde a un objeto que está ligado a la Tierra, describiendo una órbita circular a su alrededor. Para escapar al campo gravitatorio terrestre, el satélite precisaría una energía mecánica mínima de 0 J, que le permitiría alejarse indefinidamente de la Tierra. En consecuencia, parece claro que la energía adicional necesaria sería de **$1,58.10^{10}$ J**.

SEPTIEMBRE 00

C1.– a) ¿Con qué frecuencia angular debe girar un satélite de comunicaciones, situado en una órbita ecuatorial, para que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la Tierra?

b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se encontrará el satélite citado en el apartado anterior?

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 m s^{-2};
Radio medio de la Tierra = $6{,}37.10^6$ m



a) La discusión del satélite geoestacionario en una órbita ecuatorial se plantea en cualquier listado de problemas sobre gravitación terrestre: un clásico donde los haya.

La figura intenta reflejar lo que sucede: el satélite S se encuentra en órbita a una altura h sobre la superficie, en el plano ecuatorial terrestre y girando con una velocidad angular ω igual a la de rotación de la Tierra sobre sí misma, alrededor del eje que pasa por los Polos. De esta manera, el satélite se encuentra siempre sobre el mismo punto P de la superficie terrestre, ya que Tierra y satélite giran de modo sincronizado.

Obviamente, esto significa que el satélite, como la Tierra, debe completar una vuelta cada día; es decir, ambos tienen un periodo de giro T = 24 h.

Por lo tanto, la velocidad angular (el término frecuencia angular del enunciado se refiere a ω) valdrá

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24.60.60} = \mathbf{7{,}27.10^{-5}\ rad/s}$$

b) El radio de la órbita del satélite sería la suma del radio terrestre, R, y la altura h de la órbita sobre la superficie de la Tierra, r = R + h. La velocidad lineal de un satélite en órbita depende, como sabemos, del radio de su órbita

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (1)$$

de manera que el satélite **se mantiene en la órbita, de forma estable, si tiene exactamente esa velocidad**. Es fundamental, en este sentido, entender la relación precisa entre radio orbital y velocidad, fijada en (1).

Ahora bien, la velocidad lineal en un giro está relacionada con la velocidad angular, según $v = \omega.r$

de forma que (1) se puede poner

$$v = \omega r = \sqrt{G\frac{M}{r}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{G\frac{M}{r^3}} \qquad (2)$$

que establece para la velocidad angular el mismo requerimiento que para la velocidad lineal: para ocupar de forma estable (lo llamamos **órbita estacionaria**) una órbita de radio r hay que tener precisamente la velocidad angular ω dada por (2), ni más ni menos.

En consecuencia, si la velocidad angular de nuestro satélite es conocida, podemos hallar su radio orbital:

$$\omega = 7{,}27.10^{-5}\ rad/s = \sqrt{G\frac{M}{r^3}} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{G\frac{M}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}8R^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{9{,}8.(6{,}37.10^6)^2}{(7{,}27.10^{-5})^2}} = \mathbf{42207{,}62\ km}$$

y la altura de la órbita sobre la superficie, restando el radio terrestre, quedará

$$h = r - R = 42207{,}62 - 6370 = \mathbf{35837{,}62\ km}$$

que es un valor notable, unas 5,5 veces el radio terrestre. Ya que este es un ejercicio que aparece reiteradamente, no sobraría acordarse del resultado obtenido.

SEPTIEMBRE 00

A1.– Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averiguar:

a) La velocidad del satélite.

b) Su energía mecánica.

Datos: Gravedad en la superficie terrestre, g = 9,8 m s^{-2}; Radio medio de la Tierra, R = $6{,}37.10^6$ m

a) Podemos encontrar con facilidad el radio de la órbita, puesto que conocemos la expresión de la aceleración de la gravedad — la intensidad del campo gravitatorio — debida a la Tierra. Se trata de

$$g = G\frac{M}{r^2} \qquad (1)$$

y depende, como sabemos, de la distancia r al centro de la Tierra. En la superficie, cuando r = R, la gravedad tiene el conocido valor 9,8 m/s^2. Como nos dicen que en la órbita del satélite la gravedad tiene la mitad de este valor, sabemos que g allí arriba vale 4,9 m/s^2; de ahí, con (1), nos resultará sencillo hallar r:

$$4{,}9 = G\frac{M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{G\frac{M}{4{,}9}} = \sqrt{\frac{9{,}8R^2}{4{,}9}} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = 9{,}01.10^6 \text{ m}$$

Ahora, conocido el radio orbital, podemos hallar cualquier cosa: como sabemos, todo depende de r.

Así, por ejemplo, la velocidad lineal del satélite es

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8.(6{,}37.10^6)^2}{9{,}01.10^6}} = \mathbf{6643{,}39\ m/s = 6{,}64\ km/s}$$

b) Y del mismo modo, la energía mecánica, que depende también de r. Su valor es

$$E = -E_c = \frac{1}{2}E_p = -G\frac{Mm}{2r} = -\frac{9{,}8R^2 m}{2r} = -\frac{9{,}8.(6{,}37.10^6)^2.200}{2.9{,}01.10^6} = \mathbf{-4{,}41.10^9\ J}$$

negativo, como corresponde a un satélite en órbita cerrada alrededor de la Tierra.

MODELO 01

C1.– Determine la relación que existe entre la energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular en torno a un planeta y su energía potencial.

La velocidad de un satélite en órbita circular de radio r, alrededor de un planeta de masa M, es

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (1)$$

de modo que la energía cinética del satélite es $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mG\frac{M}{r} = G\frac{Mm}{2r}$ (2)

y es **constante**. Es un buen momento para recordar que la velocidad (1) es correcta en una **órbita circular**, caso particular sencillo: finalmente, se trata de un **giro uniforme**. En una órbita elíptica, (1) deja de ser aplicable, y la velocidad del satélite es variable, de forma que su energía cinética no está dada por (2); obviamente, no es constante. Por suerte, estamos tratando con una órbita circular.

La energía potencial del satélite (con más rigor, la energía potencial del sistema planeta—satélite) está dada por

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} \qquad (3)$$

de manera que, como la distancia r del satélite al planeta es siempre la misma, la energía potencial es también **constante**, y una sencilla inspección de (2) y (3) revela que su valor es doble, pero negativo, que el de E_c. Así de sencillas son las cosas en una órbita de este tipo. La expresión (3) es correcta siempre, sea cual sea la órbita, **pero es constante sólo si la órbita es circular**, por razón obvia.

La energía mecánica es la suma de cinética y potencial: siendo ambas constantes, la energía mecánica lo será también, de forma trivial. Su valor es

$$E = E_c + E_p = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r} \qquad (4)$$

negativo, e igual a la energía cinética cambiada de signo. También es, evidentemente, la mitad de la energía potencial. Una vez más, como ha sucedido con (2), esta expresión sólo es válida en órbitas circulares.

En órbitas cónicas (círculos, elipses, parábolas, hipérbolas), de forma general, la energía mecánica es **constante**, ya que esto es una consecuencia de que las fuerzas gravitatorias son siempre **conservativas**. Pero, salvo que la órbita sea circular, no se puede emplear ni (2) ni (4). Cuando se trata de órbitas elípticas, la expresión (4) para la energía total puede emplearse convirtiéndola en

$$E = -G\frac{Mm}{2a} = Cte$$

donde a es el semieje mayor de la órbita, que es fácil de conseguir si se tienen las distancias al planeta en el afelio y en el perihelio.

Del mismo modo, el momento angular de un satélite siempre es **constante**, ya que eso es consecuencia de que la fuerza gravitatoria ejercida por el planeta es **central**. Sin embargo, la expresión

$$L = mvr \qquad (5)$$

empleada frecuentemente para calcular su módulo, es correcta en una órbita circular y no lo es, en cambio, en otras cónicas. Para el caso de órbitas elípticas, como hemos discutido en alguna otra ocasión, (5) es válida en el afelio y en el perihelio.

MODELO 01

A1.– El periodo de revolución del planeta Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su correspondiente órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determine:

a) La razón entre los radios de las respectivas órbitas.

b) La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus respectivas órbitas.

a) La tercera ley de Kepler, la llamada ley de los periodos de revolución, es la respuesta inmediata a esta sencilla cuestión. La ley, para órbitas circulares, dice que **los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas.**

En términos prácticos, la expresión matemática de la ley es $T^2 = A.r^3$ (1)

donde T es el periodo de rotación de un planeta y r su radio de giro. La constante A es, en eso consiste la esencia de la ley, la misma para todos los objetos que orbitan alrededor del Sol. De hecho, su valor es

$$A = \frac{4\pi^2}{GM} \qquad (2)$$

siendo M la masa del Sol. Así, el valor de A depende únicamente de la masa del objeto central alrededor del que se orbita. Así, para satélites que giran alrededor de la Tierra, la masa M que aparece en (2) sería la de la Tierra.

La aplicación de (1) resuelve la primera pregunta. Sean T_T y T_J los periodos de rotación de Tierra y Júpiter, respectivamente; sus radios orbitales alrededor del Sol serán r_T y r_J. La ley (1), escrita para cada uno, es

$$T_T^2 = A r_T^3 \quad (3); \qquad T_J^2 = A r_J^3 \quad (3)$$

y, dividiendo miembro a miembro $\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{A r_J^3}{A r_T^3} \Rightarrow \frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{r_J^3}{r_T^3}$

así que basta acudir al enunciado para resolver $\frac{r_J^3}{r_T^3} = 144 \Rightarrow \mathbf{r_J = \sqrt[3]{144}\, r_T} \Rightarrow \mathbf{r_J = 5{,}24\, r_T}$

b) La aceleración de un planeta en órbita circular tiene una doble significación: de un lado, es la aceleración centrípeta en un giro uniforme

$$a = a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad (4)$$

pero también se trata de la aceleración de la gravedad (intensidad del campo gravitatorio) solar en la órbita, que se escribe

$$a = g = G\frac{M}{r^2} \qquad (5)$$

donde M es la masa del Sol. Las expresiones (4) o (5) pueden usarse de forma alternativa; en realidad, la buena comprensión de esta identidad es la clave de la discusión de una órbita circular.

En nuestro caso, (5) resolverá de forma sencilla la razón que nos piden; para ello, escribimos los valores de g en cada una de las órbitas (g_T en la órbita terrestre, g_J en la joviana) y dividimos miembro a miembro:

$$\frac{g_T}{g_J} = \frac{G\frac{M}{r_T^2}}{G\frac{M}{r_J^2}} = \frac{\frac{1}{r_T^2}}{\frac{1}{r_J^2}} = \frac{r_J^2}{r_T^2}$$

así que, usando el resultado del apartado anterior para la relación entre los radios de las órbitas

$$\frac{g_T}{g_J} = \frac{r_J^2}{r_T^2} = 5{,}24^2 = \mathbf{27{,}47}$$

deducimos que la gravedad solar es 27,47 veces más intensa en la órbita de la Tierra que en la de Júpiter.

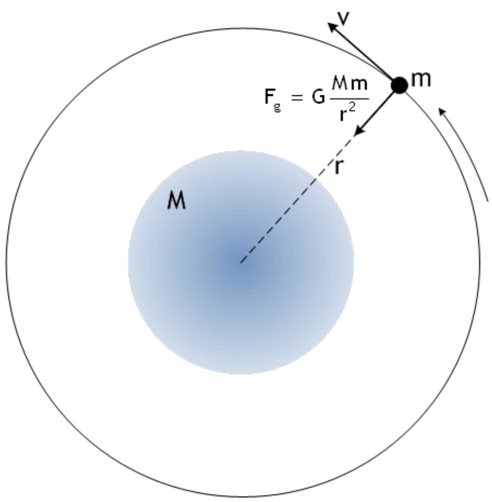
JUNIO 01

C1.— En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determine:

a) La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite y de la Tierra y del radio de la órbita.

b) La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.

Un satélite en órbita circular en torno a la Tierra describe un **giro uniforme**: esto es una consecuencia de la ley de las áreas aplicada a esta trayectoria sencilla (para barrer áreas iguales en tiempos iguales, cuando se describe una órbita circular, hay que moverse con velocidad constante).



La única fuerza que actúa sobre el satélite, la de atracción gravitatoria terrestre, **ha de ser una fuerza centrípeta**, exclusivamente dedicada a **variar la dirección de la velocidad**, y no su módulo.

La fuerza centrípeta necesaria sobre un objeto de masa m, girando con velocidad constante v en una trayectoria circular de radio r, es la conocida expresión

$$F_c = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r} \qquad (1)$$

y debe estar dirigida, como es bien sabido, hacia el centro de giro. En la situación de un satélite en órbita circular terrestre, la fuerza gravitatoria sobre el satélite está dada por Newton,

$$F_g = G\,\frac{Mm}{r^2} \qquad (2)$$

de modo que esta fuerza gravitatoria tiene que cumplir el papel de fuerza centrípeta necesaria para que exista giro del satélite. Dicho en términos muy sencillos, necesitamos una fuerza centrípeta como la que muestra (1), y lo que tenemos es la fuerza gravitatoria que aparece en (2): si el satélite ha de mantenerse en órbita estable, debe ser igual la fuerza que necesitamos, (1), que la que tenemos, (2). Nótese que no hablamos de dos fuerzas — la única fuerza que hay aquí es la gravitatoria, que aparece en la figura —, sino de que esta fuerza tiene que asumir el papel de fuerza centrípeta.

Así, (1) debe ser igual a (2). ¿Qué pasa si esto no sucede? Pues que el satélite no se mantiene en la órbita de radio r:

Si (1) > (2), la fuerza gravitatoria es demasiado pequeña y no es capaz de retener al satélite, que se alejará de la Tierra, quizá a otra órbita de mayor tamaño.

Si (2) > (1), hay demasiada fuerza gravitatoria y el satélite se acerca a la Tierra, quizá a una órbita de radio menor.

El mantenimiento de la órbita estacionaria de radio requiere que (1) = (2), de forma exacta. De esa identificación se sigue

$$m\frac{v^2}{r} = G\,\frac{Mm}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (3)$$

la muy empleada expresión de la velocidad exacta que debe tener un satélite en una órbita circular de radio r; por supuesto, M es la masa de la Tierra y, como puede verse, no importa la masa m del satélite: **para estar en esa órbita, cualquier satélite debe tener precisamente esa velocidad**.

a) Como consecuencia inmediata, la energía cinética del satélite de masa m en órbita circular de radio r resulta ser

$$\mathbf{E_c} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{G\frac{M}{r}}\right)^2 = \mathbf{G\,\frac{Mm}{2r}} \qquad (4)$$

b) La energía potencial de una pareja de masas M y m, situadas a una distancia r, viene dada por

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} \qquad (5)$$

y frecuentemente, cuando tratamos situaciones como la que nos ocupa, solemos referirnos a ella en términos de **energía potencial del satélite**: eso está mal expresado, ya que toda energía potencial se refiere, en los términos más simples, siempre a pares de objetos y no a objetos individuales. Del modo que sea, se trata de una costumbre muy extendida y que aceptaremos como un vicio de lenguaje.

La energía mecánica del satélite sería entonces la suma de las energías cinética (del satélite, con toda propiedad) expresada en (4) y potencial (del par Tierra—satélite) expresada en (5). Deberíamos recordar una vez más que (5) es una expresión válida en cualquier tipo de órbita, pero (4) **lo es únicamente en órbitas circulares**. La energía mecánica resulta

$$\mathbf{E} = E_c + E_p = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = \mathbf{-G\frac{Mm}{2r}} \qquad (6)$$

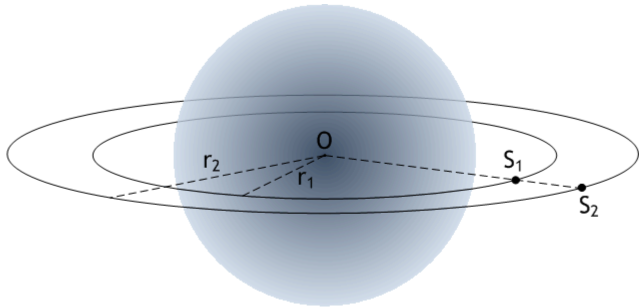
que es, de forma obvia, **la mitad de la energía potencial, $\mathbf{E = \frac{1}{2}E_p = -E_c}$**. Este resultado depende de expresiones como (4), válida en órbitas circulares, de forma que debe usarse en ese tipo de órbitas.

JUNIO 01

A1.– Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en un mismo plano, de radios r_1 = 8000 km y r_2 = 9034 km respectivamente. En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado:

a) ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?

b) ¿Qué relación existe entre los períodos orbitales de los satélites? ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado seis vueltas, desde el instante inicial?



a) La figura muestra la situación descrita en el enunciado: los satélites S_1 y S_2 describen órbitas alrededor de la Tierra, girando en el mismo plano con radios r_1 y r_2. El instante inicial a que refiere el enunciado es el que se representa, estando las posiciones de los satélites alineadas con el centro O de la Tierra.

Como sabemos, la velocidad lineal de un satélite en órbita circular sobre la Tierra está dada por

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (1)$$

donde M es la masa de la Tierra y r el radio de la órbita. Aplicando (1) a los satélites S_1 y S_2 podemos encontrar la relación existente entre sus velocidades orbitales:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{G\frac{M}{r_1}}}{\sqrt{G\frac{M}{r_2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{r_1}}}{\sqrt{\frac{1}{r_2}}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{9034}{8000}} = \mathbf{1,06}$$

de modo que $\mathbf{v_1 = 1,06\, v_2}$, la velocidad del satélite más bajo es ligeramente mayor que la del satélite más lejano.

b) La respuesta es la tercera ley de Kepler, relativa a los periodos de revolución: sus cuadrados son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas, si es que son circulares. De manera que, conociendo los radios, no tenemos ninguna dificultad

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3} = \frac{9034^3}{8000^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{9034^3}{8000^3}} = \mathbf{1,2}$$

en hallar la relación entre los periodos, que es $\mathbf{T_2 = 1,2\, T_1}$, casi exactamente. Cuando el satélite S_1 haya girado seis veces, desde el instante representado en la figura, habrá pasado un tiempo

$$t = 6T_1$$

y, en ese tiempo, el número de vueltas dado por S_2 se obtendría dividiendo t por el periodo de giro T_2

$$\text{Número de vueltas de } S_2 = \frac{t}{T_2} = \frac{6\,T_1}{T_2} = \frac{6\,T_1}{1,2\,T_1} = \mathbf{5}$$

resultando, como se ve, **5 vueltas completas.** En consecuencia, **cuando S_1 haya completado seis vueltas la situación volverá a ser exactamente la misma que en el instante representado en la figura, con los satélites alineados con el centro O de la Tierra**, aunque S_2 habrá girado una vuelta menos.

SEPTIEMBRE 01

C1.– Un proyectil de masa 10 kg se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 3200 m/s:

a) ¿Cuál es la máxima energía potencial que adquiere?

b) ¿En qué posición se alcanza?

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 m s^{-2}; Radio medio de la Tierra = $6,37.10^6$ m

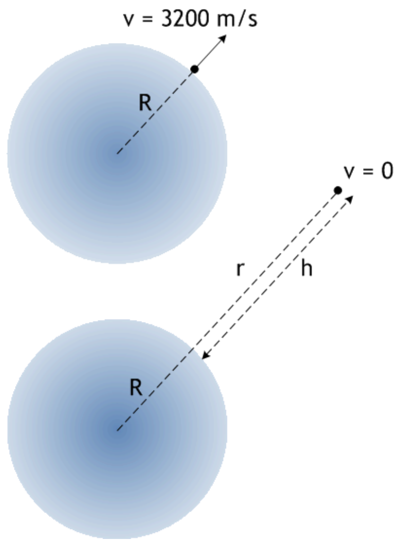
a) Una velocidad de 3200 m/s es bastante grande, casi un tercio de la velocidad de escape de la Tierra. Por consiguiente, **no puede discutirse este problema desde la aproximación de Tierra plana, usando mgh como medida de la energía potencial**, ya que el proyectil subirá hasta una altura h en absoluto despreciable frente al radio terrestre R.

Escribiremos entonces la energía mecánica del proyectil en la forma

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \text{constante}$$

donde M es la masa de la Tierra, m la del proyectil, v es la velocidad de éste y r su distancia al centro de la Tierra. Como sabemos, **la energía mecánica se conserva constante**, ya que la fuerza gravitatoria terrestre es conservativa.

Así, escribiremos que la energía mecánica en el momento de salir desde la superficie terrestre, con la velocidad de 3200 m/s, debe valer lo mismo que la energía mecánica en el lugar donde el proyectil, al alcanzar su altura máxima sobre la superficie, se detenga. Esto es:



$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m.0^2 - G\frac{Mm}{r}$$

de modo que, en la posición de máximo alejamiento de la Tierra, toda la energía es potencial, **y ahí es donde toma su máximo valor**. Podemos hallar la energía mecánica en el momento de salir, puesto que conocemos todos los datos necesarios: el producto GM, ya que el enunciado no facilita el valor de la masa M de la Tierra, ni tampoco el valor de la constante G, se consigue recordando que el valor de la intensidad de campo gravitatorio **en la superficie de la Tierra** es el valor 9,8 m/s^2

$$g = 9{,}8 = G\frac{M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad GM = 9{,}8R^2$$

así que la energía mecánica en el momento del lanzamiento se escribe

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{9{,}8R^2m}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - 9{,}8Rm$$

y su valor será

$$\frac{1}{2}mv^2 - 9{,}8Rm = \frac{1}{2}10.3200^2 - 9{,}8.6{,}3.10^6.10 = \mathbf{-5{,}73.10^8\ J}$$

de manera que la energía potencial en el punto de máximo alejamiento, donde **toda la energía es potencial**, será

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = \mathbf{-5{,}73.10^8\ J} \qquad (1)$$

A menudo nos parece raro un resultado como este, estando como estamos acostumbrados a emplear la energía potencial gravitatoria mgh, en la aproximación de Tierra plana: con una fórmula como esta, las energías potenciales por encima de la superficie terrestre son positivas, y eso es lo que hemos visto casi siempre. Pero no podemos usarla aquí, ya que nuestro proyectil se aleja demasiado de la superficie terrestre, y no podemos aceptar que g = 9,8 m/s^2 como valor constante a medida que nos alejamos de la superficie; de hecho, como sabemos, g decrece con el **cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.**

Las dos expresiones para la energía potencial terrestre tienen varias diferencias, y una de ellas es el lugar donde la energía potencial es cero. La tabla que sigue muestra ese y otros aspectos de interés en la comparación entre ambas:

	¿Qué necesitamos saber?	¿Dónde se puede aplicar?	¿Dónde toma el valor 0?
$E_p = -G\frac{Mm}{r}$	r es la distancia al centro de la Tierra	En cualquier punto por encima de la superficie terrestre, sin límite de alejamiento.	A distancia infinita del centro de la Tierra.
E_p = mgh	h es la altura sobre la superficie terrestre	En las inmediaciones de la superficie, a una altura h tal que h <<< R.	En la superficie terrestre.

Hay algo, sin embargo, que sí podemos hacer: podemos cambiar el cero de cualquier energía potencial, ya que podemos sumarle cualquier constante. Recuérdese, en este sentido, que la energía potencial asociada a cualquier fuerza conservativa está indeterminada.

La energía potencial del proyectil en el momento en que es lanzado desde la superficie de la Tierra es

$$\mathbf{E}_p^{\text{Superficie}} = -G\frac{Mm}{R} = -\frac{9{,}8R^2m}{R} = -9{,}8Rm = -9{,}8.6{,}37.10^6.10 = -6{,}24.10^8\ J \qquad (2)$$

de modo que podemos ver **cuánta energía potencial ha ganado** al subir hasta pararse: se tratará de la diferencia entre el resultado (1), que da la energía potencial arriba, y (2), que da la energía potencial abajo. Eso sería

$$\Delta E_p = -5{,}73.10^8 - (-6{,}24.10^8) = 5{,}1.10^7\ J \qquad (3)$$

y así podríamos manejar una cantidad positiva, en lugar de la negativa que tenemos en (1). Para zanjar cualquier posible duda, resaltemos que la única diferencia entre (1) y (3) está en el lugar donde se tiene la energía potencial cero: para (1), está en infinito; para (3), en la superficie de la Tierra.

b) Para saber en qué posición se alcanza la máxima energía potencial basta ir a (1) para despejar r. Recordando que tomamos GM = 9,8 R^2, las cuentas son

$$-G\frac{Mm}{r} = -5{,}73.10^8\ J \quad \Rightarrow \quad r = \frac{9{,}8R^2m}{5{,}73.10^8} = \frac{9{,}8.(6{,}37.10^6)^2.10}{5{,}73.10^8} = \mathbf{6{,}94.10^6\ m}$$

lo que significa una altura sobre la superficie terrestre

$$h = r - R = 6{,}94.10^6 - 6{,}37.10^6 = 5{,}7.10^5\ m = 570\ km$$

una cantidad que confirma nuestras precauciones acerca del uso de mgh como energía potencial: de ningún modo se puede decir que 570 km son despreciables frente a 6370 km. A esta altura, la aceleración de la gravedad es

$$g = G\frac{M}{r^2} = \frac{9{,}8R^2}{r^2} = \frac{9{,}8.6{,}37^2}{6{,}94^2} = 8{,}26\ m/s^2$$

notablemente menor ya que los 9,8 m/s^2 de la superficie. Otra forma de confirmar la magnitud de los errores que cometeríamos sería usar mgh a esa altura

$$mgh = 10\ .\ 9{,}8\ .\ 5{,}7.10^5 = 5{,}6.10^7\ J$$

y comparar este resultado con (3): habríamos cometido un error del orden del 9%, muy por encima de lo que se puede aceptar.

MODELO 02

C1.— a) ¿A qué altitud tendrá una persona la mitad del peso que tiene sobre la superficie terrestre? Exprese el resultado en función del radio terrestre.

b) Si la fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos en proporción a sus masas, ¿por qué no cae un cuerpo pesado con mayor aceleración que un cuerpo ligero?

a) El peso de una persona se expresa como P = mg, donde g es la intensidad del campo gravitatorio en el punto en el que se encuentra. Llamemos g_0 y P_0 a la intensidad de campo y el peso correspondiente en la superficie de la Tierra, donde g_0 = 9,8 m/s^2, como sabemos

$$g_0 = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8\ m/s^2 \qquad (1)$$

Para que el peso se reduzca a la mitad, la intensidad de campo g deberá ser la mitad de g_0. Eso sucederá a una distancia r del centro de la Tierra tal que

$$g = G\frac{M}{r^2} = \frac{1}{2}g_0 = \frac{1}{2}G\frac{M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = R\sqrt{2}}$$

y si el resultado debe ser expresado en términos de altitud sobre la superficie terrestre, entonces será

$$h = r - R = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1) = \mathbf{0{,}41\,R}$$

b) La respuesta a esta cuestión tiene que ver con la identidad entre la masa inercial de un cuerpo cualquiera y su correspondiente masa gravitatoria. La fuerza que actúa sobre un cuerpo en un campo gravitatorio es

$$P = m_g\ g \qquad (2)$$

donde g es la intensidad de campo en el punto que ocupa el cuerpo y m_g es la **masa gravitatoria** de éste. Esta fuerza acelerará al cuerpo, de acuerdo con la segunda ley de la dinámica de Newton

$$F = m_i\ a \qquad (3)$$

donde F es la fuerza que actúa sobre el cuerpo, en nuestro caso P, y m_i es la **masa inercial** del cuerpo. Escribiendo en (3) el valor de la fuerza P, queda

$$m_g\ g = m_i\ a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_g}{m_i}\ g \qquad (4)$$

como expresión para la aceleración de un cuerpo bajo la acción de la fuerza gravitatoria. Ahora bien, resulta que **el cociente entre las masas gravitatoria e inercial de un cuerpo cualquiera es el mismo siempre**, con independencia del cuerpo que usemos. Este es un hecho experimental, y en última instancia significa que existe algún tipo de relación profunda entre la gravedad y la inercia, que todavía no es bien comprendida.

Con un sistema de unidades adecuado, se puede hacer que el cociente $\frac{m_g}{m_i} = 1 \quad \Rightarrow \quad m_g = m_i$

de modo que la masa gravitatoria de un cuerpo y su masa inercial tendrían el mismo valor (lo que es bien distinto que decir que serían la misma cosa, si se piensa un poco), y se expresarían de forma común como lo que solemos llamar **masa m del cuerpo**,

$$m = m_g = m_i$$

Evidentemente, y como corolario, la aceleración (4) con que se movería cualquier cuerpo quedaría a = g, fuese cual fuese el cuerpo empleado. Por cierto, la intensidad de campo gravitatorio g en un punto se llama **aceleración de la gravedad** en ese punto por esta razón: resulta que, además de expresar **la fuerza que actuaría sobre 1 kg colocado en ese punto**, también mide **la aceleración con que se movería cualquier objeto ahí situado.**

MODELO 02

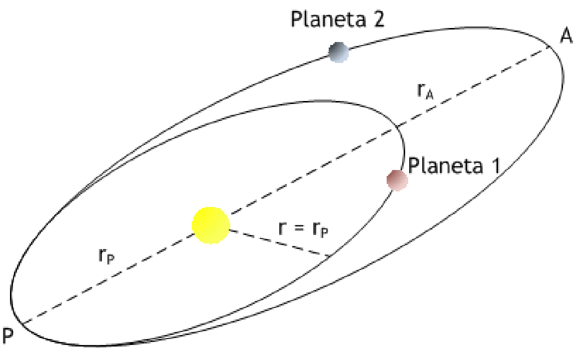
A1.– Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio 10^{11} m y periodo de 2 años. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1,8.10^{11}$ m.

a) ¿Cuál es la masa de la estrella? (0,5 puntos)

b) Halle el periodo de la órbita del planeta 2. (0,5 puntos)

c) Utilizando los principios de conservación del momento angular y de la energía mecánica, hallar la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella. (1 punto)

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}



a) Sea M la masa de la estrella. La tercera ley de Kepler, de los periodos de revolución, se escribe de modo muy sencillo para una órbita circular

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \qquad (1)$$

de manera que, conociendo el radio de la órbita circular del planeta 1, así como su periodo, se despeja M sin mayores dificultades:

$$M = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = \frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}(2.365.86400)^2}.10^{33} = \mathbf{1,49.10^{29}\ kg}$$

b) Para una órbita elíptica, la tercera ley de Kepler se escribe igual que en (1), sustituyendo el radio de la órbita circular por el **semieje mayor** de la órbita. Esto sería

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \qquad (2)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita del planeta 2. La figura muestra la distancia del planeta 2 a la estrella en el perihelio, $r_P = 10^{11}$ m, y en el afelio, $r_A = 1,8.10^{11}$ m. Es fácil comprender que el semieje mayor, a, se consigue haciendo

$$a = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{10^{11} + 1,8.10^{11}}{2} = 1,4.10^{11}\ m$$

y ahora podemos usar (2), metiendo ahí este valor de a y la masa M de la estrella, calculada previamente. Así obtenemos el periodo del planeta 2:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}.1,49.10^{29}}.(1,4.10^{11})^3} = \mathbf{1,04.10^8\ s = 3,31\ años}$$

c) El momento angular L y la energía mecánica $E = E_c + E_p$ son los invariantes de un objeto moviéndose bajo fuerzas gravitatorias. La velocidad lineal, la energía cinética o la energía potencial, que son **constantes en una órbita circular**, no lo son en una órbita elíptica, ni en ninguna otra trayectoria cónica fuera de la circular.

Podemos escribir la energía mecánica del planeta, en cualquier posición, como función de su distancia a la estrella y de su velocidad:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

y el resultado es siempre el mismo: es, como ya hemos dicho, **una constante del movimiento del planeta**. En particular, podemos escribir que la energía mecánica es la misma en el afelio que en el perihelio

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{r_P} \qquad (3)$$

De otro lado, el momento angular (o, más exactamente, su módulo) se puede escribir de manera sencilla en el afelio y en el perihelio

$$L = mv_Ar_A = mv_Pr_P \qquad (4)$$

pero no así en otros puntos de la órbita, como ya hemos discutido en alguna ocasión. En cualquier caso, tratamos con los dos puntos singulares A y P, afelio y perihelio. De entre las igualdades (3) y (4) se obtiene la respuesta a la cuestión que nos ocupa. En efecto, de (4)

$$mv_Ar_A = mv_Pr_P \quad\Rightarrow\quad v_Ar_A = v_Pr_P \quad\Rightarrow\quad \frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1,8.10^{11}}{10^{11}} = 1,8 \quad\Rightarrow\quad v_P = 1,8\,v_A$$

tenemos una sencilla relación entre las velocidades del planeta 2 en su afelio y perihelio. Si esta igualdad se lleva a (3), al tiempo que se simplifica m, queda

$$\frac{1}{2}v_A^2 - G\frac{M}{r_A} = \frac{1}{2}v_P^2 - G\frac{M}{r_P} \quad\Rightarrow\quad v_P^2 - v_A^2 = 2GM(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}) \quad\Rightarrow\quad (1,8\,v_A)^2 - v_A^2 = 2GM(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A})$$

así que, con los valores de M, r_A y r_P que tenemos, el resultado queda

$$(1,8\,v_A)^2 - v_A^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2GM}{1,8^2 - 1}\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)} = \sqrt{\frac{2.6,67.10^{-11}.1,49.10^{29}}{1,8^2 - 1}\left(\frac{1}{10^{11}} - \frac{1}{1,8.10^{11}}\right)} = \mathbf{1,26.10^4\ ms^{-1}}$$

algo más de 12,5 km/s; un resultado que puede juzgarse por comparación con la velocidad de la Tierra alrededor del Sol, de unos 30 km/s. Son del mismo orden de magnitud, y la mayor velocidad de la Tierra se explica porque la masa del Sol es mayor (unas 13 veces) que la de esta estrella.

JUNIO 02

C1.– Un planeta esférico tiene un radio de 3000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2.

a) ¿Cuál es su densidad media?

b) ¿Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?

Dato : Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg^{-2}

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es

$$g = G\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

donde M es la masa del planeta y R su radio. Por otro lado, suponiendo que la densidad del planeta es constante (o, lo que es lo mismo, suponiendo que tiene simetría esférica y empleando su **densidad media** ρ), la masa M se escribe

$$M = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3$$

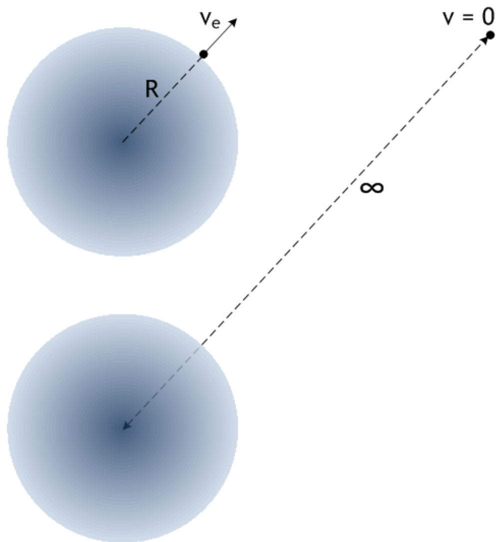
y, llevando esto a(1)

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\rho\pi R^3}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad (2)$$

tenemos una expresión de la gravedad en la superficie de un planeta en función de su densidad media y de su radio. Esto nos permite responder de forma inmediata a la primera cuestión

$$6\ m/s^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho.3.10^6 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3}{4\pi}\,\frac{6}{6,67.10^{-11}.3.10^6} = \mathbf{7,16.10^3\ kg/m^3 = 7,16\ g/cm^3}$$

algo mayor que la densidad media de la Tierra, que es de 5,5 g/cm^3.



b) Como sabemos, la energía mecánica mínima que precisa un objeto para escapar de la gravedad del planeta es 0 J. Si v_e es la velocidad con que lo lanzamos desde la superficie, perpendicularmente a ella, su energía mecánica en el momento del despegue es

$$\frac{1}{2}m v_e^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

de donde se sigue la conocida expresión para la velocidad de escape,

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

así que sólo resta hacer las cuentas. Para evitar cálculos engorrosos, usaremos el valor de g en la superficie para escribir el producto GM:

$$g = 6\,m/s^2 = G\frac{M}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad GM = 6R^2$$

y la velocidad de escape quedará

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{12R} = \sqrt{12.3.10^6} = \mathbf{6000\ m/s = 6\ km/s}$$

poco más de la mitad que la velocidad de escape de la Tierra: eso parece razonable, ya que la gravedad de este planeta en la superficie es notablemente inferior a la terrestre.

JUNIO 02

A1.– La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en tomo al planeta Venus es $1{,}45.10^{-4}$ rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es $2{,}2.10^{12}$ kg m ^{2} s^{-1} .

a) Determine el radio de la órbita del satélite y su masa.

b) ¿Qué energía sería preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular 10^{-4} rad/s?

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}; Masa de Venus = $4{,}87.10^{24}$ kg

a) La velocidad angular ω y la velocidad lineal v de un satélite en órbita circular se relacionan según

$$v = \omega\, r \qquad (1)$$

Sabemos, además, que la velocidad lineal del satélite en órbita circular de radio r, alrededor de Venus, cuya masa es M, se escribe

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (2)$$

de forma que es inmediato obtener r

$$v = \omega r = \sqrt{G\frac{M}{r}} \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67.10^{-11}.4{,}87.10^{24}}{1{,}45^2.10^{-8}}} = \mathbf{2{,}49.10^7\ m}$$

De otro lado, el módulo del momento angular se escribe

$$L = m\, v\, r \qquad (3)$$

de modo que podemos sustituir el valor de r conseguido para obtener m:

$$m = \frac{L}{v\,r} = \frac{L}{\omega r^2} = \frac{2{,}2.10^{12}}{1{,}45.10^{-4}.2{,}49^2.10^{14}} = \mathbf{24{,}47\ kg}$$

b) La idea básica en este apartado es que cada órbita del satélite tiene una determinada energía mecánica asociada. Para cambiar de órbita es necesario recibir, o desprenderse, de la diferencia de energías mecánicas entre las órbitas inicial y final. La energía mecánica de un satélite en órbita circular se escribe generalmente en función del radio de la órbita, de acuerdo a

$$E = -G\frac{Mm}{2r} \qquad (4)$$

pero, en este ejercicio, sería cómodo escribirla como función de la velocidad angular del satélite, para evitar la repetición de otro radio orbital, como se ha hecho más arriba. Esto se puede conseguir a partir de (2)

$$v = \omega r = \sqrt{G\frac{M}{r}} \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

y sólo hay que sustituir en (4) para tener

$$E = -G\frac{Mm}{2r} = -G\frac{Mm}{2\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}} = -\frac{1}{2}m\sqrt[3]{G^2M^2\omega^2} \qquad (5)$$

Esta es una manera poco frecuente de hacer los cálculos, pero útil en este ejercicio. Ahora tenemos las energías en las dos órbitas:

Órbita inicial $\quad E_i = -\frac{1}{2}m\sqrt[3]{G^2M^2\omega_i^2}\, m = -\frac{1}{2}\,24{,}47\,\sqrt[3]{6{,}67^2.10^{-22}.4{,}87^2.10^{48}.1{,}45^2.10^{-8}} = -1{,}60.10^8\ \text{J}$

Órbita final $\quad E_f = -\frac{1}{2}m\sqrt[3]{G^2M^2\omega_f^2}\, m = -\frac{1}{2}\,24{,}47\,\sqrt[3]{6{,}67^2.10^{-22}.4{,}87^2.10^{48}.10^{-8}} = -1{,}25.10^8\ \text{J}$

de modo que la órbita final es más energética (más grande, por tanto): eso era evidente desde que la velocidad angular en ella es menor que en la inicial. La energía necesaria para el cambio es la diferencia entre ambas:

$$\Delta E = E_f - E_i = -1{,}25.10^8 - (-1{,}60.10^8) = \mathbf{3{,}5.10^7\ J = 35\ MJ}$$

SEPTIEMBRE 02

A1.– Se pretende colocar un satélite artificial de forma que gire en una órbita circular en el plano del ecuador terrestre y en el sentido de rotación de la Tierra. Si se quiere que el satélite pase periódicamente sobre un punto del ecuador cada dos días, calcule:

a) La altura sobre la superficie terrestre a la que hay que colocar el satélite.

b) La relación entre la energía que hay que comunicar a dicho satélite desde el momento de su lanzamiento en la superficie terrestre para colocarlo en esa órbita y la energía mínima de escape.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de la Tierra, R_T = 6370 km; Masa de la Tierra, M_T =$5{,}98.10^{24}$ kg

a) La condición que imponen se refiere al periodo del satélite, e implica que éste ha de ser de 2 días. Eso nos permite conocer el radio de la órbita circular, empleando para ello la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}.(2.24.3600)^2}{4\pi^2}} = 67068{,}4 \text{ km} = 6{,}71.10^7 \text{ m}$$

y ahora, la altura sobre la superficie, restando el radio terrestre

$$h = r - R = 67068{,}4 - 6370 = \mathbf{60698\ km}$$

b) La energía que hay que comunicar al satélite para ponerlo en órbita desde la superficie terrestre es la diferencia entre la energía orbital necesaria allí arriba

$$E_{\text{órbita}} = -G\frac{Mm}{2r}$$

y la energía potencial que tiene el satélite cuando se encuentra en reposo sobre la superficie terrestre, es decir

$$E_p^{\text{superficie}} = -G\frac{Mm}{R}$$

donde R es el radio de la Tierra y r el radio orbital. La energía necesaria en el lanzamiento es la energía cinética que debemos aportar cuando lo lanzamos, y es, como decimos, la diferencia

$$E_{\text{lanzamiento}} = -G\frac{Mm}{2r} - (-G\frac{Mm}{R}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r})$$

Por otro lado, la energía mínima de escape es la energía cinética que debemos imprimir al satélite para que, al lanzarlo verticalmente, se aleje indefinidamente de la Tierra, hasta alcanzar una distancia infinita. Como sabemos, eso requiere lanzar el satélite con la velocidad (mínima) de escape

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

es decir, proporcionarle una energía cinética $\quad E_{\text{mínima escape}} = \frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{Mm}{R}$

Este resultado podría haberse escrito directamente: para alejarse indefinidamente de la Tierra, la **energía total** del satélite ha de ser, como mínimo, 0 J. Por tanto, partiendo de su situación en reposo sobre la superficie de la Tierra, hemos de darle como mínimo una energía cinética igual a su energía potencial, con signo positivo. Ese es precisamente el valor que acabamos de escribir.

La relación entre las energías involucradas en ambos lanzamientos resulta, entonces,

$$\frac{E_{\text{lanzamiento órbita}}}{E_{\text{mínima escape}}} = \frac{GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r})}{GMm\frac{1}{R}} = \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}}{\frac{1}{R}} = \frac{\frac{2r - R}{2rR}}{\frac{1}{R}} = \frac{2r - R}{2r} = \frac{2.67068{,}4 - 6370}{2.67068{,}4} = \mathbf{0{,}95}$$

así que la energía mínima de escape es sólo un 5% mayor que la energía involucrada en el lanzamiento. Esto no debería resultar extraño si se considera que se trata de una órbita bastante alejada de la Tierra, con un radio que supera en más de diez veces al radio terrestre.

MODELO 03

C1.– Un planeta esférico tiene una masa igual a 27 veces la masa de la Tierra, y la velocidad de escape para objetos situados cerca de su superficie es tres veces la velocidad de escape terrestre. Determine:

a) La relación entre los radios del planeta y de la Tierra.

b) La relación entre las intensidades de la gravedad en puntos de la superficie del planeta y de la Tierra.

a) La velocidad de escape desde la superficie de un planeta es la conocida

$$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}} \qquad (1)$$

donde M es la masa del planeta y R es su radio. Podemos escribir, entonces, las velocidades de escape para la Tierra y para el planeta en cuestión:

para la Tierra $$v_e^{Tierra} = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} \qquad (2)$$

para el planeta $$v_e^{Planeta} = \sqrt{2G\frac{M_P}{R_P}} \qquad (3)$$

de modo que basta dividir miembro a miembro, y tener en cuenta las indicaciones del enunciado para obtener la relación entre los radios:

$$\frac{v_e^{Tierra}}{v_e^{Planeta}} = \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}}{\sqrt{2G\frac{M_P}{R_P}}} = \sqrt{\frac{\frac{M_T}{R_T}}{\frac{M_P}{R_P}}} = \sqrt{\frac{M_T R_P}{M_P R_T}} = \sqrt{\frac{R_p}{27R_T}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R_P = 3R_T}$$

b) La intensidad gravitatoria en la superficie terrestre se escribe $$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} \qquad (4)$$

mientras que la intensidad del campo en la superficie del planeta es $$g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} \qquad (5)$$

así que basta dividir miembro a miembro (5) y (4) para obtener

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_P R_T^2}{M_T R_P^2} = \frac{27}{9} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g_P = 3g_T}$$

MODELO 03

A1.– Júpiter tiene aproximadamente una masa 320 mayor que la de la Tierra y un volumen 1320 superior al de la Tierra. Determine:

a) A qué altura sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite, en órbita circular en torno a este planeta, para que tuviera un periodo de 9 horas 50 minutos.

b) La velocidad del satélite en dicha órbita.

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra, g = 9,8 m/s^2 ; Radio medio de la Tierra, R_T = 6,37.10^6 m

a) La ley de los periodos, escrita para este satélite, es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_J}r^3 \qquad (1)$$

donde T = 9 h 50' = 35400 s es el periodo; M_J = 320 M_T es la masa de Júpiter, 320 veces mayor que la de la Tierra. De aquí podemos obtener el radio orbital del satélite:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_J T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{320GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

y ahí, para operar, recordaremos que la gravedad en la superficie de la Tierra es la conocida 9,8 m/s^2 y se escribe

$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9,8 \quad \Rightarrow \quad GM_T = 9,8R_T^2$$

así que nos quedará

$$r = \sqrt[3]{\frac{320GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{320.9,8.R_T^2 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{320.9,8.6,37^2.10^{12}.35400^2}{4\pi^2}} = 1,59.10^8 \text{ m}$$

Por otra parte, el radio de Júpiter se obtiene conociendo la relación de volúmenes Júpiter—Tierra:

$$\frac{V_J}{V_T} = 320 = \frac{\frac{4}{3}\pi R_J^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{R_J^3}{R_T^3} \quad \Rightarrow \quad R_J = \sqrt[3]{320}\, R_T = 6,84 R_T = 4,36.10^7 \text{ m}$$

de manera que la altura del satélite sobre la superficie de Júpiter resulta valer

$$h = r - R_J = 1,59.10^8 - 4,36.10^7 = \mathbf{1,15.10^8\ m}$$

b) La velocidad del satélite en órbita circular estacionaria alrededor de Júpiter, con el radio r calculado ya, resulta inmediata:

$$v = \sqrt{G\frac{M_J}{r}} = \sqrt{G\frac{320\, M_T}{r}} = \sqrt{320\frac{9,8 R_T^2}{r}} = \sqrt{320\ \frac{9,8.6,37^2.10^{12}}{1,59.10^8}} = \mathbf{28289,7\ m/s = 28,3\ km/s}$$

JUNIO 03

C1.– Suponiendo un planeta esférico que tiene radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, calcule:

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.

b) La velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta, si la velocidad de escape desde la superficie terrestre es 11,2 km/s.

Datos: Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, g = 9,81 m/s²

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se escribe generalmente

$$g = G\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

donde M es la masa del planeta y R su radio. Aceptando que la densidad del planeta es constante, y su valor es ρ, podemos modificar esa expresión, ya que la masa del planeta

$$M = \rho V = \rho\ \frac{4}{3}\pi R^3$$

llevada a (1) deja

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\rho\pi R^3}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad (2)$$

expresión que podemos usar para el planeta P y la Tierra T:

Para el planeta $g_P = \frac{4}{3}\pi G\rho_P R_P$ (3); Para la Tierra $g_T = \frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T$ (4)

así que, dividiendo miembro a miembro, tenemos la relación entre las intensidades gravitatorias respectivas:

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi G\rho_P R_P}{\frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T} = \frac{\rho_P R_P}{\rho_T R_T} = \frac{R_P}{R_T} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad g_P = \frac{g_T}{2} = \frac{9,81}{2} = \mathbf{4,91\ m/s^2}$$

b) La velocidad de escape desde la superficie terrestre es

$$v_e^T = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{2G\ \frac{\rho_T\frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_T R_T^2} \qquad (5)$$

escrita en función de la densidad y el radio terrestres. De modo análogo, la velocidad de escape desde el planeta es

$$v_e^P = \sqrt{2G\frac{M_P}{R_P}} = \sqrt{2G\ \frac{\rho_P\frac{4}{3}\pi R_P^3}{R_P}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_P R_P^2} \qquad (6)$$

de manera que, dividiendo miembro a miembro de nuevo,

$$\frac{v_e^P}{v_e^T} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_P R_P^2}}{\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho_T R_T^2}} = \sqrt{\frac{\rho_P R_P^2}{\rho_T R_T^2}} = \frac{R_P}{R_T} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v_e^P = \frac{v_e^T}{2} = \frac{11,2}{2} = \mathbf{5,6\ km/s}$$

JUNIO 03

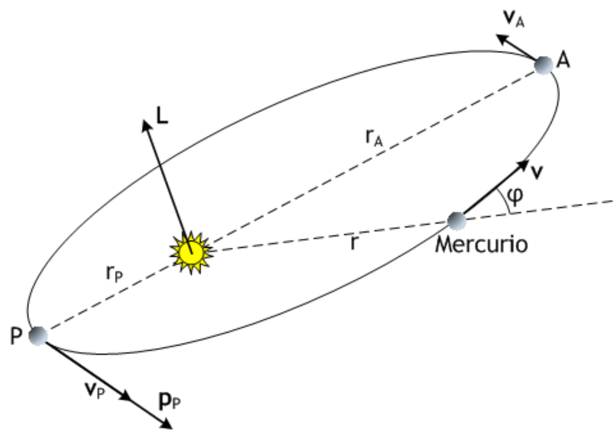
A1.– Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio su distancia al Sol es de $6{,}99.10^{10}$ m, y su velocidad orbital es de $3{,}88.10^{4}$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4{,}60.10^{10}$ m.

a) **Calcule la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.**
b) **Calcule las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en el perihelio.**
c) **Calcule el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.**
d) **De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, digánse cuáles son iguales en el afelio.**

Datos: **Masa de Mercurio: $3{,}18.10^{23}$ kg; Masa del Sol: $1{,}99.10^{30}$ kg;**
Constante de Gravitación Universal: $6{,}67.10^{-11}$ N.m²/kg²

a) El momento angular de Mercurio en su giro orbital alrededor del Sol es un vector **L** constante, perpendicular al plano orbital. Podemos escribir el módulo de **L** en cualquier punto de la órbita según

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}| = m\,|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = m\,v\,r\,\operatorname{sen}\varphi$$



donde φ es el ángulo entre los vectores **r** y **v**, variable según la posición del planeta. En los puntos singulares **perihelio** y **afelio** los vectores **r** y **v** resultan perpendiculares, φ = 90°, y su seno es 1. Así, es particularmente sencillo escribir el módulo de **L** en esos puntos, ya que resulta

$$L = M\, r_A\, v_A = M\, r_P\, v_P$$

donde M es la masa de Mercurio y r_A, r_P, v_A, v_P las distancias al Sol y velocidades de Mercurio en el afelio y perihelio, respectivamente. Conocidas ambas distancias y la velocidad en el afelio resulta inmediato obtener la velocidad en el perihelio:

$$v_P = \frac{r_A\, v_A}{r_P} = \frac{6{,}99.10^{10}\ \text{m} \,.\, 3{,}88.10^{4}\ \text{m/s}}{4{,}60.10^{10}\ \text{m}} = \mathbf{5{,}90.10^{4}\ m/s}$$

b) Las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en el perihelio pueden hallarse de forma inmediata con los datos disponibles. En efecto, la energía cinética se tiene a partir de la masa y la velocidad del planeta:

$$E_c^{Perihelio} = \frac{1}{2} M v_P^2 = \frac{1}{2}\, 3{,}18.10^{23}\ \text{kg} \,.\, (5{,}90.10^{4}\ \text{m/s})^2 = \mathbf{5{,}53.10^{32}\ J}$$

y la energía potencial del par Mercurio–Sol, en todo caso, se consigue con

$$E_p^{Perihelio} = -G\frac{M_{SOL}\, M}{r_P} = -6{,}67.10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}\, \frac{1{,}99.10^{30}\ \text{kg}.3{,}18.10^{23}\ \text{kg}}{4{,}60.10^{10}\ \text{m}} = \mathbf{-\,9{,}18.10^{32}\ J}$$

Finalmente, la energía mecánica (constante) de Mercurio es la suma de cinética y potencial en cualquier lugar, por ejemplo, en el perihelio:

$$E = E_c^{Perihelio} + E_p^{Perihelio} = 5{,}52.10^{32}\ \text{J} - 9{,}18.10^{32}\ \text{J} = \mathbf{-\,3{,}66.10^{32}\ J}$$

Aprovechemos para precisar algunas cuestiones fundamentales, relacionadas con las posibles confusiones entre órbitas circulares y elípticas. En estas últimas, como la que tratamos en este ejercicio, **no se cumplen** ciertas expresiones relativas a las energías cinética, potencial y total del satélite, **que sí funcionan** en órbitas circulares: por ejemplo, la energía cinética es la mitad, cambiada de signo, de la energía potencial. Esto, como acabamos de calcular, no es cierto en una órbita elíptica. Tampoco sucede que la energía total y la cinética tengan el mismo valor, salvo signo, como pasa de hecho en las órbitas circulares.

c) El momento lineal de Mercurio en el perihelio es tangente a la trayectoria en ese lugar, como muestra la figura. Su módulo es un sencillo producto de masa por velocidad en ese punto:

$$p^{Perihelio} = M v_P = 3{,}18.10^{23}\ \text{kg} \,.\, 5{,}90.10^{4}\ \text{m/s} = \mathbf{1{,}88.10^{28}\ kg\ m\ s^{-1}}$$

y no es un invariante en el movimiento del planeta: el momento lineal **cambia** constantemente, y lo hace tanto en dirección, para mantenerse tangente a la trayectoria en cada instante, como en módulo, ya que la rapidez de Mercurio no es constante; cabe destacar en ese sentido, como ejemplo, que en el perihelio Mercurio se mueve más rápidamente que en el afelio, para que pueda cumplirse la ley de las áreas.

En cambio, el momento angular de Mercurio en el perihelio tendrá el mismo valor que en cualquier otro lugar: es un vector invariante. Su módulo, calculado en el perihelio, es

$$L = M r_P v_P = 3{,}18.10^{23}\ \text{kg} \,.\, 4{,}60.10^{10}\ \text{m} \,.\, 5{,}90.10^{4}\ \text{m/s} = \mathbf{8{,}63.10^{38}\ kg\ m^2\ s^{-1}}$$

d) En realidad ya hemos contestado a esto. Podemos resumir diciendo que las únicas magnitudes invariantes son el **momento angular** y la **energía mecánica total**, mientras que la velocidad de Mercurio, su momento lineal, su energía cinética o su energía potencial varían de punto a punto, y toman diferentes valores en el afelio y en el perihelio. Procede recordar que **L** es invariante porque la fuerza gravitatoria solar es una **fuerza central**, y que la energía total es invariante porque la fuerza gravitatoria solar es una **fuerza conservativa**.

SEPTIEMBRE 03

A1.– Un satélite artificial de 100 kg de masa se encuentra girando alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7100 km de radio. Determine:

a) El periodo de revolución del satélite.

b) El momento lineal y el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

c) La variación de energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta esa posición.

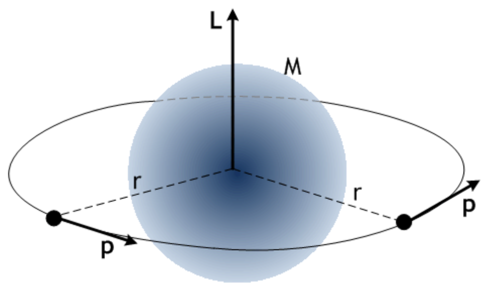
d) Las energías cinética y total del satélite.

Datos: Masa de la Tierra, M_T = 5,98.10^{24} kg; Radio de la Tierra, R_T = 6,37.10^6 m; Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg^{-2}

a) Una vez más, una órbita circular. La adaptación de la tercera ley de Kepler a estas órbitas sencillas permite hallar con facilidad el periodo de revolución, conocido el radio de la órbita:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \qquad \Rightarrow \qquad T = 4\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 4\pi \sqrt{\frac{(7100.10^3\ \text{m})^3}{6,67.10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}.\ 5,98.10^{24}\ \text{kg}}} = 11903,75\ \text{s} = \mathbf{3\ h\ 18\ min\ 23,8\ s}$$

b) El momento lineal es tangente a la órbita en cada posición del satélite, como puede verse en la figura. Ahora bien, el giro del satélite es **uniforme** en la órbita circular, así que la velocidad lineal v es constante y. como consecuencia, el momento lineal **p** tiene **módulo constante**. Su valor es un sencillo producto de masa por velocidad del satélite en órbita, que calculamos previamente



$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.\ 5,98.10^{24}}{7100.10^3}} = 7495,22\ \text{m/s}$$

así que el momento lineal queda

p = mv = 100 kg . 7495,22 m/s = **7,50.10^5 kg m s^{-1}**

El momento angular es un vector invariante, perpendicular al plano orbital. Su módulo se obtiene fácilmente:

L = mvr = 100 kg . 7495,22 m/s . 71.10^5 m = **5,32.10^{12} kg m^2 s^{-1}**

c) La energía potencial del sistema Tierra–satélite está dada por $E_p = -G\frac{Mm}{r}$

expresión que podemos aplicar primero con el satélite en la superficie de la Tierra:

$$E_p^{\text{Superficie}} = -6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}.\ 100}{6,37.10^6} = -6,26.10^9\ \text{J}$$

y después en la órbita, con el satélite a una distancia r = 7,10.10^6 m del centro de la Tierra:

$$E_p^{\text{órbita}} = -6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}.\ 100}{7,10.10^6} = -5,62.10^9\ \text{J}$$

de modo que, como puede verse, el satélite tiene mayor energía potencial en la órbita. La diferencia que nos piden es una sencilla resta, que ofrece el incremento de energía potencial:

$$\Delta E_p = E_p^{\text{órbita}} - E_p^{\text{Superficie}} = -5,62.10^9 - (-6,26.10^9) = \mathbf{6,4.10^8\ J} = \mathbf{640\ MJ}$$

Esa enorme cantidad de energía ha sido necesaria para levantar el satélite desde el suelo terrestre hasta la órbita. Además, habrá que dotar al satélite de energía cinética orbital (si nos limitamos a levantarlo y dejarlo en reposo, se caerá directamente), así que esos 640 MJ son sólo parte de la energía que gastaremos para poner en órbita al satélite.

d) La energía cinética del satélite puede obtenerse directamente de su velocidad,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}100\ .\ 7495,22^2 = \mathbf{2,81.10^9\ J}$$

aunque podríamos haber empleado $E_c = G\frac{Mm}{2r}$, o — más rápido aún — recordar que $E_c = \frac{1}{2}E_p$, expresiones válidas en órbitas circulares (pero no en órbitas elípticas o de otro tipo).

En cuanto a la energía total, podemos emplear $E = -G\frac{Mm}{2r}$, o recordar simplemente que $E = -E_c = \frac{1}{2}E_p$

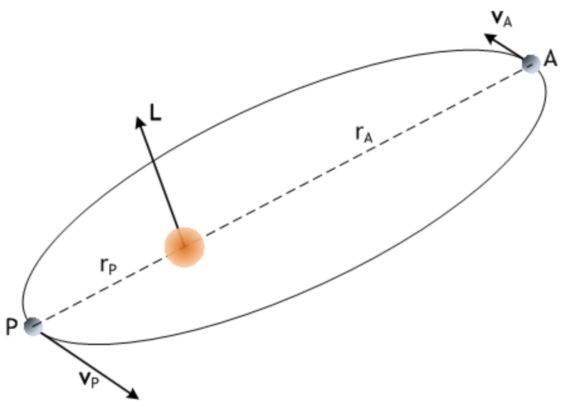
válida para órbitas circulares, así que E = **−2,81.10^9 J** = **−2810 MJ**

MODELO 04

C1.– La velocidad de un asteroide es de 20 km/s en el perihelio y de 14 km/s en el afelio. Determine en esas posiciones cuál es la relación entre:

a) Las distancias al Sol en torno al cual orbitan.

b) Las energías potenciales del asteroide.



a) El momento angular del asteriode en su órbita alrededor del Sol permanece constante: un vector **L** perpendicular al plano orbital, cuya dirección y módulo son invariables. Este módulo puede calcularse de forma particularmente simple en el afelio y en el perihelio, donde resulta

$$L = m\, r_A\, v_A = m\, r_P\, v_P$$

de donde se sigue de inmediato que

$$\frac{r_A}{r_P} = \frac{v_P}{v_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_A}{r_P} = \frac{20}{14} = \mathbf{\frac{10}{7}}$$

la razón entre las distancias al Sol afelio–perihelio es 10 a 7.

b) Las energías potenciales del asteroide varían en función de su distancia al Sol, de acuerdo a

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

siendo M la masa del Sol y m la del asteroide. Obviamente, cuanto más lejos del Sol, mayor resulta la energía potencial, ya que decrece su valor absoluto y se trata de cantidades negativas. La relación entre las energías potenciales en ambos puntos es

$$\frac{E_p^{Afelio}}{E_p^{Perihelio}} = \frac{-G\dfrac{Mm}{r_A}}{-G\dfrac{Mm}{r_P}} = \frac{\dfrac{1}{r_A}}{\dfrac{1}{r_P}} = \frac{r_P}{r_A} = \mathbf{\frac{7}{10}}$$

la inversa de la obtenida para la relación entre distancias al Sol.

MODELO 04

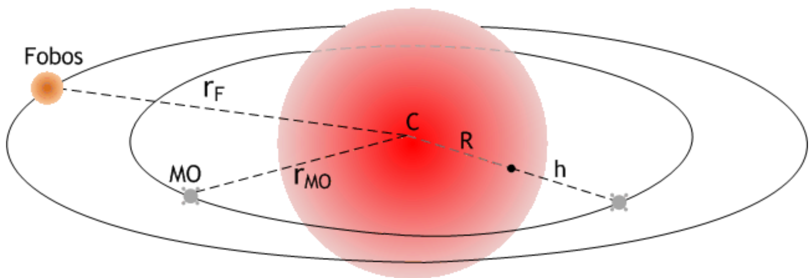
A1.– La sonda espacial Mars Odissey describe una órbita circular en torno a Marte a una altura sobre su superficie de 400 km. Sabiendo que un satélite de Marte describe órbitas circulares de 9390 km de radio y tarda en cada una de ellas 7,7 horas, calcule:

a) El tiempo que tardará la sonda espacial en dar una vuelta completa.

b) La masa de Marte y la aceleración de la gravedad en su superficie.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Radio de Marte, R_M = 3390 km

Fobos es el más cercano a Marte de sus satélites, y su radio y periodo son los que cita el enunciado. En este ejercicio se trata, pues, de establecer relaciones entre las órbitas de Fobos y de Mars Odissey, basadas en las leyes de Kepler, específicamente en la ley de los periodos. En efecto, para objetos orbitando alrededor de Marte esta ley establece



$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \qquad (1)$$

donde M es la masa de Marte, T el periodo de revolución del objeto orbital y r el radio de la órbita circular. Podemos aplicarla a Fobos, con un radio r_F = 9390 km y un periodo T_F = 7,7 horas, y a Mars Odissey, cuyo radio orbital se obtiene sumando el radio de Marte y la altura de la sonda sobre la superficie,

$$r_{MO} = R + h = 3390 + 400 = 3790 \text{ km}$$

y cuyo periodo T_{MO} estamos buscando. Esto nos dará

para Fobos $\quad T_F^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} r_F^3\,;$ $\qquad$ para Mars Odissey $\quad T_{MO}^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} r_{MO}^3$

de modo que sólo hemos de dividir ambas igualdades miembro a miembro para tener

$$\frac{T_F^2}{T_{MO}^2} = \frac{r_F^3}{r_{MO}^3} \qquad \Rightarrow \qquad T_{MO} = \sqrt{\frac{r_{MO}^3}{r_F^3} T_F^2} = \sqrt{\frac{3790^3}{9390^3} 7{,}7^2} = \mathbf{2{,}0\ h}$$

donde debe tenerse presente que las unidades de los radios no plantean problemas, pues se simplificarán, y el periodo T_{MO} aparecerá en las unidades en que se escriba T_F; por tanto, en horas. Además, se ha respetado la precisión de un decimal en el resultado, como en el enunciado.

b) La masa M de Marte puede conseguirse empleando (1) con los datos de Fobos o con los de Mars Odissey. Utilizando a Fobos, escribimos

$$T_F^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_F^3 \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{4\pi^2}{G T_F^2} r_F^3 = \frac{4\pi^2}{6{,}67.10^{-11}.\,(7{,}7.3600)^2} (9390.10^3)^3 = \mathbf{6{,}38.10^{23}\ kg}$$

habiendo tenido precaución con las unidades: el periodo en s, el radio orbital en m, de forma que todas las unidades sean SI.

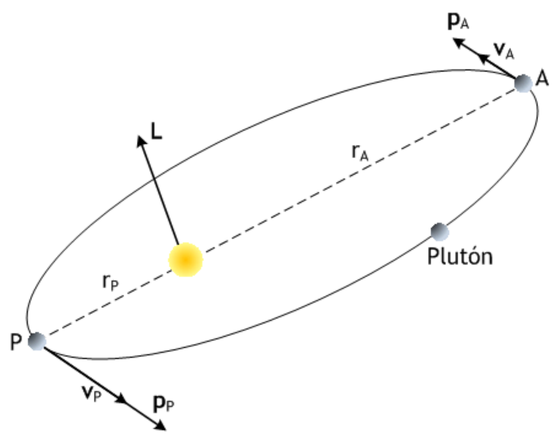
La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se escribe $g = G\frac{M}{R^2}$, siendo M y R la masa y radio del planeta en cuestión. Para Marte quedará $g = G\frac{M}{R^2} = 6{,}67.10^{-11}\frac{6{,}38.10^{23}}{(3390.10^3)^2} = \mathbf{3{,}70\ ms^{-2}}$

poco más de la tercera parte de la gravedad en la superficie terrestre.

JUNIO 04

C2.– Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indique para cada una de las siguientes magnitudes si su valor es mayor, menor o igual en el afelio (punto más alejado del Sol) comparado con el perihelio (punto más próximo al Sol):
a) momento angular respecto a la posición del Sol; b) momento lineal; c) energía potencial; d) energía mecánica.

Las magnitudes invariantes en una órbita elíptica son el **momento angular L** y la **energía mecánica** E, suma de las energías cinética y potencial.



a) el momento angular, como acabamos de decir, **tiene el mismo módulo en el afelio, en el perihelio** y en cualquier otra posición. Esto es una consecuencia, como sabemos, de que la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre Plutón es una fuerza central.

b) La ley de las áreas exige que la velocidad en el perihelio sea mayor que en el afelio, $v_P > v_A$, de modo que el radio vector que une el Sol con Plutón barra áreas iguales por unidad de tiempo en ambas posiciones. Por lo tanto, **el momento lineal en el perihelio es también mayor que en el afelio**, $p_P > p_A$, siendo además $\mathbf{p_P}$ y $\mathbf{p_A}$ vectores de direcciones distintas, ya que han de ser tangentes a la trayectoria en cada lugar.

c) La energía potencial de Plutón depende de su distancia al Sol, de acuerdo a la conocida expresión

$$E_p = -G\frac{M_{Sol}\, M_{Plutón}}{r}$$

de forma que, siendo la distancia r al Sol variable, también lo es la energía potencial. Ya que $r_p < r_A$, y tratándose de cantidades negativas, **la energía potencial es mayor en el afelio** (menos negativa que en el perihelio).

d) La fuerza gravitatoria solar es una fuerza conservativa: en consecuencia, **la energía mecánica tiene el mismo valor en el afelio, en el perihelio** y en cualquier otro lugar de la trayectoria. Conviene recordar, en todo caso, que la expresión familiar

$$E = -G\frac{M_{Sol}\, M_{Plutón}}{2r}$$

no se puede emplear en una órbita elíptica, ya que está deducida para órbitas circulares, salvo que se sustituya el radio r de la órbita circular por el semieje mayor a de la órbita elíptica. Esto es,

$$E = -G\frac{M_{Sol}\, M_{Plutón}}{2a}$$

donde, como se ha visto en algún otro ejercicio, a puede calcularse fácilmente como $a = \frac{r_A + r_P}{2}$

SEPTIEMBRE 04

C1.– La luz solar tarda 8,31 minutos en llegar a la Tierra y 6,01 minutos en llegar a Venus. Suponiendo que las órbitas descritas por ambos planetas son circulares, determine:

a) el periodo orbital de Venus en torno al Sol sabiendo que el de la Tierra es de 365,25 días;

b) la velocidad con que se desplaza Venus en su órbita.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío $c = 3.10^8$ m/s

a) La luz se mueve en el vacío con velocidad $c = 3.10^8$ m/s. Conociendo el tiempo de viaje de la luz solar hasta Venus y hasta la Tierra podemos hallar fácilmente los radios de sus órbitas respectivas. Así,

Radio orbital de Venus, $r_V = ct_V = 3.10^8$ m/s. 6,01.60 s = $1{,}08.10^{11}$ m

Radio orbital de la Tierra, $r_T = ct_T = 3.10^8$ m/s. 8,31.60 s = $1{,}50.10^{11}$ m

y ahora podemos emplear la ley de los periodos para comparar los de Venus y la Tierra: los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios (para órbitas circulares) de las órbitas. Es decir,

$$\frac{T_V^2}{T_T^2} = \frac{r_V^3}{r_T^3} \quad \Rightarrow \quad T_V = T_T\sqrt{\frac{r_V^3}{r_T^3}} = 365{,}25\sqrt{\frac{1{,}08^3}{1{,}50^3}} = \mathbf{223{,}15\ días\ terrestres}$$

b) Conocemos el radio de la órbita de Venus; también tenemos ahora su periodo: de ambas cosas se deduce la velocidad de modo muy sencillo, ya que

$$T_V = \frac{2\pi r_V}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2\pi r_V}{T_V} = \frac{2\pi.1{,}08.10^{11}\ \text{m}}{223{,}15.24.60.60\ \text{s}} = \mathbf{3{,}52.10^4\ m/s}$$

unos 35 km/s. Podemos hacer una estimación positiva acerca de la credibilidad de este resultado, sabiendo que la velocidad orbital de la Tierra es del orden de 30 km/s y que la velocidad de un planeta es mayor cuanto menor es su radio orbital; de este modo, la velocidad de Venus debe resultar mayor que la de la Tierra.

SEPTIEMBRE 04

A1.– Un planeta esférico tiene 3200 km de radio y la aceleración de la gravedad en su superficie es $6{,}2\ m.s^{-2}$. Calcule:

a) La densidad media del planeta y la velocidad de escape desde su superficie.

b) La energía que hay que comunicar a un objeto de 50 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y ponerlo en órbita circular alrededor del mismo, de forma que su periodo sea de 2 horas.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

a) Conocido el radio y la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta es sencillo obtener su masa, ya que

$$g = G\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

donde g es la gravedad superficial, M la masa del planeta y R su radio. Evidentemente, eso equivale a conocer su densidad media, que no es otra cosa que el cociente entre la masa del planeta y su volumen,

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad (2)$$

De (1), para el caso que nos ocupa, tenemos $M = \frac{gR^2}{G} = \frac{6{,}2.(3200.10^3)^2}{6{,}67.10^{-11}} = 9{,}52.10^{23}$ kg

y, llevando datos a (2) $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{9{,}52.10^{23}}{\frac{4}{3}\pi(3200.10^3)^3} = 6{,}94.10^3\ kg/m^3 = \mathbf{6{,}94\ g/cm^3}$

Obviamente, una sencilla combinación de (1) y (2) daría la expresión $g = \frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad (3)$

de la intensidad de campo en la superficie de un planeta esférico, de densidad homogénea ρ y radio R, que nos hubiera dado directamente el valor obtenido más arriba. Sin embargo, el cálculo intermedio de la masa del planeta nos permite emplear ahora la expresión más usual para la velocidad de escape desde la superficie del planeta,

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\frac{6{,}67.10^{-11}\ \text{N m}^2\text{kg}^{-2}.\ 9{,}52.10^{23}\ \text{kg}}{3200.10^3\ \text{m}}} = \mathbf{6299{,}7\ m/s}$$

Por supuesto, podemos también escribir la velocidad de escape en función de la densidad media y del radio del planeta esférico: basta llevar a esta última expresión la masa M despejada de (2):

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\frac{G\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{R}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho R^2}$$

de modo que, como se ve, es bastante simple trabajar indistintamente con la masa M o con la densidad media ρ del planeta, apoyándose en (2). Otra posibilidad, que simplifica notablemente los cálculos, requiere recordar la igualdad $GM = gR^2$, donde g es la gravedad en la superficie del planeta, especialmente indicada en este ejercicio en que los datos de entrada son precisamente g y R. La velocidad de escape se escribiría, entonces

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\frac{gR^2}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2.6{,}2\ ms^{-2}.3200.10^3\ m} = \mathbf{6299{,}2\ m/s}$$

La pequeña desviación en el decimal se debe a los errores acumulados en el resultado intermedio de M; el mejor resultado es el último que se ha escrito.

b) Nos interesa saber qué radio r tendría la órbita cuyo periodo fuese 2 horas. Eso se puede conseguir empleando la ley de los periodos de Kepler, escrita para una órbita circular:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

Para simplificar nuestras operaciones al despejar r, usemos de nuevo $GM = gR^2$, para poner

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 = \frac{4\pi^2}{gR^2} r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{T^2 gR^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(2.3600\ s)^2 .\ 6{,}2\ ms^{-2}.(3200.10^3\ m)^2}{4\pi^2}} = \mathbf{4368{,}5\ km}$$

Ahora podemos hacer cálculos energéticos relativos a esta órbita. Buscamos la diferencia entre la energía total del satélite en órbita con el radio r que acabamos de calcular, y la energía que tenía cuando estaba en reposo sobre la superficie del planeta, exclusivamente potencial, antes del lanzamiento. Estas energías son:

Energía total en la órbita $\quad E^{\text{órbita}} = -G\frac{Mm}{2r} = -\frac{gR^2 m}{2r} = -\frac{6{,}2\ ms^{-2}.(3200.10^3\ m)^2.50\ kg}{2.4368{,}5.10^3\ m} = -3{,}63.10^8\ J$

Energía en el suelo $\quad E_p^{\text{superficie}} = -G\frac{Mm}{R} = -\frac{gR^2 m}{R} = -gRm = -6{,}2\ m/s^2.3200.10^3 m\ .\ 50\ kg = -9{,}92.10^8\ J$

de modo que la energía que habrá comunicar en el lanzamiento es la diferencia entre ambas cantidades. Resulta ser:

$$E^{\text{lanzamiento}} = E^{\text{órbita}} - E^{\text{superficie}} = -3{,}63.10^8\ J - (-9{,}92.10^8\ J) = \mathbf{6{,}29.10^8\ J} = \mathbf{629\ MJ}$$

MODELO 05

C1.— Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Un objeto de masa m_1 necesita una velocidad de escape de la Tierra el doble que la que necesita otro objeto de masa $m_2 = ½\ m_1$.

b) Se precisa realizar más trabajo para colocar en la misma órbita un satélite de masa m_1 que otro de masa $m_2 = ½\ m_1$, lanzados desde la superficie de la Tierra.

a) La velocidad de escape para un objeto lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra es $\quad v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}}$

y no depende, como se ve, de la masa del objeto lanzado: por lo tanto, la afirmación es **falsa**. Eso no significa que la masa del objeto que se lanza no sea relevante, ya que conseguir esa velocidad es más costoso con un objeto de mayor masa; por ejemplo, en el supuesto que nos proponen m_1 tendría doble energía cinética que m_2.

b) En la misma línea que el apartado anterior, la velocidad de ambos objetos, una vez hubiesen sido colocados en la órbita, sería la misma, $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$, independientemente de su masa. Sin embargo, el trabajo necesario para poner en órbita un objeto es la diferencia entre la energía mecánica en la órbita,

$$E^{\text{órbita}} = -G\frac{Mm}{2r}$$

y la energía mecánica cuando está en reposo sobre la superficie terrestre, que es tanto como decir la energía potencial del objeto en la superficie de la Tierra

$$E_p^{\text{Superficie}} = -G\frac{Mm}{R}$$

(nótese la diferencia entre r, radio de la órbita, y R, radio de la Tierra). La diferencia entre ambas cantidades nos da una expresión genérica del trabajo necesario para colocar al objeto en la órbita:

$$W = E^{\text{óbita}} - E_p^{\text{Superficie}} = -G\frac{Mm}{2r} - (-G\frac{Mm}{R}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}) = GMm(\frac{2r-R}{2rR})$$

una cantidad positiva, naturalmente (2r es mayor que R). Puede verse que la masa del objeto es relevante, y que el trabajo es mayor cuanto mayor sea la masa en cuestión, como cabía esperar. En conclusión, esta vez **la afirmación es cierta**: colocar a m_1 en órbita costaría un trabajo doble que hacerlo con m_2.

JUNIO 05

CUESTIÓN 2.– a) Deduzca la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.
b) Demuestre que la energía mecánica del satélite es la mitad de su energía potencial.

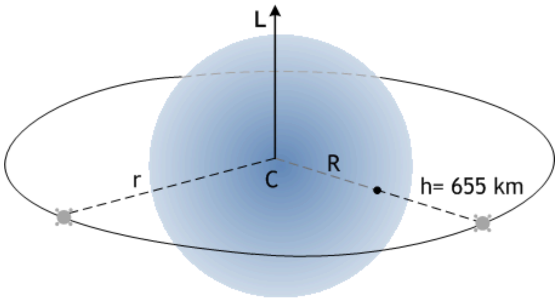
Véase JUNIO **01 C1**.

JUNIO 05

A1.– Un satélite artificial de la Tierra de 100 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 655 km. Calcule:

a) El periodo de la órbita.
b) La energía mecánica del satélite.
c) El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
d) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37.10^6$ m



a) La figura muestra la órbita a una altura h = 655 km sobre la superficie terrestre; por tanto, con un radio orbital

$$r = h + R = 6370 + 655 = 7025 \text{ km}$$

donde R es el radio terrestre. El periodo se tiene de la tercera ley de Kepler, la de los periodos de revolución: para una órbita circular, esa ley se escribe

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

(M es la masa de la Tierra). Las cuentas son

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}.(7025.10^3)^3} = \mathbf{5857{,}82 \text{ s} = 1 \text{ h } 37 \text{ min } 38 \text{ s}}$$

b) La energía mecánica del satélite es

$$E = -G\frac{Mm}{2r} = -6{,}67.10^{-11}\frac{5{,}98.10^{24}.100}{2.7025.10^3} = \mathbf{-2{,}84.10^9 \text{ J} = -2840 \text{ MJ}}$$

c) El momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es un vector **L** perpendicular al plano de la órbita y que permanece constante en módulo y dirección. Su módulo es

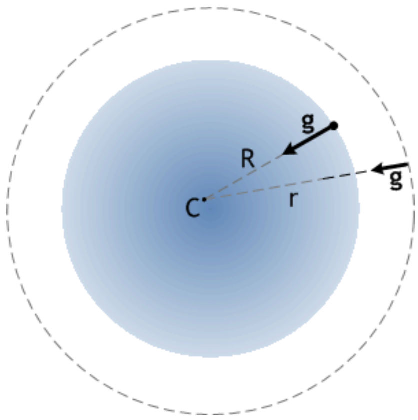
$$L = mvr = m\sqrt{G\frac{M}{r}}\, r = m\sqrt{GMr} = 100\sqrt{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}.7025.10^3} = \mathbf{5{,}29.10^{12} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}}$$

d) La intensidad de campo gravitatorio creado por la Tierra en un punto a distancia r de su centro C es un vector radial, hacia el centro de la Tierra, y de módulo

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

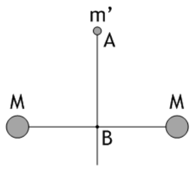
así que la relación que nos piden entre ambos valores es

$$\frac{g_{órbita}}{g_{superficie}} = \frac{G\frac{M}{r^2}}{G\frac{M}{R^2}} = \frac{\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{R^2}} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{6370^2}{7025^2} = \mathbf{0{,}82}$$



SEPTIEMBRE 05

C2.– Dos masas iguales, M = 20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según indica la figura. Una tercera masa, m' = 0,2 kg, se suelta desde el reposo en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a 1 m de la línea que las une (AB = 1 m). Si no actúan más que las interacciones gravitatorias entre estas masas, determine:

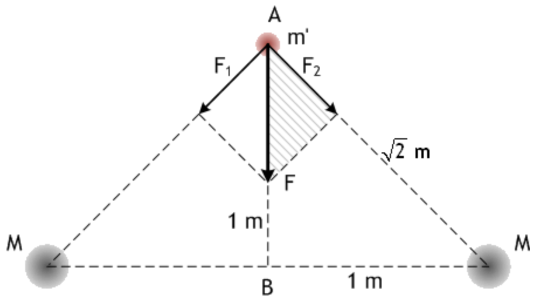


a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la masa m' en la posición A.

b) Las aceleraciones de la masa m' en las posiciones A y B.

Dato: Constante de Gravitación Universal G = $6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a) La primera cuestión aparece representada en la figura. Cuando m' está en A, las fuerzas gravitatorias aplicadas sobre ella por ambas masas M son atractivas y responden a la ley de Newton para interacción entre masas puntuales. Llamándolas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, sus módulos F_1 y F_2 son iguales y miden:



$$F_1 = F_2 = G\frac{Mm}{r^2} = 6,67.10^{-11}\,\frac{20.0,2}{2} = 1,33.10^{-10}\text{ N}$$

donde se ha usado la distancia entre m' y M, que es obviamente $\sqrt{2}$ m. La simetría de la figura, entonces, permite ver con facilidad cómo será la fuerza

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$$

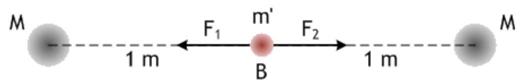
resultante de su suma: llevará la dirección vertical, apuntando hacia B, y su módulo, tomando en consideración el triángulo rayado en la figura, rectángulo e isósceles, quedará

$$F = \sqrt{F_1^2+F_2^2} = 1,33\sqrt{2}.10^{-10} = \mathbf{1,89.10^{-10}\ N}$$

b) La aceleración de m' en el punto A es ahora obvia: irá dirigida verticalmente, hacia abajo, apuntando a B; su módulo será

$$a_A = \frac{F}{m'} = \frac{1,89.10^{-10}}{0,2} = \mathbf{9,45.10^{-10}\ ms^{-2}}$$

En cuanto al punto B, la figura al lado muestra las fuerzas gravitatorias sobre m' en ese momento: apuntan a cada una de las masas M y son, por tanto, opuestas; por razones de simetría evidente miden lo mismo. En consecuencia, en la posición B la fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$ sobre m' es **0**. Naturalmente, ese será también el valor de la aceleración de m' en ese lugar: a_B = **0 m/s²**



SEPTIEMBRE 05

A1.– Desde la superficie terrestre se lanza un satélite de 400 kg de masa hasta situarlo en una órbita circular a una distancia del centro de la Tierra igual a las 7/6 partes del radio terrestre. Calcule:

a) La intensidad del campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite.

b) La velocidad y el periodo que tendrá el satélite en la órbita.

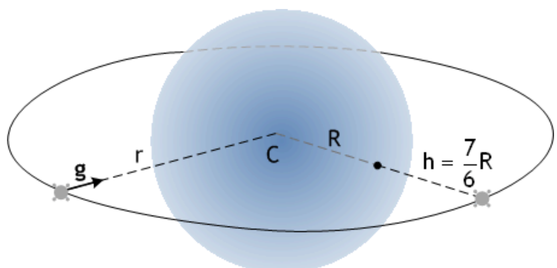
c) La energía mecánica del satélite en la órbita.

d) La variación de la energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta situarlo en su órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, M_T = $5,98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, R_T = $6,37.10^6$ m

a) El satélite queda en órbita con un radio

$$r = \frac{7}{6}R = 7,43.10^6\text{ m}$$



La intensidad de campo gravitatorio en esa órbita es, en cada punto, un vector radial **g** que apunta al centro de la Tierra, como muestra la figura. El módulo es el mismo en todos los puntos de la órbita circular, y su valor es

$$g = G\frac{M}{r^2} = 6,67.10^{-11}\,\frac{5,98.10^{24}}{(\frac{7}{6}6,37.10^6)^2} = \mathbf{7,22\ N/kg}$$

b) La velocidad del satélite depende esencialmente del radio orbital y de la masa de la Tierra. En efecto, recordemos que

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{6,67.10^{-11}\,\frac{5,98.10^{24}}{7,43.10^6}} = \mathbf{7326,9\ m/s}$$

y la tercera ley de Kepler nos da el periodo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(7,43.10^6)^3}{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}} = \mathbf{6371,6\ s = 1\ h\ 46\ min\ 11,6\ s}$$

c) La energía mecánica del satélite en su órbita es la suma de las energías cinética y potencial. En una órbita circular, cada una de las tres es constante, aunque la más trascendente de esas tres invariancias es la de la energía mecánica, que es la única válida en cualquier tipo de órbita. En nuestro caso,

$$E = E_c + E_p = G\frac{Mm}{2r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r} = -6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}.400}{2.7,43.10^6} = \mathbf{-1,07.10^{10}\ J = -10700\ MJ}$$

d) La energía potencial del sistema Tierra–satélite se expresa según $E_p = -G\dfrac{Mm}{r}$, donde r es la distancia al centro de la Tierra. Las energías potenciales, entonces, sobre la superficie de la Tierra y en la órbita se escriben, respectivamente:

$$E_p^{superficie} = -G\frac{Mm}{R} \quad ; \quad E_p^{órbita} = -G\frac{Mm}{r}$$

donde r es el radio orbital y R el radio de la Tierra. Naturalmente, al alejarnos de la superficie r > R y la energía potencial se va haciendo menos negativa, es decir, aumenta. El incremento de la energía potencial al elevar el satélite desde la superficie hasta la órbita es la diferencia entre ambas:

$$\Delta E_p = E_p^{órbita} - E_p^{superficie} = -G\frac{Mm}{r} - (-G\frac{Mm}{R}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}) = GMm\frac{r-R}{rR}$$

es decir $$\Delta E_p = GMm\frac{r-R}{rR} = 6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}.400\ \frac{7,43.10^6 - 6,37.10^6}{7,43.10^6.6,37.10^6} = \mathbf{3,57.10^9\ J = 3570\ MJ}$$

Conviene hacer notar, para evitar una posible confusión, que esta cantidad no sería el trabajo necesario para poner al satélite **en órbita**. Con la energía que acabamos de calcular podríamos levantar el satélite hasta la altura de la órbita y dejarlo allí **con velocidad cero** (naturalmente, se caería de inmediato). Faltaría todavía la energía cinética necesaria, que se calcularía con facilidad sabiendo la masa del satélite y la velocidad orbital calculada en el apartado b): sumada esa energía cinética a los 3570 MJ que acabamos de obtener, tendríamos el trabajo necesario para llevar el satélite desde el reposo en la superficie de la Tierra hasta la situación estacionaria en la órbita.

MODELO 06

C1.– a) Enuncie las tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.
b) Si el radio de la órbita de la Tierra es $1,50.10^{11}$ m y el de Urano $2,87.10^{12}$ m, calcule el periodo orbital de Urano.

a) Véase la teoría.

b) Una aplicación directa de la tercera ley de Kepler, que relaciona los movimientos de los distintos planetas entre sí: para órbitas circulares, los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas. Conociendo los radios orbitales de la Tierra y de Urano, y sabiendo que el periodo de revolución de la Tierra es de 365,25 días, resulta inmediato el periodo de Urano:

$$\frac{T_U^2}{T_T^2} = \frac{r_U^3}{r_T^3} \quad \Rightarrow \quad T_U = \sqrt{\frac{r_U^3}{r_T^3}T_T^2} = \sqrt{\frac{(2,87.10^{12}\ m)^3}{(1,50.10^{11}\ m)^3}(365,25\ \text{días})^2} = \mathbf{30568,64\ \text{días terrestres}}$$

es decir, cerca de 84 años terrestres.

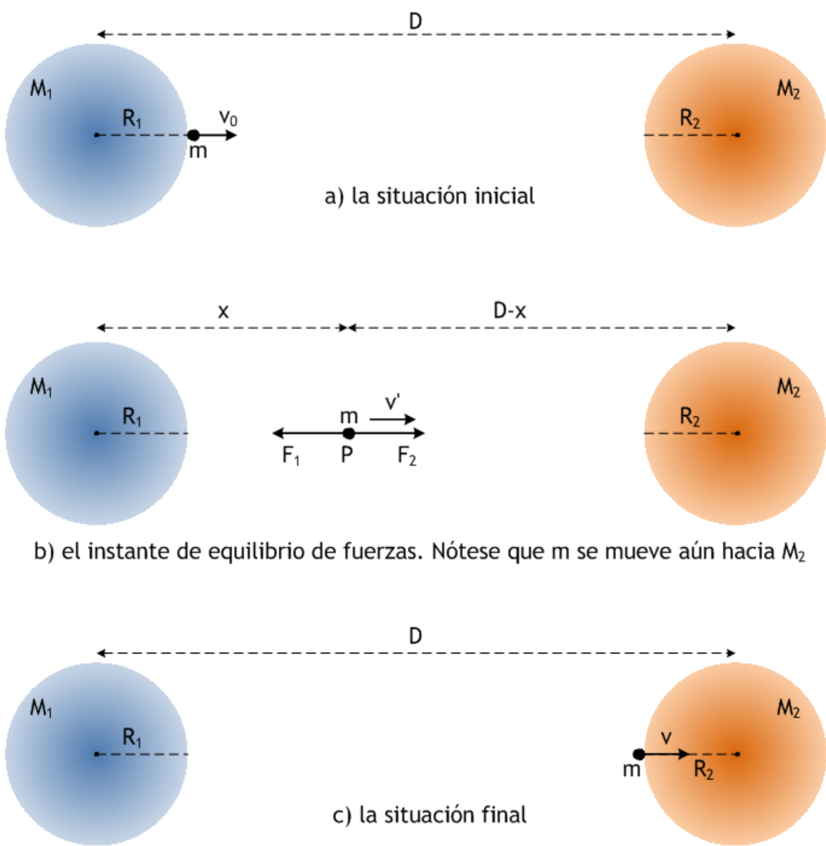
MODELO 06

A1.– Se lanza una nave de masa m = 5.10^3 kg desde la superficie de un planeta de radio $R_1 = 6.10^3$ km y masa $M_1 = 4.10^{24}$ kg, con velocidad inicial $v_0 = 2.10^4$ m/s, en dirección hacia otro planeta del mismo radio $R_2 = R_1$ y masa $M_2 = 2M_1$, siguiendo la línea recta que une los centros de ambos planetas. Si la distancia entre dichos centros es D = $4{,}83.10^{10}$ m, determine:

a) La posición del punto P en el que la fuerza neta sobre la nave es cero.

b) La energía cinética con la que llegará la nave a la superficie del segundo planeta.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}



a) la situación inicial

b) el instante de equilibrio de fuerzas. Nótese que m se mueve aún hacia M_2

c) la situación final

La figura recoge todas las situaciones instantáneas de interés en el problema. En a) podemos ver el momento del lanzamiento desde la superficie de M_1, cuando m sale con velocidad v_0. Sobre la nave hay dos fuerzas gravitatorias, aplicadas por M_1 y M_2, que son de sentido opuesto y hemos llamado F_1 y F_2. La distancia D es mucho mayor que los radios $R_1 = R_2$ de los planetas, lo que va a ser importante en algunos cálculos posteriores.

Parece obvio que al principio $F_1 > F_2$ (de hecho, $F_1 >> F_2$), así que la nave va perdiendo velocidad. Sin embargo, a medida que se aleja de M_1 la fuerza F_1 decrece mientras que F_2 aumenta. Tras un largo camino, se llegará a la situación b), un punto P en que $F_1 = F_2$ y se tiene el equilibrio gravitatorio. Naturalmente, la velocidad v_0 de la nave al salir de la superficie de M_1 debe ser lo bastante grande para, al menos, llegar hasta el punto P.

En una conocida novela de Julio Verne, De la Tierra a la Luna, se plantea la situación de un cohete lanzado desde la Tierra hacia la Luna, que va perdiendo velocidad a medida que asciende hasta que llega a detenerse justo en el punto en que se equilibran las atracciones gravitatorias terrestre y lunar. La nave se "queda quieta", colgada entre Tierra y Luna y sin moverse hacia una u otra, ya que está en reposo y sin fuerza neta que la acelere hacia algún lado. Incidentalmente, esta dramática situación físico-literaria es resuelta por los viajeros a bordo con una aplicación igualmente dramática de la ley de conservación del momento lineal.

Volviendo a nuestro problema: si m llega al punto P de equilibrio con velocidad cero, se quedaría en reposo y en equilibrio ahí, como imaginó Verne. Así que, si va a seguir viaje hacia M_2, es porque en P aún tiene alguna velocidad v' residual hacia M_2. A partir de ahí, la fuerza F_2 se vuelve dominante y m comienza a acelerar hacia M_2 de forma creciente, hasta llegar a su superficie con una velocidad final v. Un poco de reflexión, sin necesidad de cálculos, debería bastar para entender que $v > v_0$, algo que tiene que ver con que $M_2 = 2M_1$.

a) Los cálculos formales para hallar la posición de P son sencillos y se basan en aplicación directa de la ley de Newton para atracción entre masas puntuales (o esféricas, lo que viene a ser igual). La conocida expresión

$$F = G\frac{mm'}{d^2}$$

se aplica en nuestro caso para pedir que $F_1 = F_2$ en el punto P. Llamamos, como se ve en la figura, x a la distancia entre P y el centro de M_1; consiguientemente, D–x es la distancia entre P y el centro de M_2. Así, tendrá que ser

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad G\frac{M_1 m}{x^2} = G\frac{M_2 m}{(D-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_1}{x^2} = \frac{2M_1}{(D-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = \frac{2}{(D-x)^2} \quad \Rightarrow \quad x\sqrt{2} = D - x$$

de modo que $$x = \frac{D}{\sqrt{2}+1} = \frac{4{,}83.10^{10}}{\sqrt{2}+1} = \mathbf{2{,}00.10^{10}\ m}$$

el punto P está a $2{,}00.10^{10}$ m del centro de M_1 y a $2{,}83.10^{10}$ m del centro de M_2.

b) La energía mecánica de un objeto de masa m dentro del campo gravitatorio creado por una masa M es la conocida suma de energía cinética de m y potencial del par m–M,

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

en la que se supone, por cierto, que M no tiene energía cinética (generalmente, el sistema de referencia está en M, así que esto sería correcto). En nuestro problema, sin embargo, intervienen los dos planetas M_1 y M_2 y la nave m. Esto complica las cosas notablemente, ya que tendríamos que pensar en las energías potenciales de **todos los pares de objetos**, es decir, de los pares m–M_1, m–M_2 e incluso del par M_1–M_2. Estas energías potenciales se escribirían

$$E_p^{m-M_1} = -G\frac{M_1 m}{r_1}\,; \qquad E_p^{m-M_2} = -G\frac{M_2 m}{r_2}; \qquad E_p^{M_1-M_2} = -G\frac{M_1 M_2}{D}$$

donde r_1 es la distancia entre m y el centro de M_1 y r_2 la distancia entre m y el centro de M_2. La energía potencial del par M_1–M_2 es evidentemente constante, ya que la distancia D entre los dos planetas es invariable; por esa razón desaparecerá de los cálculos. La energía mecánica de nuestra situación se escribirá, entonces

$$E = E_c + E_p^{m-M_1} + E_p^{m-M_2} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_1 m}{r_1} - G\frac{M_2 m}{r_2}$$

Nótese que no se incluyen términos de energía cinética para M_1 y M_2, que se suponen en reposo, ni la energía potencial del par M_1 y M_2, que se simplificaría en todo caso posteriormente, como ya se ha dicho más arriba. Ahora podemos escribir la conservación de energía mecánica entre a), la situación inicial al salir de M_1, y c), la situación final al llegar a la superficie de M_2:

$$E^{a)} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} - G\frac{M_2 m}{D-R_1} = E^{c)} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_1 m}{D-R_2} - G\frac{M_2 m}{R_2}$$

expresión que, en principio, nos permitiría hacer las cuentas, puesto que todo se conoce ahí salvo la velocidad final v. Sin embargo, fijémonos en los denominadores D–R_1 y D–R_2: como D es mucho mayor (de hecho, cerca de 10^4 veces mayor) que R_1 o R_2, sucede que D–R_1 ≈ D y D–R_2 ≈ D. Así que podemos reescribir nuestra igualdad como

$$E^{a)} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} - G\frac{M_2 m}{D} = E^{c)} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_1 m}{D} - G\frac{M_2 m}{R_2}$$

y ahora, de nuevo por la misma razón D >>> R_1, el término de energía potencial $-G\frac{M_2 m}{D}$ del primer miembro es mucho más pequeño (de hecho, unas 5000 veces) que el término $-G\frac{M_1 m}{R_1}$, así que podemos despreciar aquel frente a éste. Lo mismo sucede con los términos de energía potencial $-G\frac{M_2 m}{R_2}$ y $-G\frac{M_1 m}{D}$ del segundo miembro, donde se puede despreciar $-G\frac{M_1 m}{D}$. Así, reescribimos de nuevo nuestra conservación de energía de manera definitiva:

$$E^{a)} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} = E^{c)} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_2 m}{R_2}$$

para despejar la energía cinética con que llega la nave a M_2:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} + G\frac{M_2 m}{R_2} = \frac{1}{2}mv_0^2 + G\frac{M_1 m}{R_1}$$

donde se ha usado $M_2 = 2M_1$, $R_1 = R_2$. Operando con los datos del enunciado:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1} + G\frac{M_2 m}{R_2} = \frac{1}{2}mv_0^2 + G\frac{M_1 m}{R_1} = \frac{1}{2}5.10^3(2.10^4)^2 + 6{,}67.10^{-11}\frac{4.10^{24}.5.10^3}{6.10^6} = \mathbf{1{,}22.10^{12}\ J = 1{,}22\ TJ}$$

JUNIO 06

A1.– Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. En esta órbita la energía mecánica del satélite es –4,5.10^9 J y su velocidad es 7610 m s^{-1}. Calcule:

a) **El módulo del momento lineal del satélite y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.**

b) **El periodo de la órbita y la altura a la que se encuentra el satélite.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, M_T = 5,98.10^{24} kg; Radio de la Tierra R_T = 6,37.10^6 m

a) Hay diferentes modos de enfocar este ejercicio. Probablemente, lo más obvio sería ir a buscar la masa m del satélite y el radio r de la órbita, a partir de los datos de energía mecánica y velocidad. El radio de la órbita es inmediato, ya que la velocidad orbital

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

está directamente relacionada. Despejando, será

$$r = \frac{GM}{v^2} = \frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}}{7610^2} = 6887,44 \text{ km}$$

y la masa m puede obtenerse de la energía mecánica. En efecto, sabemos que la energía cinética del satélite es igual a la energía mecánica, con el signo contrario:

$$E_c = -E = -\frac{1}{2}E_p$$

relaciones que **son válidas en una órbita circular**. Así que sabemos que la energía cinética del satélite es 4,5.10^9 J, y eso nos permite escribir

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2E_c}{v^2} = \frac{2.4,5.10^9}{7610^2} = 155,41 \text{ kg}$$

Así que ahora no hay dificultad en los valores de p y L:

$$p = mv = 155,41 \text{ kg} .7610 \text{ m/s} = \mathbf{1,18.10^6 \ kgms^{-1}}$$

$$L = mvr = 155,41 \text{ kg} . 7610 \text{ m/s} . 6887,44.10^3 \text{ m} = \mathbf{8,15.10^{12} \ kgm^2 s^{-1}}$$

b) El periodo de la órbita puede obtenerse del radio y la velocidad,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi.6887,44.10^3 \text{ m}}{7610 \text{ m/s}} = 5686,6 \text{ s} = \mathbf{1 \ h \ 34 \ min \ 46,6 \ s}$$

y la altura sobre la Tierra es una obviedad desde que conocemos r:

$$h = r - R = 6887,44 - 6370 = \mathbf{517,44 \ km}$$

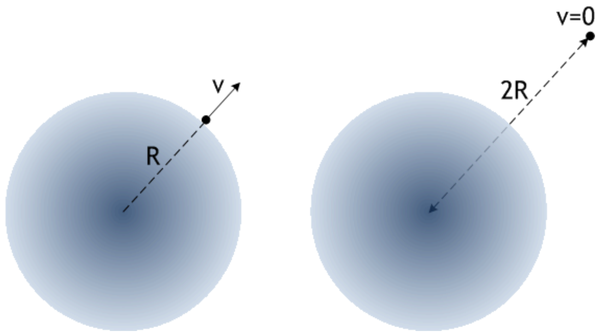
SEPTIEMBRE 06

C1.– a) Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad v. Si se desprecia el rozamiento, calcule el valor de v necesario para que el objeto alcance una altura igual al radio de la Tierra.

b) Si se lanza el objeto desde la superficie de la Tierra con una velocidad doble a la calculada en el apartado anterior, ¿escapará o no del campo gravitatorio terrestre?

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, M_T = 5,98.10^{24} kg; Radio de la Tierra, R_T = 6370 km

a) Las fuerzas gravitatorias son conservativas. Por lo tanto, **la energía mecánica del objeto lanzado se conserva**, y en ello se basa la respuesta al problema: todo lo que hemos de hacer es escribir que la energía mecánica, suma de cinética y potencial, es la misma en el momento en que el objeto es lanzado con velocidad v desde la superficie de la Tierra, a la izquierda de la figura, y en el momento en que, agotada la velocidad, se detiene a una altura R sobre la superficie (es decir, a distancia r = 2R del centro de la Tierra), a la derecha en la figura. Esta igualdad queda:



$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2R}$$

ya que al final no hay energía cinética. Basta entonces despejar v:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{Mm}{2R} + G\frac{Mm}{R} = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}) = G\frac{Mm}{2R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{G\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{R}}}$$

b) Para escapar del campo gravitatorio terrestre se precisa una energía mecánica mínima de 0 J, E≥ 0 J. Si la energía mecánica es 0 J, bastará para alejar el objeto hasta una distancia infinita, aunque con velocidad final cero; si la energía mecánica es mayor que 0 J se alcanzará un alejamiento infinito y aún quedará energía cinética residual. Veamos, pues, cuánta energía mecánica tiene nuestro objeto si se lanza desde la superficie terrestre con una velocidad doble a la anterior:

$$E = \frac{1}{2}m(2v)^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m\,4G\frac{M}{R} - G\frac{Mm}{R} = 2G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R} = G\frac{Mm}{R}$$

una cantidad positiva. En consecuencia, **escapará del campo gravitatorio**. Esto era evidente, ya que la velocidad de lanzamiento es $2\sqrt{G\frac{M}{R}}$, y sabemos que la velocidad de escape (la velocidad mínima para salir del campo) desde la superficie de la Tierra es $v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$, una velocidad menor que aquella. Con la velocidad de escape v_e la energía mecánica es justamente 0 J; con la velocidad 2v que estamos empleando la energía mecánica es mayor que 0 J.

MODELO 07

C1.– Un objeto de 5 kg de masa posee una energía potencial gravitatoria $E_p = -2.10^8$ J cuando se encuentra a cierta distancia de la Tierra.

- **a) Si el objeto a esa distancia estuviera describiendo una órbita circular, ¿cuál sería su velocidad?**
- **b) Si la velocidad del objeto a esa distancia fuese de 9 km/s, ¿cuál sería su energía mecánica? ¿Podría el objeto estar describiendo una órbita elíptica en este caso?**

a) Si el objeto describe una órbita circular su distancia al centro de la Tierra es constante, el radio r de la órbita. Consecuentemente, también lo será la energía potencial gravitatoria

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = -2.10^8 \text{ J} \qquad (1)$$

De otra parte, un objeto en órbita circular tiene una velocidad $$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \qquad (2)$$

de forma que, combinando (1) y (2)

$$v^2 = G\frac{M}{r} \quad \Rightarrow \quad E_p = -G\frac{M}{r}m = -v^2m \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{-\frac{E_p}{m}} = \sqrt{-\frac{-2.10^8}{5}} = \mathbf{6{,}32.10^3\ m/s}$$

tenemos la velocidad orbital que nos piden.

b) Si la velocidad del objeto es de 9 km/s, la conclusión inmediata es que no está en trayectoria circular: en efecto, esa trayectoria requiere el cumplimiento exacto de (2), y eso no sucedería con esta velocidad demasiado alta. Podemos calcular la energía mecánica del objeto sumando las energías cinética y potencial, sabiendo que la última es -2.10^8 J:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}5.9000^2 - 2.10^8 = \mathbf{2{,}5.10^6\ J = 2{,}5\ MJ}$$

y obtenemos un resultado positivo, E > 0. Esto es muy relevante acerca de su posible trayectoria: como sabemos, las órbitas cerradas, circulares o elípticas, requieren que el objeto esté **ligado** a la Tierra, es decir, que tenga **energía mecánica negativa**. Una energía mecánica nula o positiva significa que la trayectoria es parabólica o hiperbólica, que sería nuestro caso. En conclusión, la respuesta es **no puede estar en una órbita elíptica a esa distancia de la Tierra y con esa velocidad**.

Queda para el alumno comprobar que la velocidad máxima que podría llevar el objeto en ese lugar para poder desarrollar una órbita elíptica sería de 8944,27 m/s.

JUNIO 07

C1.– Sabiendo que la aceleración de la gravedad en un movimiento de caída libre en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y que el radio de la Luna es aproximadamente 0,27 R_T (siendo R_T el radio terrestre, calcule:

a) la relación entre las densidades medias $\rho_{Luna}/\rho_{Tierra}$.

b) la relación entre las velocidades de escape de un objeto desde sus respectivas superficies $(v_e)_{Luna}/(v_e)_{Tierra}$.

a) La aceleración de caída libre gravitatoria en la superficie de un planeta (es decir, en puntos muy próximos a esa superficie) es la intensidad de campo en la superficie:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

donde M es la masa del planeta y R su radio. Además, esta masa M puede escribirse en función de la densidad media del planeta,

$$M = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

así que finalmente la gravedad superficial puede ponerse como función de la densidad y el radio del planeta:

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R$$

Aplicando esta expresión a Tierra y Luna, tenemos

$$g_T = \frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T \qquad ; \qquad g_L = \frac{4}{3}\pi G\rho_L R_L$$

y, dividiendo ambas miembro a miembro, junto con $g_L = \frac{1}{6}g_T$ y $R_L = 0{,}27R_T$, queda

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi G\rho_L R_L}{\frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T} = \frac{\rho_L R_L}{\rho_T R_T} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{R_T}{R_L}\frac{g_L}{g_T} = \frac{R_T}{0{,}27R_T}\frac{\frac{1}{6}g_T}{g_T} = \frac{1}{0{,}27.6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1{,}62}} = \mathbf{0{,}62}$$

b) Podemos escribir la velocidad de escape de un planeta en función de su densidad media y de su radio, de forma parecida al modo en que lo hemos hecho con la intensidad de campo en su superficie. En efecto,

$$v_e = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho R^2}$$

de modo que las velocidades de escape de la Tierra y de la Luna son, respectivamente,

$$v_e^T = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T^2} \qquad ; \qquad v_e^L = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_L R_L^2}$$

y, dividiendo miembro a miembro, el cociente pedido:

$$\frac{v_e^L}{v_e^T} = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_L R_L^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho_T R_T^2}} = \sqrt{\frac{\rho_L R_L^2}{\rho_T R_T^2}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}62}\frac{(0{,}27R_T)^2}{R_T}} = 0{,}27\sqrt{\frac{1}{1{,}62}} = \mathbf{0{,}21}$$

JUNIO 07

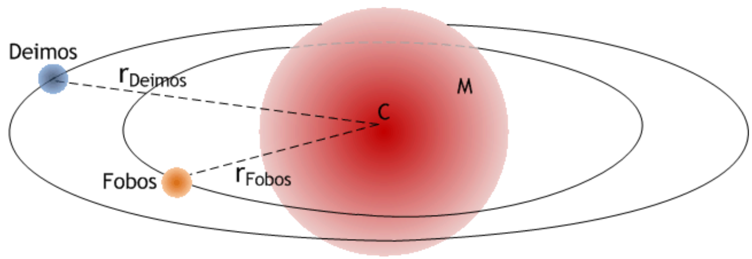
B1.– Fobos es un satélite de Marte que gira en una órbita circular de 9380 km de radio respecto al centro del planeta, y un periodo de revolución de 7,65 horas. Otro satélite de Marte, Deimos, gira en una órbita de 23460 km de radio. Determine:

- **a) La masa de Marte.**
- **b) El período de revolución del satélite Deimos.**
- **c) La energía mecánica del satélite Deimos.**
- **d) El módulo del momento angular de Deimos respecto al centro de Marte.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg^{-2}; Masa de Fobos = 1,1.10^{16} kg; Masa de Deimos = 2,4.10^{15} kg

a) Podemos obtener la masa de Marte a partir de la tercera ley de Kepler, la de los periodos de revolución, aplicada a Fobos, de cuya órbita conocemos radio y periodo. En efecto, para una trayectoria circular esa ley es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$



donde M es la masa central que retiene al satélite, Marte en nuestro caso. Entrando ahí con los valores de r y T para Fobos, despejamos

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = \frac{4\pi^2}{6,67.10^{-11}.(7,65.3600)^2}(9380.10^3)^3 = \mathbf{6,44.10^{23}\ kg}$$

b) De nuevo la ley de los periodos, poniendo en juego las órbitas de Fobos y Deimos: **los cuadrados de los periodos de revolución son proporcionales a los cubos de los radios** (órbitas circulares) **de las órbitas**. Esto es:

$$T^2_{Fobos} = \frac{4\pi^2}{GM} r^3_{Fobos} \quad ; \quad T^2_{Deimos} = \frac{4\pi^2}{GM} r^3_{Deimos}$$

y, dividiendo miembro a miembro,

$$\frac{T^2_{Fobos}}{T^2_{Deimos}} = \frac{r^3_{Fobos}}{r^3_{Deimos}} \quad \Rightarrow \quad T_{Deimos} = T_{Fobos}\sqrt{\frac{r^3_{Deimos}}{r^3_{Fobos}}} = 7,65\sqrt{\frac{23460^3}{9380^3}} = \mathbf{30,26\ h}$$

c) La energía mecánica de Deimos es suma de su energía cinética y potencial. Como sabemos, **esa energía mecánica es constante** y, para una órbita supuestamente circular, se calcula con facilidad

$$E = -G\frac{Mm}{2r} = -6,67.10^{-11}\frac{6,44.10^{23}.2,4.10^{15}}{2.23460.10^3} = \mathbf{-2,20.10^{21}\ J}$$

d) Finalmente, el módulo del momento angular se escribe:

$$\mathbf{L} = m\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad L = mvr$$

de modo que se requiere el cálculo de la velocidad v de Deimos, para traerla a esta expresión. Se obtiene con facilidad conocido el radio y el periodo orbitales, puesto que

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

así que finalmente escribimos

$$L = m\frac{2\pi r}{T}r = \frac{2\pi r^2 m}{T} = \frac{2\pi(23460.10^3)^2.2,4.10^{15}}{30,26.3600} = \mathbf{7,62.10^{25}\ kg\,m^2s^{-1}}$$

SEPTIEMBRE 07

C1.– a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media?;

b) ¿Cuál sería el período de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta?

Datos: Radio de la Tierra, R_T = 6371 km; Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra g = 9,8 m s^{-2}

(Véase **JUNIO 03 C1**, esencialmente idéntico)

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R es la conocida expresión:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Para abordar la cuestión debemos obtener expresiones para la masa M_P y el radio R_P del planeta, en función respectivamente de la masa M_T y el radio R_T de la Tierra. De entrada, sabemos $R_T = 2\ R_P$, directamente en el enunciado. En cuanto a la masa, podemos escribir

$$M_P = \rho_P V_P = \rho_P \frac{4}{3}\pi R_P^3 = \rho_T \frac{4}{3}\pi (\frac{R_T}{2})^3 = \frac{1}{8}\rho_T \frac{4}{3}\pi R_T^3 = \frac{1}{8}M_T$$

donde se ha usado que la densidad de ambos planetas es la misma. Podemos entonces hacer el cálculo de g_P:

$$g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} = G\frac{\frac{1}{8}M_T}{(\frac{R_T}{2})^2} = G\frac{\frac{M_T}{8}}{\frac{R_T^2}{4}} = \frac{1}{2}G\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{1}{2}9{,}8 = \mathbf{4{,}9\ m/s^2} \qquad (1)$$

b) Podemos deducir el periodo de la tercera ley de Kepler. Se escribiría, llamando todavía M_P a la masa del planeta y R_P a su radio:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G M_P} r^3 = \frac{4\pi^2}{G M_P}(R_P + h)^3$$

donde h = 400 km es la altura del satélite sobre la superficie del planeta. Ahora, para poder operar usando los datos proporcionados en el enunciado, debemos referirnos sólo al radio de la Tierra, R_T = 6371 km, pero no tenemos datos acerca de la masa de la Tierra y, por tanto, tampoco del planeta. Sin embargo, el producto GM_P puede obtenerse de (1) con facilidad (una estrategia que hemos empleado en varios problemas anteriores):

$$GM_P = 4{,}9\ R_P^2$$

y esto sí nos permite terminar los cálculos:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G M_P}(R_P + h)^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{4{,}9 R_P^2}(R_P + h)^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{4{,}9(\frac{R_T}{2})^2}(\frac{R_T}{2} + h)^3} = \sqrt{\frac{16\pi^2}{4{,}9.(6371.10^3)^2}(\frac{6371.10^3}{2} + 4.10^5)^3} = \mathbf{6049{,}63\ s}$$

es decir, un periodo de **1 h 40 min 50 s**.

SEPTIEMBRE 07

A1.– Un satélite de masa 20 kg se coloca en órbita circular sobre el ecuador terrestre de modo que su radio se ajusta para que dé una vuelta a la Tierra cada 24 horas. Así se consigue que siempre se encuentre sobre el mismo punto respecto a la Tierra (satélite geoestacionario).

a) ¿Cuál debe ser el radio de su órbita?

b) ¿Cuánta energía es necesaria para situarlo en dicha órbita?

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67.10^{-11} N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra = 5,96.10^{24} kg;
Radio de la Tierra = 6371 km

Sobre satélites geoestacionarios, véase **SEPTIEMBRE 00 C1**, también tiene interés **SEPTIEMBRE 02 A1**

Sol.– a) 42203,3 km; b) Desde el reposo en la superficie terrestre, 1,15.10^9 J

Modelo 08

B1.– Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad de la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

a) Calcule la fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite.
b) Calcule el potencial gravitatorio en la órbita del satélite.
c) Calcule la energía mecánica del satélite en la órbita.
d) ¿Se trata de un satélite geoestacionario? Justifique la respuesta.

Datos: **Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra = $5{,}98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra = $6{,}37.10^6$ m**

a) La velocidad de escape (mínima) del campo gravitatorio terrestre **desde un determinado lugar** es la velocidad que debe tener un objeto, **en ese lugar**, para conseguir una **energía mecánica mínima de 0 J**, que le permitiría eventualmente alejarse de la Tierra de modo indefinido. Recordemos que, convencionalmente, se llama velocidad de escape a la mínima velocidad necesaria para "escaparse" del campo gravitatorio. Así pues, necesitaríamos que la energía cinética del objeto (positiva) fuese, como mínimo, igual a la energía potencial gravitatoria (en valor absoluto) en el lugar en que se produce la discusión

$$E = \frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{Mm}{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_e = \sqrt{2\frac{GM}{r}} \qquad (1)$$

Así, por ejemplo, la velocidad de escape **desde la superficie de la Tierra** se escribe $v_{e,\text{Superficie}} = \sqrt{2\frac{GM}{R}}$, tal como aparece en frecuentes ejercicios. R es el radio de la Tierra, y el valor de esta velocidad es

$$v_{e,\text{Superficie}} = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2\,\frac{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}}{6{,}37.10^6}} = 11190{,}7 \text{ m/s} = 11{,}19 \text{ km/s}$$

algo más de 11 km/s. Nótese que la posición desde la que "escapamos" aparece en (1) en la variable r, distancia al centro de la Tierra, que queda como R para la superficie terrestre. Si nos encontramos a una distancia r tal que la velocidad de escape sea la mitad que la velocidad de escape desde la superficie, entonces debe ser

$$v_e^{\text{órbita}} = \sqrt{2\frac{GM}{r}} = \frac{1}{2} v_e^{\text{superficie}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\frac{GM}{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{1}{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R}} \qquad \Rightarrow \qquad r = 4R$$

es decir, el radio de la órbita es cuatro veces mayor que el radio terrestre. La fuerza de atracción entre Tierra y satélite, de acuerdo a la ley de Gravitación, resulta

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{Mm}{16R^2} = \frac{9{,}8}{16} m = \frac{9{,}8}{16} 200 = \mathbf{122{,}5\ N}$$

donde se ha hecho uso del valor de g en la superficie terrestre, $g = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$.

b) El potencial gravitatorio creado por la Tierra en un punto situado a distancia r de su centro es $V = -G\frac{M}{r}$ J/kg,

es decir, el mismo que crearía una masa puntual M situada en el centro de la Tierra. A la distancia r = 4R el valor de V resulta ser

$$V = -G\frac{M}{r} = -6{,}67.10^{-11}\frac{5{,}98.10^{24}}{4.6{,}37.10^6} = \mathbf{-1{,}57.10^7\ J/kg}$$

c) La energía mecánica del satélite en su órbita es la constante

$$E = E_c + E_p = -G\frac{Mm}{2r}$$

suma de las energías potencial y gravitatoria, y es además la mitad de la energía potencial, que podemos hallar con sencillez a partir del potencial calculado en el apartado anterior,

$$E_p = mV = 200(-1{,}57.10^7) = -3{,}13.10^9 \text{ J} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{1}{2}E_p = \mathbf{-1{,}57.10^9\ J}$$

d) Si fuese un satélite geoestacionario, su periodo orbital sería de 24 h: bastará calcularlo y comprobar si coincide con este valor. Con los datos disponibles, lo más práctico parece usar directamente la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{64R^3}{9{,}8R^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{64R}{9{,}8}} = 2\pi\sqrt{\frac{64.6{,}37.10^6}{9{,}8}} = 40525{,}33 \text{ s} = \mathbf{11\ h\ 15\ min\ 25\,s}$$

de modo que le falta altura para ser geoestacionario. De hecho, el radio de una órbita geoestacionaria es de unos 42200 km (véase **Septiembre 00 C1**) y en nuestro caso r = 4R = 4.6370 = 25480 km. Eso sí, nuestro satélite está cerca de girar con la mitad de la velocidad angular de la Tierra, de modo que cada día pasa dos veces por la misma vertical sobre la superficie terrestre.

JUNIO 08

C2.– Una sonda de masa 5000 kg se encuentra en una órbita circular a una altura sobre la superficie terrestre de $1,5R_T$. Determine:

a) el momento angular de la sonda en esa órbita respecto al centro de la Tierra;

b) la energía que hay que comunicar a la sonda para que escape del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m² kg⁻²; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37.10^6$ m

Para el apartado a), véase **SEPTIEMBRE 08 C1**, inmediatamente a continuación. Para el apartado b), véase **JUNIO 00 A1**.

Sol.– a) $3{,}09.10^{14}$ kg m² s⁻¹; b) $1{,}04.10^{11}$ J

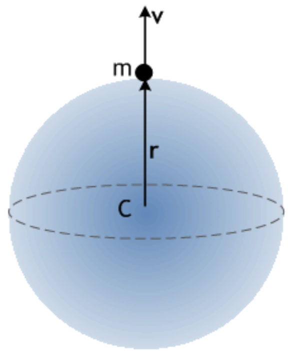
SEPTIEMBRE 08

C1.– Calcule el módulo del momento angular de un objeto de 1000 kg respecto al centro de la Tierra en los siguientes casos:

a) Se lanza desde el polo norte perpendicularmente a la superficie de la Tierra con una velocidad de 10 km/s

b) Realiza una órbita circular alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial a una distancia de 600 km de su superficie.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m² kg⁻²; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37.10^6$ m



a) La figura superior representa el lanzamiento desde el polo norte. Se muestran los vectores posición **r** y velocidad **v** del objeto, ostensiblemente paralelos.

Ahora bien, el momento angular de un móvil está dado por

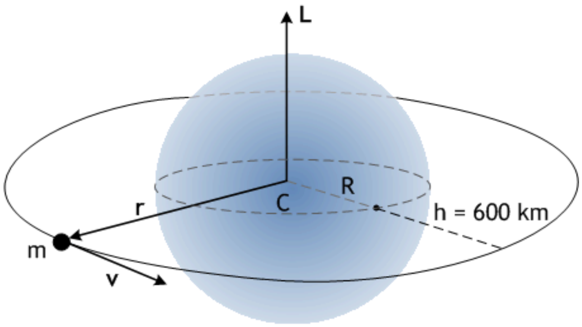
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$$

así que, siendo **r** y **v** paralelos, es inmediato que **L** = **0**, sin que importe la masa del objeto o el módulo de la velocidad con que se lanza. Naturalmente, el módulo de **L** es

$$|\mathbf{L}| = 0 \ \mathbf{kg\ m^2\ s^{-1}}$$

b) Ahora la situación es notablemente diferente: los vectores **r** y **v** están en el plano de la órbita, son **perpendiculares** (gracias a que la órbita es circular), y su producto vectorial no se anulará. De hecho, el vector **L** será perpendicular al plano orbital y permanecerá constante, como hemos visto en muchos ejercicios anteriores. Su módulo será

$$|\mathbf{L}| = L = m v r$$



donde conocemos m = 1000 kg y r = R + h = $6{,}97.10^6$ m. La velocidad es la conocida expresión para una órbita de estas características,

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

y ya podemos calcular el módulo de **L** que nos piden:

$$L = m v r = m\sqrt{G\frac{M}{r}}\,r = m\sqrt{GMr} = 1000\sqrt{6{,}67.10^{-11}.5{,}98.10^{24}.6{,}97.10^{6}} = \mathbf{5{,}27.10^{13}\ kg\ m^2\ s^{-1}}$$

MODELO 09

C1.– a) Enuncie la tercera ley de Kepler y demuéstrela en el caso de órbitas circulares.

b) Aplique dicha ley para calcular la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular con un radio medio de $1{,}49.10^8$ km.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m² kg⁻²

Sol.– a) Véase la teoría; b) $M = 1{,}97.10^{30}$ kg

JUNIO 09

C1.– Un satélite artificial de 500 kg que describe una órbita circular alrededor de la Tierra se mueve con una velocidad de 6,5 km/s. Calcule:

a) La energía mecánica del satélite.

b) La altura sobre la superficie de la Tierra a la que se encuentra.

Datos: **Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};** **Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg**
Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37.10^6$ m

Sol.– a) $-1{,}06.10^{10}$ J; b) 3070,6 km

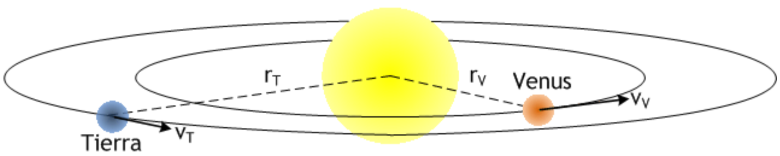
JUNIO 09

B1.– Suponiendo que los planetas Venus y la Tierra describen órbitas circulares alrededor del Sol, calcule:

a) El periodo de revolución de Venus.

b) Las velocidades orbitales de Venus y de la Tierra.

Datos: **Distancia de la Tierra al Sol = $1{,}49.10^{11}$ m;** **Distancia de Venus al Sol = $1{,}08.10^{11}$ m**
Periodo de revolución de la Tierra = 365 días



La práctica totalidad de los planetas del sistema solar giran alrededor del Sol en un plano común, de modo que podemos imaginar las órbitas circulares de Venus y la Tierra como se muestran en la figura, con sus radios respectivos r_V y r_T.

a) Podemos hacer un uso sencillo de la ley de los periodos de Kepler: los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas (cuando son circulares, como es el caso). De ahí,

$$\frac{T_V^2}{T_T^2} = \frac{r_V^3}{r_T^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_V^2}{365^2} = \frac{(1{,}08.10^{11})^3}{(1{,}49.10^{11})^3} \quad \Rightarrow \quad T_V = 365\sqrt{\frac{1{,}08^3}{1{,}49^3}} = \mathbf{225\ días}$$

el periodo de Venus, medido en días terrestres.

b) Las velocidades orbitales pueden deducirse, en ambos casos, de sus periodos y radios orbitales respectivos, En efecto, el periodo de un planeta en su órbita circular puede escribirse

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

así que, para la Tierra, quedará $$T_T = \frac{2\pi r_T}{v_T} \quad \Rightarrow \quad v_T = \frac{2\pi r_T}{T_T} = \frac{2\,\pi.1{,}49.10^{11}\ m}{365.24.3600\ s} = \mathbf{29686{,}5\ m/s = 29{,}69\ km/s}$$

y para Venus, $$T_T = \frac{2\pi r_T}{v_T} \quad \Rightarrow \quad v_V = \frac{2\pi r_V}{T_V} = \frac{2\,\pi.1{,}08.10^{11}\ m}{225.24.3600\ s} = \mathbf{34906{,}6\ m/s = 34{,}91\ km/s}$$

Nótese que, de acuerdo con la teoría, la velocidad de un planeta es mayor en una órbita de menor tamaño: Venus se mueve con mayor velocidad que la Tierra.

SEPTIEMBRE 09

C1.– Razone si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones:

a) El valor de la velocidad de escape de un objeto lanzado desde la superficie de la Tierra depende de la masa del objeto.

b) En el movimiento elíptico de un planeta en torno al Sol la velocidad del planeta en el perihelio (posición más próxima al Sol) es mayor que la velocidad en el afelio (posición más alejada del Sol).

a) **Falso**. La velocidad de escape es $$v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

donde M es la masa de la Tierra y R su radio: la masa m del objeto no aparece en esta expresión.

b) **Cierto**. De acuerdo con la ley de las áreas de Kepler o, lo que significa lo mismo, con la invariancia del momento angular del planeta, debe cumplirse que

$$m v_A r_A = m v_P r_P \quad \Rightarrow \quad v_A r_A = v_P r_P$$

donde m es la masa del planeta, r_A y r_P las distancias al Sol en el afelio y en el perihelio, respectivamente; v_A y v_P las velocidades respectivas en afelio y perihelio. De esta igualdad se sigue que si $r_A > r_P$, como de hecho es el caso, entonces $v_P > v_A$.

MODELO 10

A–P1.– Desde un punto de la superficie terrestre se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de 100 kg que llega hasta una altura de 300 km. Determine:

a) La velocidad de lanzamiento.

b) La energía potencial del objeto a esa altura.

Si, estando a la altura de 300 km, queremos convertir el objeto en satélite de forma que se ponga en órbita circular alrededor de la Tierra:

c) ¿Qué energía adicional habrá que comunicarle?

d) ¿Cuál será la velocidad y el periodo del satélite en esa órbita?

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $M_T = 5,98.10^{24}$ kg
Radio de la Tierra, $R_T = 6370$ km

a) Una altura de 300 km es lo suficientemente grande como para no emplear la aproximación de Tierra plana, en la que se supone g = 9,8 m/s^2, constante e independiente de la altura sobre la superficie terrestre. De hecho, la gravedad a esa altura ha decrecido hasta

$$g = G\frac{M}{r^2} = 6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}}{(6670.10^3)^2} = 8,97 \text{ m/s}^2$$

una diferencia que se acerca a 1 m/s^2 menos que en la superficie, del orden de un 10%: en absoluto despreciable. (véase **SEPTIEMBRE 01 C1**, para una discusión detallada). Por consiguiente, escribiremos la energía mecánica del objeto como

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

y, como sabemos, esa cantidad E es un invariante, ya que las fuerzas gravitatorias son conservativas. Por lo tanto, esta suma valdrá lo mismo en la superficie que en el punto más alto de la trayectoria vertical. Llamando v_0 a la velocidad con que se produce el lanzamiento, y teniendo en cuenta que la velocidad final, a 300 km sobre la suerficie, es cero, tenemos:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 - G\frac{Mm}{R+h} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_0^2 = GM(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}) = GM\frac{h}{R(R+h)} \qquad (1)$$

donde sólo resta operar:

$$v_0 = \sqrt{2GM\frac{h}{R(R+h)}} = \sqrt{2.6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}\frac{3.10^5}{6,37.10^6.6,67.10^6}} = \mathbf{2,37.10^3 \text{ m/s}}$$

para tener la velocidad del lanzamiento, cerca de cinco veces menor que la velocidad de escape, pero aún así una velocidad considerable.

b) La energía potencial del objeto a esa altura es **negativa**, vaya esto por delante, porque así son las energías potenciales gravitatorias. Su valor es

$$E_p^{\text{altura h}} = -G\frac{Mm}{R+h} = -6,67.10^{-11}\frac{5,98.10^{24}.100}{6,67.10^6} = \mathbf{-5,98.10^9 \text{ J}} \qquad (2)$$

y es, en todo caso, mayor que la energía potencial en la superficie de la Tierra, que sería **más negativa**. Podemos, a pesar de ello, manejar cantidades positivas si colocamos el nivel cero de la energía potencial sobre la superficie de la Tierra, en lugar de situarlo a distancia infinita, como implica manejar la expresión $E_p = -GMm/r$. Para desplazar el cero de la energía potencial a la superficie de la Tierra debemos redefinir la energía potencial como

$$\Delta E_p^{\text{altura h}} = -G\frac{Mm}{r} - (-G\frac{Mm}{R}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}) = GMm\frac{h}{R(R+h)}$$

donde r es la distancia del punto de interés al centro de la Tierra y R el radio de la misma. Nótese que lo que calculamos no es otra cosa que la diferencia entre la energía potencial en un punto cualquiera y la energía potencial en la superficie; el incremento de energía potencial al subir hasta la altura h. Nótese también que, comparando con (1), el resultado que obtendremos no es otra cosa que la energía cinética que tenía el objeto al salir

$$\Delta E_p^{\text{altura h}} = GMm\frac{h}{R(R+h)} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}100.(2,37.10^3)^2 = \mathbf{2,81.10^8 \text{ J}} \qquad (3)$$

que no hace sino reflejar la conversión de energía cinética en potencial gravitatoria al subir hasta detenerse a la altura de 300 km. Los resultados recogidos en (2) y (3) son equivalentes; difieren en la colocación del cero para la energía potencial.

c) Llegado a la altura de 300 km, en reposo, el objeto comenzará de inmediato la caída hacia la superficie terrestre. Para que eso no suceda y se mantenga en órbita a esa distancia, se necesitaría la pertinente velocidad orbital (habría que encender algún motor en el objeto, o impulsarlo de alguna manera), cuyo valor conocemos bien

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

de modo que habrá que comunicar al objeto una energía cinética adicional de valor

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{2r}$$

que es la conocida energía cinética orbital. Sabemos, además, que su valor en una órbita circular es la mitad, cambiada de signo, de la energía potencial que ya tenemos calculada en (2). Se concluye, pues, que sería

$$E_c = -\frac{1}{2}E_p = -\frac{1}{2}(-5{,}98.10^9) = \mathbf{2{,}99.10^9\ J}$$

d) La velocidad sería, como ya hemos hecho notar, $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$

pero también podemos deducirla directamente de la energía cinética:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2.2{,}99.10^9}{100}} = \mathbf{7{,}73.10^3\ m/s}$$

y el periodo, conocidos radio orbital y velocidad, es inmediato:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi.6{,}67.10^6}{7{,}73.10^3} = 36161{,}97\ s = \mathbf{10h\ 2min\ 42s}$$

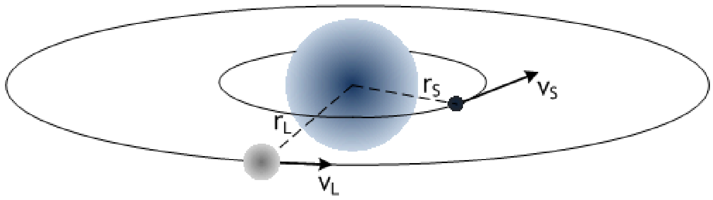
MODELO 10

B–C1.– a) ¿Cuál es el periodo de un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular cuyo radio es un cuarto del radio de la órbita lunar?

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad del satélite y la velocidad de la Luna en sus respectivas órbitas?

Dato: Periodo de la órbita Lunar, T_L = 27,32 días

a) El satélite gira alrededor de la Tierra con un radio orbital



$$r_S = \frac{1}{4}r_L$$

igual a la cuarta parte del radio orbital de la Luna, r_L. De acuerdo con la ley de los periodos de Kepler, podemos poner

$$\frac{T_L^2}{T_S^2} = \frac{r_L^3}{r_S^3}$$

donde T_L = 27,32 días es el periodo lunar y T_S el periodo del satélite. Entrando con estos valores en la ley, queda:

$$\frac{T_L^2}{T_S^2} = \frac{r_L^3}{r_S^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_L^2}{T_S^2} = \frac{(4r_S)^3}{r_S^3} = 64 \quad \Rightarrow \quad T_S = \frac{T_L}{8} = \frac{27{,}32}{8} = \mathbf{3{,}42\ días}$$

b) En cuanto a la relación entre las velocidades, recordemos que la velocidad de un objeto en órbita circular alrededor de la Tierra es

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

donde M es la masa de la Tierra y r el radio orbital. Escribiendo entonces las velocidades v_L y v_S de la Luna y del satélite en función de sus radios orbitales respectivos, y dividiendo miembro a miembro, tenemos

$$\left.\begin{aligned} v_L &= \sqrt{G\frac{M}{r_L}} \\ v_S &= \sqrt{G\frac{M}{r_S}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{v_S}{v_L} = \frac{\sqrt{\frac{1}{r_S}}}{\sqrt{\frac{1}{r_L}}} = \sqrt{\frac{r_L}{r_S}} = \sqrt{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_S = 2v_L}$$

la relación que nos piden: el satélite tiene velocidad doble que la Luna.

JUNIO 96

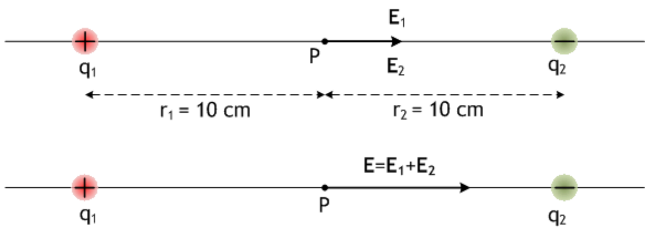
B2.- Se tienen dos cargas eléctricas puntuales de 3 μC cada una, una positiva y la otra negativa, colocadas a una distancia de 20 cm. Calcular la intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico en los siguientes puntos:

a) En el punto medio del segmento del segmento que las une.

b) En un punto equidistante 20 cm de ambas cargas.

Datos: (medio es el vacío) Constante de la ley de Coulomb $K = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}

a) Sea P el punto medio del segmento que une las cargas. Suponemos q_1 positiva, a la izquierda, y q_2 negativa, a la derecha de la imagen. Los campos $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ creados por ambas cargas en P son radiales, como corresponde a cargas puntuales, y coinciden en el sentido, hacia la carga q_2. Miden lo mismo, además, por ser iguales las cargas y estar a la misma distancia de P:

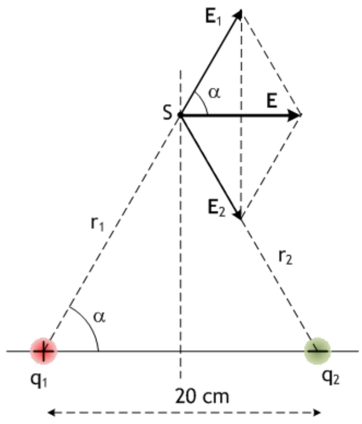


$$E_1 = E_2 = K\frac{q_1}{r_1^2} = K\frac{|q_2|}{r_2^2} = 9.10^9\,\frac{3.10^{-6}}{0{,}1^2} = 27.10^5 \text{ N / C}$$

así que, de acuerdo con el principio de superposición, el campo en P será $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$, de modo que será un vector en la línea que une las cargas, hacia la carga negativa, y se ha dibujado debajo para mayor claridad. Su módulo será la suma de módulos de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$:

$$E = E_1 + E_2 = 27.10^5 + 27.10^5 = \mathbf{5{,}4.10^6 \text{ N / C}}$$

b) Evidentemente, un punto que diste 20 cm de cada carga tiene que estar fuera de la línea que las une. Podemos encontrarlo, en el plano del papel, en un lugar como S, un punto de la mediatriz del segmento entre las cargas.



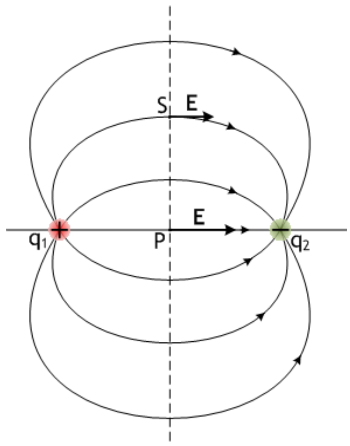
Se muestran las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ en ese punto S: son vectores radiales, hacia fuera el primero de ellos y hacia dentro el segundo, como corresponde a una carga negativa q_2. Los módulos de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ son otra vez iguales, por razones de simetría:

$$E_1 = E_2 = K\frac{q_1}{r_1^2} = K\frac{|q_2|}{r_2^2} = 9.10^9\,\frac{3.10^{-6}}{0{,}2^2} = 6{,}75.10^5 \text{ N / C}$$

y su suma, $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$, llevará la dirección horizontal , paralela a la línea que une las cargas, apuntando hacia la negativa. El módulo se obtiene fácilmente en el paralelogramo de la figura, notando que el ángulo entre $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ será $2\alpha = 120°$, ya que $\alpha = 60°$ es el ángulo del triángulo equilátero formado por las cargas y S. Así, quedará

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 120°} = \sqrt{(6{,}75.10^5)^2 + (6{,}75.10^5)^2 + 2.6{,}75.10^5 .\ 6{,}75.10^5 .(-0.5)} = \mathbf{6{,}75.10^5 \text{ N / C}}$$

el mismo módulo que $\mathbf{E_1}$ o $\mathbf{E_2}$, como seguramente hubiese hecho ver la observación directa de la imagen: el triángulo formado por $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E}$ es también equilátero.



Un comentario para acabar: esta distribución de cargas, como se habrá notado, es un **dipolo eléctrico**. Si recordamos como es el diagrama de líneas de campo de un dipolo, con líneas que nacen en q_1 y van a morir en q_2, podemos confirmar los resultados que acabamos de calcular: puede verse en la figura como las intensidades de campo en P y S, tangentes a la correspondiente línea de campo en cada punto, llevan la dirección que hemos encontrado en los dos apartados anteriores.

SEPTIEMBRE 96

C2.– Define los conceptos de intensidad de campo, potencial, línea de fuerza y superficie equipotencial en un campo de fuerzas gravitatorio. ¿Bajo qué ángulo cortan las líneas de fuerza a las superficies equipotenciales? ¿Por qué?

Véase la teoría.

Sol.– Las líneas de fuerza cortan perpendicularmente a las superficies equipotenciales, debido a que la intensidad de campo es el gradiente (con signo menos) de la energía potencial.

JUNIO 97

C4.– ¿Puede existir diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de una región en la cual la intensidad de campo eléctrico es nula? ¿Qué relación general existe entre el vector intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico? Razona las respuestas.

La relación entre campo eléctrico y potencial es la que existe entre cualquier fuerza conservativa y su correspondiente energía potencial: recuérdese que **E** es la **fuerza que actúa sobre +1 C colocado en un punto**, y que V representa **la energía potencial por culombio** en un punto. En términos matemáticos, el trabajo que hace **E** entre dos puntos A y B se escribe como la **diferencia de potencial** entre ambos

$$\int_A^B \mathbf{E}.\mathbf{dr} = V_A - V_B \qquad (1)$$

de forma que, si **E** = **0** en una región del espacio, la integral del primer miembro será cero: una fuerza nula no hace ningún trabajo, obviamente. Por consiguiente,

$$V_A - V_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V_A = V_B}$$

no puede haber diferencia de potencial entre los dos puntos. Por supuesto, esto no significa que $V_A = V_B = 0$; sino que A y B — como todos los puntos de la zona en que **E** = **0** — **están al mismo potencial**. La implicación más importante de esto es que mover cargas dentro de esa zona no requiere trabajo alguno.

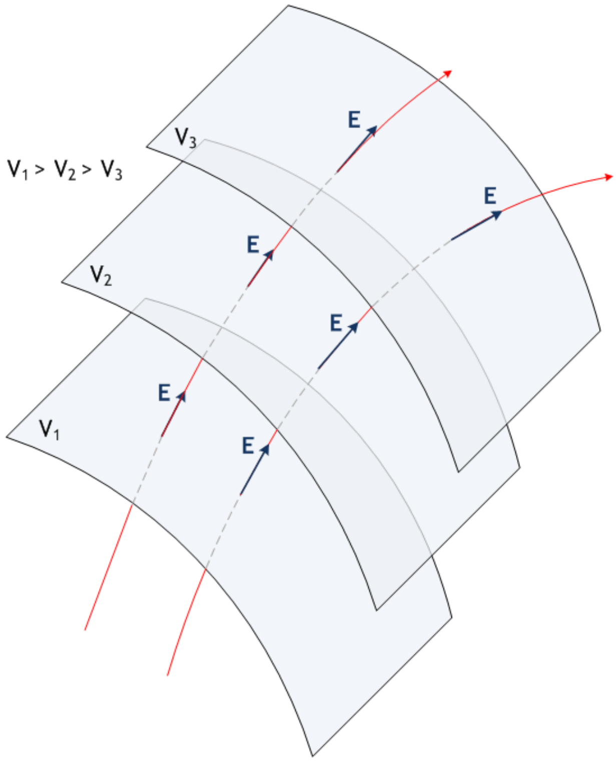
Por lo demás, recuérdese que esta situación aparece siempre **dentro de un conductor**, esté o no cargado: **el interior de un conductor es siempre una zona de E = 0; por lo tanto, de potencial constante.**

La relación entre campo y potencial está recogida en (1). Podemos expresarla también con

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,V = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (2)$$

que es, en términos matemáticos, la inversa de (1): ambas ecuaciones en realidad expresan lo mismo, aunque (1) permite obtener V cuando se conoce **E**, mientras que (2) proporciona **E** cuando se tiene V.

En cualquier caso, el significado de (1) y (2), es decir, la relación entre **E** y V se resume en: **el vector intensidad de campo E** en cualquier punto tiene **la dirección en que** V **varía más rápidamente**, y el **sentido en que** V **decrece.** Entre otras cosas, esto implica la conocida relación de perpendicularidad entre **líneas de campo** y **superficies equipotenciales.** En la figura se muestra una familia típica de superficies de potencial constante V_1, V_2, V_3 en el orden decreciente $V_1 > V_2 > V_3$ y se muestra igualmente una línea de campo típica, que ha de ir cortando ortogonalmente cada superficie equipotencial que va encontrando. Además, el campo **E** apunta en el sentido de los potenciales bajos.



Líneas de campo y superficies equipotenciales

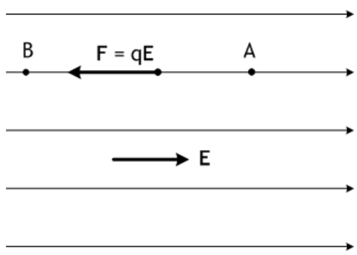
SEPTIEMBRE 97

C3.– Si una carga eléctrica negativa se desplaza en un campo eléctrico uniforme a lo largo de una línea de fuerza bajo la acción de la fuerza del campo:

a) ¿Cómo varía la energía potencial de la carga al pasar ésta desde un punto A a un punto B del campo?

b) ¿Dónde será mayor el potencial eléctrico del campo, en A o en B?

Razona las respuestas.



Campo uniforme

a) Bajo la acción de las fuerzas del campo, es decir, moviéndose de forma **espontánea** dentro del campo, cualquier carga, del signo que sea, lo hará yendo a lugares donde su **energía potencial eléctrica sea más baja**. Distinto sería que la carga se mueva bajo la acción de otras fuerzas, además de **E**; en tal caso, el movimiento **no sería espontáneo**, y podría suceder con un aumento de la energía potencial eléctrica.

Otro modo de explicar esto puede verse en la figura adjunta. Ahí aparecen los puntos A y B entre los que se moverá una carga negativa q, de forma espontánea, bajo la acción la fuerza **F** = q**E** (siendo q negativa, **F** y **E** tienen sentidos distintos). La carga q, pues, se mueve espontáneamente en sentido contrario a las líneas de campo, por tanto, hacia los potenciales eléctricos altos; esto, como sabemos, sucede **en cualquier campo eléctrico**. La energía potencial de la carga se escribirá

$$E_p^A = qV_A \quad \text{(en A)} \quad ; \qquad E_p^B = qV_B \quad \text{(en B)}$$

y la diferencia de energía potencial al ir de A a B será $\Delta E_p = E_p^B - E_p^A = q(V_B - V_A)$

donde el paréntesis expresa una cantidad positiva, puesto que la carga se está moviendo hacia potenciales altos, de modo que $V_B > V_A$. Al multiplicar por una carga q negativa, la variación de energía potencial calculada queda negativa, es decir, ha disminuido, tal y como decíamos más arriba.

b) Aquí no cabe sino insistir en que las **líneas de campo apuntan siempre hacia potenciales bajos**, así que el **punto A de la figura anterior está a potencial más bajo que el punto B**. La carga negativa se mueve, espontáneamente, hacia potenciales altos; por tanto, como se discute en el apartado anterior, hacia energías potenciales más bajas.

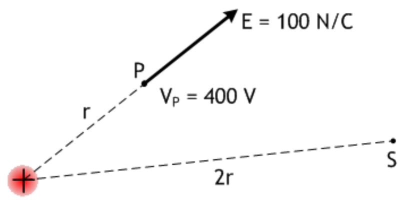
SEPTIEMBRE 97

A2.– A una distancia "r" de una carga puntual "Q", fija en un punto O, el potencial eléctrico es V = 400 V y la intensidad de campo eléctrico es E = 100 N/C. Si el medio considerado es el vacío, determinar:

a) Los valores de la carga "Q" y de la distancia "r".

b) El trabajo realizado por la fuerza del campo al desplazarse una carga de 1 μC desde la posición que dista de O el valor "r" calculado hasta una posición que diste de O el doble de la distancia anterior.

Datos: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}



a) Llamemos P al punto del que nos hablan: si el potencial en P es 400 V, positivo, eso implica que la carga creadora Q es **positiva**. Las expresiones de la intensidad de campo eléctrico E (en módulo) y del potencial V creados por una carga puntual son sencillas y bien conocidas

$$E = K\frac{Q}{r^2} \qquad (1); \qquad V = K\frac{Q}{r} \qquad (2)$$

de forma que basta introducir en ellas los datos relativos al punto P y dividir miembro a miembro:

$$\left.\begin{aligned} 100 &= K\frac{Q}{r^2} \\ 400 &= K\frac{Q}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{100}{400} = \frac{1}{4} = \frac{K\frac{Q}{r^2}}{K\frac{Q}{r}} = \frac{\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \mathbf{4\ m}$$

para tener r, la distancia de P a la carga Q. En cuanto al valor de ésta, podemos volver a cualquiera de las dos expresiones, sabiendo ya r, y despejar. Por ejemplo, en el potencial de P:

$$400 = K\frac{Q}{r} = 9.10^9\frac{Q}{4} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{400.4}{9.10^9} = \mathbf{1{,}78.10^{-7}\ C = 0{,}18\ \mu C}$$

b) Ahora consideramos el desplazamiento de una carga de +1 μC desde el punto P al punto S, distante 2r = 8 m de la carga puntual Q. Como ya sabemos el potencial de P, y ya que el potencial decrece inversamente con la distancia a Q, el potencial de S será 200 V:

$$V_S = K\frac{Q}{2r} = 9.10^9\,\frac{1{,}78.10^{-7}}{8} = \mathbf{200\ V}$$

así que, cuando una carga de +1 μC se mueve desde P hasta S, lo hace en el sentido de los potenciales decrecientes, que es **espontáneo** para una carga positiva. El campo hará, por consiguiente, un trabajo **positivo**:

$$ {}^{\text{campo}}_{+1\,\mu C}W_P^S = q(V_P - V_S) = 10^{-6}(400-200) = \mathbf{2.10^{-4}\ J} $$

SEPTIEMBRE 98

A2.– a) ¿Qué diferencia de potencial debe existir entre dos puntos de un campo eléctrico uniforme para que un electrón que se mueva entre ellos, partiendo del reposo, adquiera una velocidad de 10^6 m s^{-1}? ¿Cuál será el valor del campo eléctrico si la distancia entre estos dos puntos es de 5 cm?

b) ¿Qué energía cinética posee el electrón después de recorrer 3 cm desde el reposo?

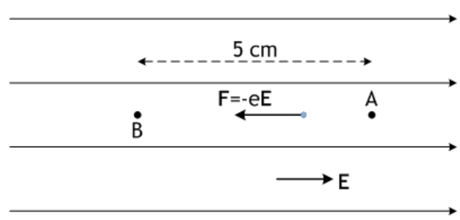
Datos: Masa del electrón, m_e = 9,109.10^{-31} kg; Valor absoluto de la carga del electrón, e = 1,6.10^{-19} C

a) Una carga, en nuestro caso un electrón, puede ser acelerada o frenada por un campo eléctrico. Independientemente de que se trate o no de un campo uniforme, cuando una carga q se mueve en un campo, desde el punto A al punto B, **bajo la acción exclusiva de la fuerza del campo, qE**, su energía total (suma de cinética y potencial) se conserva:

$$ \frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B \qquad (1) $$

donde la energía potencial se escribe $E_p = qV$. Se sigue de ahí que la variación de energía cinética, ΔE_c, es

$$ \Delta E_c = E_c^B - E_c^A = -\Delta E_p = -q\Delta V = q(V_A - V_B) \qquad (2) $$



Téngase presente que $\Delta V = V_B - V_A$ para entender bien el significado de (2). Obsérvese que, si la carga gana energía cinética, el primer miembro es positivo; la igualdad requiere que lo sea el segundo también. Las conclusiones que se pueden sacar de esto son fundamentales y deben entenderse con claridad:

Si q es positiva, la diferencia $V_A - V_B$ debe serlo igualmente, y $V_A > V_B$: la carga se habrá movido **espontáneamente** (eso quiere decir que el campo la ha movido) hacia potenciales bajos.

Si q es negativa, la diferencia $V_A - V_B$ debe serlo igualmente, para que el producto de ambas en el segundo miembro quede positivo, y $V_A < V_B$: la carga se habrá movido **espontáneamente** hacia potenciales altos.

Podemos aplicar todo esto a nuestro caso, un electrón en reposo dentro de un campo eléctrico uniforme. Imaginamos que el campo está dirigido hacia la derecha; el electrón será empujado hacia la izquierda por la fuerza **F** = −e**E**, y se movería en línea recta desde A hacia la izquierda, acelerado por el campo y cada vez más rápido. Supongamos que B es el punto en el que la velocidad alcanza el valor $v_B = 10^6$ m/s; sabemos también que $v_A = 0$ m/s, pues partió del reposo. La aplicación de (2) deja

$$ \Delta E_c = E_c^B - E_c^A = E_c^B = \frac{1}{2}mv_B^2 = -e(V_A - V_B) \qquad (3) $$

de modo que, sustituyendo y operando

$$ \frac{1}{2}9{,}109.10^{-31}.10^{12} = -1{,}6.10^{-19}(V_A - V_B) \qquad \Rightarrow \qquad V_A - V_B = -\frac{9{,}109.10^{-31}.10^{12}}{2.1{,}6.10^{-19}} = \mathbf{-\,2{,}85\ V} $$

así que el potencial de B es más alto, como debía ser. Si queremos responder en términos de $\Delta V = V_B - V_A$, entonces será ΔV = **2,85 V**.

La diferencia de potencial entre dos puntos es **el trabajo que hace el campo al llevar +1 C de uno al otro**. En términos más concretos, es

$$ \int_A^B \mathbf{E}.d\mathbf{r} = V_A - V_B $$

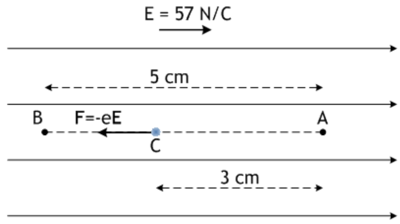
Cuando se trata de un campo uniforme, **E = Cte**, de forma que puede salir de esa integral y el cálculo del trabajo resulta particularmente sencillo:

$$ \int_A^B \mathbf{E}.d\mathbf{r} = \mathbf{E}\int_A^B d\mathbf{r} = \mathbf{E}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = V_A - V_B \qquad (4) $$

ya que es un simple **producto escalar** del campo **E** por el vector desplazamiento Δ**r** de la carga +1 C. En nuestro caso, de acuerdo con la figura, el campo es un vector **E** horizontal y hacia la derecha; el desplazamiento es el vector **AB**, horizontal y hacia la izquierda; el ángulo entre ambos sería π rad = 180º. Conocemos también el segundo miembro, que vale −2,85 V, así que resta sólo despejar E, módulo de **E**:

$$ E.AB.\cos 180^\circ = E.0{,}05.(-1) = -2{,}85 \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{2{,}85}{0{,}05} = \mathbf{57\ N/C} $$

b) La figura muestra la situación a que se refiere el apartado: el electrón está en C, después de haber recorrido 3 cm desde que salió del reposo, en A. Podemos entonces usar (4), entre los puntos A y C, para hallar la diferencia de potencial entre ellos: de nuevo **E** y Δ**r** son vectores de sentido opuesto, pero Δ**r** mide 3 cm ahora:



$$\mathbf{E}\,\Delta\mathbf{r} = V_A - V_C \quad \Rightarrow \quad V_A - V_C = 57\,.\,0{,}03\,.\cos 180^\circ = -1{,}71\ \text{V}$$

y ahora usar (3), entre los puntos A y C:

$$\Delta E_c = E_c^C - E_c^A = E_c^C = \frac{1}{2} m v_C^2 = -\,e\,(V_A - V_C)$$

de modo que resulta $E_c^C = -\,e\,(V_A - V_C) = -1{,}6\,.10^{-19}\,.(-1{,}71) = \mathbf{2{,}74\,.10^{-19}\ J} = \dfrac{2{,}74.10^{-19}\ \text{J}}{1{,}6\,.10^{-19}\ \text{J / eV}} = \mathbf{1{,}71\ eV}$

SEPTIEMBRE **99**

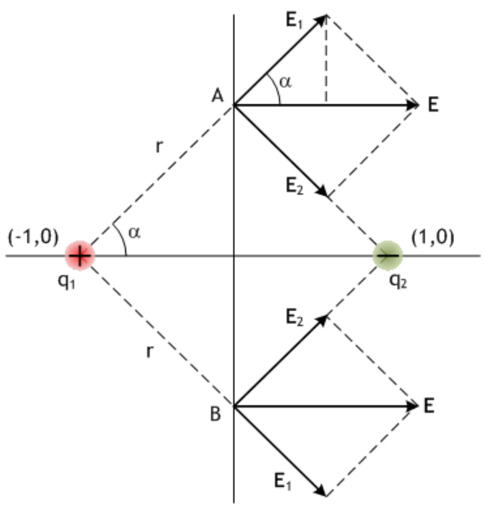
A2.– Se tienen dos cargas eléctricas iguales y de signo opuesto, de valor absoluto 1.10^{-9} C, situadas en el plano XY, en los puntos (–1,0) la carga positiva y (1,0) la carga negativa. Sabiendo que las distancias están dadas en m, se pide:

a) El potencial y el campo eléctrico en los puntos A(0,1) y B(0,–1).

b) El trabajo necesario para llevar un electrón desde A hasta B, interpretando el resultado.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6.10^{-19}$ C; Permitividad del vacío, $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ N^{-1}m^{-2}C^2$

Dos cargas puntuales iguales y de signo contrario constituyen un **dipolo eléctrico** (véase JUNIO **96 B2**). En este caso, se encuentran en el eje X, equidistantes del origen de coordenadas y a 1 m del mismo.



a) La figura muestra la total simetría que existe entre los puntos A y B en los que hemos de calcular la intensidad de campo y el potencial. Es especialmente destacable como la intensidad de campo **E** es la misma en ambos puntos, de forma que bastará que hagamos los cálculos en A.

De otra parte, los puntos A y B están en la mediatriz del segmento que une las cargas q_1 y q_2. Así, el punto A está a la misma distancia r de q_1 y de q_2,

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

así que el módulo de las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ en el punto A es el mismo, y su valor es

$$\left|\mathbf{E}_1\right| = \left|\mathbf{E}_2\right| = E_1 = E_2 = K\frac{q_1}{r^2} = 9.10^9\,\frac{1.10^{-9}}{2} = 4{,}5\ \text{N / C}$$

Ahora debemos fijarnos en que las componentes verticales de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ se anularán, en tanto que las componentes horizontales se sumarán, siendo además iguales. Es muy sencillo calcular cualquiera de esas componentes horizontales, notando que el ángulo α = 45°:

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos\alpha = 4{,}5\,.\cos 45^\circ = 3{,}18\ \text{N / C}$$

de modo que el vector **E** resultante en A tendrá módulo $E = E_{1x} + E_{2x} = 2E_{1x} = \mathbf{6{,}36\ N / C}$

o, en forma vectorial, **E** = 6,36 **i N/C** y, como se ha dicho ya, el campo en el punto B es el mismo que en A.

En cuanto al potencial, sabemos que los puntos de la mediatriz del dipolo tienen potencial cero, ya que están a la misma distancia de las dos cargas. Más concretamente, sería:

$$V_A = V_B = V_1 + V_2 = K\frac{q_1}{r} + K\frac{q_2}{r} = 9.10^9\,\frac{1.10^{-9}}{\sqrt{2}} + 9.10^9\,\frac{-1.10^{-9}}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}} = \mathbf{0\ V}$$

donde V_1 es el potencial que crea q_1 en cualquiera de los puntos A o B, y V_2 el potencial que crea q_2 en cualquiera de esos puntos.

b) El trabajo necesario será **nulo**. En efecto, el trabajo realizado por el campo cuando una carga cualquiera se mueve entre dos puntos A y B del campo, con independencia del camino que siga, es

$$W = \int_A^B q\mathbf{E}.\mathbf{dr} = q(V_A - V_B)$$

donde esta vez sería q = e, la carga de un electrón. Ahora bien, $V_A - V_B = 0$, de suerte que el trabajo hecho por el campo será cero.

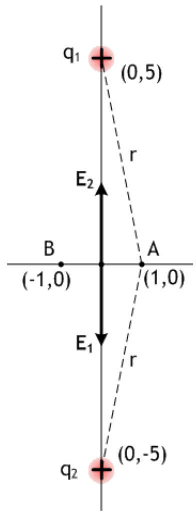
JUNIO 00

C3.– Dos cargas puntuales e iguales de valor 2 μC cada una se encuentran situadas en el plano XY en los puntos (0,5) y (0,–5), respectivamente, estando las distancias expresadas en metros.

a) ¿En qué punto del plano el campo eléctrico es nulo?

b) ¿Cuál es el trabajo necesario para llevar una carga unidad desde el punto (1,0) al punto (–1,0)?

a) Hay un único punto en que se anula el campo creado por dos cargas iguales y del mismo signo: **el punto medio de la línea que une las cargas**. Esto es así siempre, sean cuales fueren las cargas y la distancia entre ellas, y la razón puede entenderse bien en la figura: el centro de coordenadas, (0,0), es el punto medio entre las cargas en nuestro caso; está a la misma distancia de ambas y los campos $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ llevan la misma dirección y sentido opuesto, además tendrán el mismo módulo; por consiguiente, $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} = \mathbf{0}$ en ese punto.



No hay ningún otro punto del campo creado por q_1 y q_2 con intensidad de campo nula. De este modo, el único sitio en que podríamos colocar una carga **en reposo** y dejarla en equilibrio sería (0,0). Ahora bien, se trataría de un equilibrio **inestable**; es decir, si la carga situada en reposo y equilibrio en (0,0) fuese desplazada mínimamente (es decir, por pequeño que fuese el desplazamiento producido) en cualquier dirección y después se la soltase, entonces ya no regresaría a la posición de equilibrio, sino que se alejaría cada vez más de esa posición.

Estas sencillas ideas se extienden a cualquier campo eléctrico, cualquiera que sea la distribución de cargas creadora del campo. En un campo eléctrico no existen puntos de equilibrio estable; si se encuentran puntos de equilibrio (en los que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$), serán de equilibrio inestable.

b) Tampoco aquí serán precisas operaciones. La simetría de la distribución de cargas y de los puntos (1,0) y (–1,0) se ve con claridad en la figura, y muestra que los potenciales de los puntos A y B serán iguales, así que la diferencia de potencial entre ellos será $V_A–V_B = 0$ V. Sabemos que el trabajo **hecho por el campo** para desplazar una carga q del punto A al punto B es

$$W = \int_A^B q\mathbf{E}.d\mathbf{r} = q(V_A - V_B)$$

así que podemos concluir inmediatamente que el trabajo será **nulo**.

SEPTIEMBRE 00

A2.– Los puntos A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero de 2 m de lado. Dos cargas iguales positivas de 2 μC están en A y en B.

a) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto C?

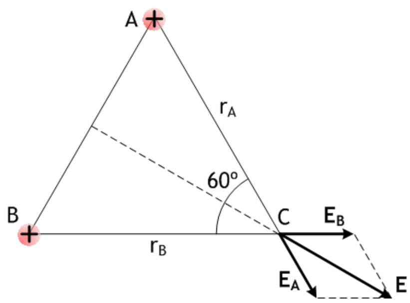
b) ¿Cuál es el potencial en el punto C?

c) ¿Cuánto trabajo se necesita para llevar una carga positiva de 5 μC desde el infinito hasta el punto C si se mantienen fijas las otras cargas?

d) Responder al apartado anterior c) si la carga situada en B se sustituye por una carga de –2 μC.

Datos: Permitividad del vacío, $\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ N^{-1}\ m^{-2}\ C^2$

a) La figura representa la situación de las cargas en A y B, así como las intensidades de campo $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{E}_B$ creadas por estas cargas en el punto C. Ya que las distancias de A y B, respectivamente r_A y r_B, no son sino el lado l del triángulo, y ya que las cargas en A y B son iguales, parece obvio que la simetría exige que los módulos de $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{E}_B$ sean iguales



$$E_A = E_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2.10^{-6}}{4\pi.8{,}85.10^{-12}.2^2} = 4500\ N/C$$

Ahora, principio de superposición: el campo en C es la suma de los campos creados por las dos cargas,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B$$

suma, naturalmente, **vectorial**. El paralelogramo necesario está dibujado en la figura, donde puede verse con claridad que el ángulo entre los vectores $\mathbf{E}_A$ y $\mathbf{E}_B$ es de 60º, igual al ángulo del triángulo en C. Así, por simetría, el campo $\mathbf{E}$ resulta en la dirección de la bisectriz de ese ángulo (y de la mediatriz del lado AB, altura sobre ese lado, mediana también). Su módulo es inmediato:

$$E = \sqrt{E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B \cos 60^\circ} = \sqrt{4500^2 + 4500^2 + 2.4500.4500.0{,}5} = 4500\sqrt{3} = \mathbf{7794{,}23\ N/C}$$

en la dirección y sentido explicados.

b) Principio de superposición: **los potenciales se suman**. Así, el potencial del punto C es la suma de los potenciales creados por las cargas colocadas en A y B; pero estos potenciales, por razones de simetría, son **iguales**: misma carga en A y B, a la misma distancia de C:

$$V = V_A + V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} = 2\frac{2.10^{-6}}{4\pi.8{,}85.10^{-12}.2} = \mathbf{18000\ V}$$

c) Es muy frecuente cometer errores cuando se ha de calcular el trabajo sobre una carga que se mueve en un campo, derivados de no entender con claridad si el trabajo lo hace el campo o lo hacemos nosotros contra las fuerzas que el campo aplica sobre la carga. Una cierta disciplina de cálculo podría evitar estos errores:

Situación: la carga q (con signo!) va a moverse desde P hasta S

Paso 1: ¿Conocemos los potenciales de P y S? Si no es así, deberíamos calcularlos.

Paso 2: El trabajo hecho por el campo, sobre la carga q, que se mueve de P a S es $\,{}^{\text{campo}}_{q}W_P^S = q(V_P - V_S)$

Paso 3: Si ese trabajo sale negativo, la carga se ha movido **contra las fuerzas del campo**. En tal caso, ha habido que moverla con alguna fuerza exterior, opuesta a la del campo: el **trabajo mínimo** (generalmente se refieren siempre a esto) que habrá realizado esa fuerza es el mismo que realizado por el campo, cambiado de signo.

En nuestro caso, q = 5 μC (positiva, irá espontáneamente hacia potenciales bajos). El potencial del punto de llegada, C, es V_C = 18000 V; el potencial de salida en infinito es cero (ese punto está a distancia infinita de A y de B). Así que lo sabemos todo, y podemos ir al paso 2:

El trabajo hecho por el campo será $\,{}^{\text{campo}}_{5\,\mu C}W_\infty^C = q(V_\infty - V_C) = 5.10^{-6}(0-18000) = -0,09\text{ J}$

Como es negativo, se ha requerido trabajo **contra el campo** para transportar la carga. Su valor mínimo será

$$ {}^{\text{contra el campo}}_{5\,\mu C}W_\infty^C = \mathbf{0,09\ J} $$

d) ¿Qué es lo que cambia? El potencial del punto C, que va a ser nulo: en efecto, ahora las cargas en A y B tienen el mismo valor, pero son de signo contrario, de modo que crean en el punto C potenciales positivo (la de A) y negativo (la de B), que se anulan,

$$V_C = V_A + V_B = 0\text{ V}$$

así que, como C está al mismo potencial que infinito, la diferencia de potencial $V_\infty - V_C = 0\text{ V}$

y el trabajo necesario para mover la carga es **cero** esta vez.

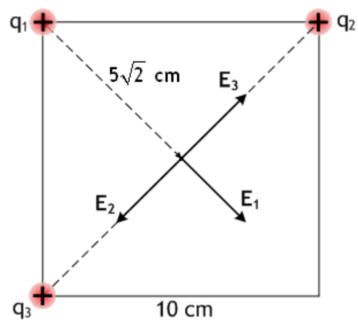
JUNIO 01

B2.– Tres cargas positivas e iguales de valor q = 2 μC cada una se encuentran situadas en tres de los vértices de un cuadrado de lado 10 cm. Determine:

a) El campo eléctrico en el centro del cuadrado, efectuando un esquema gráfico en su explicación.

b) Los potenciales en los puntos medios de los lados del cuadrado que unen las cargas y el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre dichos puntos.

Datos: Constante de la ley de Coulomb en el vacío, $K = 9.10^9\ N\ m^2\ C^{-2}$



a) Las tres cargas q_1, q_2 y q_3 tienen el mismo valor q = 2 μC y se encuentran en tres de los vértices del cuadrado de la figura. Ya que están a la misma distancia del centro C del cuadrado, que es la mitad de la diagonal,

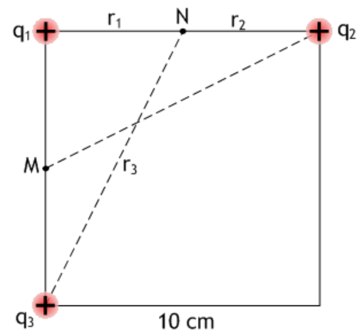
$$r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+10^2} = \frac{1}{2}10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\text{ cm}$$

parece claro que las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E_3}$ creadas por las tres cargas en el punto C van a tener el mismo módulo, tal como aparece recogido en la figura. Además, por razones de simetría obvias, $\mathbf{E_2}$ y $\mathbf{E_3}$ se anularán, $\mathbf{E_2} + \mathbf{E_3} = \mathbf{0}$, de forma que la intensidad de campo resultante en C será

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} + \mathbf{E_3} = \mathbf{E_1}$$

el campo creado por la carga q_1. Este vector lleva la dirección de la diagonal y apunta al cuarto vértice del cuadrado. Su módulo es

$$E = K\frac{q}{r^2} = 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{(5\sqrt{2}.10^{-2})^2} = \mathbf{3,6.10^6\ N/C}$$



b) Los puntos medios de los lados que unen las cargas son M y N. Por razones de simetría evidentes, el potencial en ambos será el mismo, de modo que lo calcularemos en uno de ellos, digamos el punto N. La figura muestra las distancias de las tres cargas al punto N, que hemos llamado r_1, r_2 y r_3; dos de ellas son evidentes

$$r_1 = r_2 = 5\text{ cm}$$

puesto que son la mitad de un lado. La tercera, r_3, es hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 10 cm y 5 cm, como puede verse fácilmente en la figura, de forma que

$$r_3 = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\text{ cm}$$

así que podemos calcular el potencial del punto N, recordando el **principio de superposición**: los potenciales creados por las tres cargas se suman:

$$V_N = V_{1N} + V_{2N} + V_{3N} = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2} + K\frac{q_3}{r_3}$$

donde V_{1N} es el potencial en M creado por q_1, y de manera semejante se entienden los otros sumandos; por supuesto, V_N es el potencial resultante en N. Los cálculos son

$$V_N = 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{5.10^{-2}} + 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{5.10^{-2}} + 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{5\sqrt{5}.10^{-2}} = 3,6.10^5 + 3,6.10^5 + 1,6.10^5 = \mathbf{8,8.10^5\ V}$$

y, como ya se ha dicho, el potencial en M será el mismo por razones de simetría. De este modo, desplazar cualquier carga entre M y N, por ejemplo la unida de carga, **no supondrá ningún trabajo**, por ser nula la diferencia de potencial $V_M - V_N$ entre los dos puntos.

SEPTIEMBRE 01

B2.– Se tienen dos cargas puntuales sobre el eje X, q_1= –0,2 μC está situada a la derecha del origen y dista de él 1 m; q_2= +0,4 μC está a la izquierda del origen y dista de él 2 m.

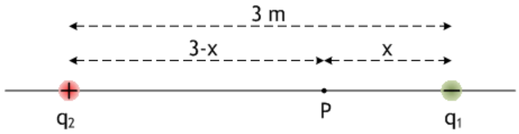
a) ¿En qué puntos del eje X el potencial creado por las cargas es nulo?

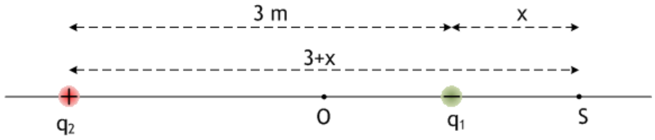
b) Si se coloca en el origen una carga q= +0,4 μC, determine la fuerza ejercida sobre ella por las cargas q_1 y q_2.

Datos: Constante de la ley de Coulomb en el vacío, $K = 9.10^9\ N.m^2\ C^{-2}$

a) El potencial creado en cualquier punto por esta distribución de cargas es, de acuerdo con el principio de superposición, la suma de los potenciales debidos a una y otra:

$$V = V_1 + V_2 \qquad (1)$$





y, ya que una de las cargas es positiva y la otra negativa, puede ocurrir que esa suma sea cero en puntos determinados. Por supuesto, si las dos cargas fuesen del mismo signo, eso no podría suceder en ningún punto.

¿En qué puntos puede resultar, entonces, V = 0? Hay puntos fuera del eje X, desde luego, y es algo más complicado buscarlos. Y hay algún punto, exactamente **dos**, en el eje X, y esos son los que nos piden.

El primero de ellos está **entre las cargas**, dentro del segmento que las une, que contiene el origen O. Como se supone que no sabemos qué punto es, le llamamos P, en la figura de arriba. Suponemos que está a x m de q_1; como la distancia entre q_1 y q_2 es de 3 m, parece claro que P estará a 3—x m de q_2. La condición de V = 0 en este punto requiere que

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{q_1}{x} + K\frac{q_2}{3-x} = 0$$

de donde se sigue $\quad \dfrac{q_1}{x} + \dfrac{q_2}{3-x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{-0,2.10^{-6}}{x} + \dfrac{0,4.10^{-6}}{3-x} = 0 \quad\Rightarrow\quad 0,4x = 0,2(3-x) \quad\Rightarrow\quad x = \mathbf{1\ m}$

así que P está 1 m a la izquierda de q_1; por tanto, 2 m a la derecha de q_2. Parece obvio que se trata justamente del origen de coordenadas.

La otra solución hay que buscarla fuera del segmento, a la derecha de q_1. Sabemos esto porque, ya que q_1 es una carga más pequeña que q_2, el punto de potencial cero tiene que estar más cerca de q_1 que de q_2. Llamamos S a ese punto, y lo suponemos a distancia x de q_1, como aparece en la figura de abajo. Ahora, como puede verse, q_2 queda a distancia 3+x del punto S. La condición de V = 0 en S se escribe

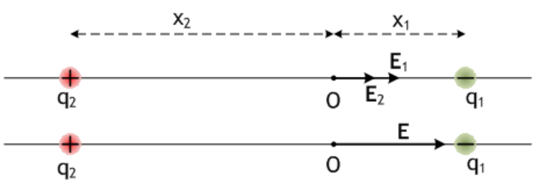
$$V = V_1 + V_2 = K\frac{q_1}{x} + K\frac{q_2}{3+x} = 0$$

de donde se sigue $\quad \dfrac{q_1}{x} + \dfrac{q_2}{3+x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{-0,2.10^{-6}}{x} + \dfrac{0,4.10^{-6}}{3+x} = 0 \quad\Rightarrow\quad 0,4x = 0,2(3+x) \quad\Rightarrow\quad x = \mathbf{3\ m}$

y ahora S está 3 m a la derecha de q_1; por tanto, 6 m a la derecha de q_2. El dibujo no hace justicia al resultado.

b) La fuerza sobre una carga q colocada en un lugar donde la intensidad de campo es **E** resulta

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} \qquad (2)$$



así que necesitamos conocer la intensidad de campo en O. Una vez más, principio de superposición: los campos se suman. En la figura se muestran las intensidades de campo $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ creadas en O por las cargas q_1 y q_2, respectivamente.

Como se ve, ambos vectores llevan la dirección del eje y sentido hacia la derecha. Sus módulos son

$$E_1 = K\frac{|q_1|}{x_1^2} = 9.10^9\,\frac{0,2.10^{-6}}{1^2} = 1800 \text{ N/C} \quad ; \qquad E_2 = K\frac{q_2}{x_2^2} = 9.10^9\,\frac{0,4.10^{-6}}{2^2} = 900 \text{ N/C}$$

de manera que, ya que son vectores de misma dirección y mismo sentido, su suma también estará en el eje y hacia la derecha; su módulo será la suma de los módulos

$$E = E_1 + E_2 = 2700 \text{ N/C}$$

Por lo tanto, al aplicar (2) sobre una carga q = +0,4 μC colocada en O, la fuerza llevará **la dirección del eje X, sentido positivo,** y medirá

$$F = q\,E = 0{,}4.10^{-6}.\ 2700 = \mathbf{1{,}08.10^{-4}\ N} \qquad (\mathbf{F} = 1{,}08.10^{-4}\,\mathbf{i}\ \text{N})$$

Modelo 02

A2.— Un electrón es lanzado con una velocidad de 2.10^6 m/s paralelamente a las líneas de un campo eléctrico uniforme de 5000 V/m. Determine:

a) La distancia que ha recorrido el electrón cuando su velocidad se ha reducido a $0{,}5.10^6$ m/s.

b) La variación de la energía potencial que ha experimentado el electrón en ese recorrido.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6.10^{-19}$ C; Masa del electrón, $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg

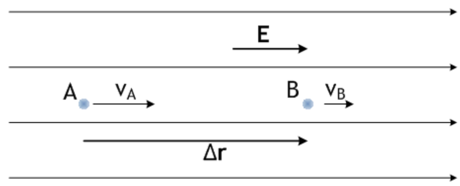
El problema **Septiembre 98 A2** es una buena lectura previa para este ejercicio. Una vez más se plantea el movimiento de una carga — un electrón, esta vez — en un campo. Como sabemos, en cualquier caso (sea uniforme el campo o no), si la carga se mueve entre A y B **bajo la acción exclusiva de las fuerzas del campo**, existe conservación de energía, ya que el campo eléctrico es siempre conservativo. Esto se escribe

$$\Delta E_c = E_c^B - E_c^A = -\Delta E_p = -q\Delta V = q(V_A - V_B) \qquad (1)$$

Además, como se explicó detalladamente en el citado ejercicio, el trabajo hecho por **E** entre dos puntos, en un campo uniforme, es especialmente sencillo,

$$\int_A^B \mathbf{E}.d\mathbf{r} = \mathbf{E}\int_A^B d\mathbf{r} = \mathbf{E}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \mathbf{E}\,\Delta\mathbf{r} = V_A - V_B \qquad (2)$$

y no necesitamos nada más. Entiéndase bien, (2) sólo es correcta en un **campo uniforme**, para poder sacar **E** de la integral. En esta expresión, **E** es el campo y **Δr** el vector desplazamiento de la carga.



Ahora, apliquemos esto a nuestro asunto: el electrón está en A, lanzado hacia la derecha, en la dirección del campo. Se está moviendo hacia potenciales bajos, en el sentido de las líneas del campo, que le estará **frenando**: es obvio que le aplica una fuerza hacia la izquierda.

Así que va perdiendo velocidad, y llegará a detenerse. Cuando pasa por B, su velocidad se ha reducido de forma considerable. Como sabemos la velocidad en A, $v_A = 2.10^6$ m/s, y en B, $v_B = 0{,}5.10^6$ m/s, podemos usar (1) para hallar la diferencia de potencial entre A y B:

$$\Delta E_c = E_c^B - E_c^A = \frac{1}{2}m_e v_B^2 - \frac{1}{2}m_e v_A^2 = \frac{1}{2}9{,}1.10^{-31}(0{,}5^2.10^{12} - 2^2.10^{12}) = -1{,}71.10^{-18}\ \text{J}$$

Es decir, $\Delta E_c = -1{,}71.10^{-18}\ \text{J} = -e(V_A - V_B) \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = \dfrac{1{,}71.10^{-18}}{1{,}6.10^{-19}} = \mathbf{10{,}66\ V}$

y el punto A está a potencial más alto que B; ya lo sabíamos. Ahora podemos usar (2) para hallar la distancia entre A y B: nótese que **E** y **Δr** son esta vez vectores de la misma dirección y sentido; su producto escalar es un simple producto de módulos

$$\mathbf{E}.\Delta\mathbf{r} = V_A - V_B \quad \Rightarrow \quad E.AB = 10{,}66 \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{10{,}66}{5000} = \mathbf{2{,}13.10^{-3}\ m} = \mathbf{2{,}13\ mm}$$

b) La respuesta es inmediata, y está escrita en (1): la variación de energía potencial es la misma que la de energía cinética, pero con signo contrario. De hecho, esto es una obviedad: bajo fuerzas conservativas — como las eléctricas, por ejemplo — la energía total (suma de E_c y E_p) se conserva; lo que pierda una, lo gana la otra. Así que resulta

$$\Delta E_p = -\Delta E_c = \mathbf{1{,}71.10^{-18}\ J}$$

Por supuesto, podemos hacer el cálculo de modo directo, ya que la energía potencial del electrón es $E_p = -eV$, y por tanto la variación es

$$\Delta E_p = E_p^B - E_p^A = -eV_B - (-eV_A) = e(V_A - V_B) = 1{,}6.10^{-19}.10{,}66 = \mathbf{1{,}71.10^{-18}\ J}$$

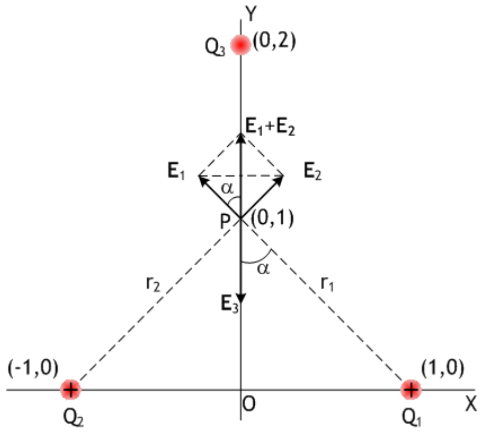
Junio 05

A2.– Tres partículas cargadas Q_1 = +2 μC, Q_2 = +2 μC y Q_3 de valor desconocido están situadas en el plano XY. Las coordenadas de los puntos en los que se encuentran las cargas son Q_1: (1,0), Q_2: (-1,0) y Q_3: (0,2). Si todas las coordenadas están expresadas en metros:

a) **¿Qué valor debe tener la carga Q_3 para que una carga situada en el punto (0,1) no experimente ninguna fuerza neta?**

b) **En el caso anterior, ¿cuánto vale el potencial eléctrico resultante en el punto (0,1) debido a las cargas Q_1, Q_2 y Q_3?**

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9.10^9$ N m² C⁻²



a) En el punto P (0,1) ocupado por una eventual carga q existe un campo creado por las cargas Q_1, Q_2 y Q_3; de acuerdo con el principio de superposición

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} + \mathbf{E_3} \qquad (1)$$

como se muestra en la figura. La fuerza que actúa sobre la carga q puesta en P es **F** = q**E**, de manera que es necesario que **E** = **0** en ese punto para que la fuerza resulte nula, tal como se nos pide.

La observación de la figura ilustra cómo las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ deben tener el mismo módulo, ya que $Q_1 = Q_2$ y ambas cargas están a la misma distancia ($r_1 = r_2$) del punto P. Esa distancia es

$$r_1 = r_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \text{ m}$$

y las intensidades de campo miden, por tanto

$$E_1 = E_2 = K\frac{Q_1}{r_1^2} = K\frac{Q_2}{r_2^2} = 9.10^9\,\frac{2.10^{-6}}{2} = 9000 \text{ N/C}$$

Ahora bien, al sumar los vectores $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ parece obvio que las componentes horizontales, por simetría, serán iguales y de signo contrario, de forma que se anularán. Quedarán las componentes verticales, ambas hacia arriba y de la misma medida, de nuevo por razones de la simetría de la distribución. Esas componentes verticales, que llamaremos E_{1y} y E_{2y}, son las correspondientes proyecciones de los vectores sobre el eje Y, y valen

$$E_{1y} = E_{2y} = E_1\cos\alpha = E_2\cos\alpha = 9000.\frac{1}{\sqrt{2}} = 6363{,}96 \text{ N/C}$$

de manera que la suma $\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$ acaba siendo un vector dirigido hacia Q_3, a lo largo del eje Y, y su módulo es el doble de la proyección que acabamos de calcular:

$$|\mathbf{E_1}+\mathbf{E_2}| = 2E_{1y} = 2E_{2y} = 12727{,}92 \text{ N/C} \qquad (2)$$

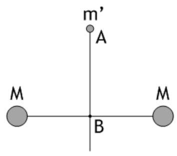
Así, parece claro que si la suma (1) debe ser nula, el vector $\mathbf{E_3}$ debe estar dirigido también a lo largo del eje Y, hacia abajo, y debe tener como módulo la cantidad obtenida en (2). De esto, y ya que la distancia de Q_3 a P es r_3 = 1 m, se puede obtener el valor de Q_3

$$E_3 = K\frac{Q_3}{r_3^2} = 12727{,}92 \text{ N/C} \qquad \Rightarrow \qquad Q_3 = 12727{,}92\,\frac{1}{9.10^9} = +\mathbf{1{,}41\,\mu C}$$

b) El potencial en el punto P es la suma de los potenciales creados por las tres cargas Q_1, Q_2 y Q_3. Ahora que sabemos lo que vale cada una de ellas, y también la distancia de cada una a P, el cálculo es inmediato:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K\frac{Q_1}{r_1} + K\frac{Q_2}{r_2} + K\frac{Q_3}{r_3} = 9.10^9\,\left(\frac{2.10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{2.10^{-6}}{\sqrt{2}} + \frac{1{,}41.10^{-6}}{1}\right) = \mathbf{38183{,}77\ V}$$

SEPTIEMBRE 05



C2.– Dos masas iguales, M = 20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según indica la figura. Una tercera masa, m' = 0,2 kg, se suelta desde el reposo en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a 1 m de la línea que las une (AB = 1 m). Si no actúan más que las interacciones gravitatorias entre estas masas, determine:

a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la masa m' en la posición A.

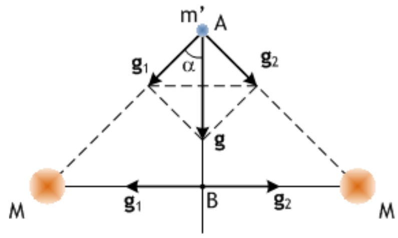
b) Las aceleraciones de la masa m' en las posiciones A y B.

Dato: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m² kg⁻².

a) La fuerza que actúa sobre una masa m en un punto de campo gravitatorio, a menudo llamada "peso" del cuerpo en ese lugar, es la conocida

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{g} \qquad (1)$$

donde **g** es la intensidad del campo gravitatorio en ese punto. En el caso que nos plantean, la intensidad de campo gravitatorio en A, donde está m', será (principio de superposición) la **suma de los campos creados por cada una de los masas M**. En la figura mostramos cómo serán esos vectores, a los que denominaremos $\mathbf{g_1}$ y $\mathbf{g_2}$: se trata de campos radiales, dirigidos hacia la masa que los crea.



$$\mathbf{g} = \mathbf{g_1} + \mathbf{g_2} \qquad (2)$$

Además, los módulos g_1 y g_2 son iguales, por sencillas razones de simetría. Su valor es

$$g_1 = g_2 = G\frac{M}{r^2} = 6{,}67.10^{-11}\,\frac{20}{2} = 6{,}67.10^{-10}\ \text{N/kg}\ (= \text{m/s}^2)$$

donde se ha empleado la distancia r de cualquiera de las masas M al punto A, deducida de la figura

$$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

La suma, como puede apreciarse en la figura, no es difícil: las componentes horizontales de ambos vectores son de sentido opuesto y medirán lo mismo: se anularán. Las componentes verticales, dirigidas ambas hacia abajo y de la misma medida, se reforzarán. En conclusión, el campo **g** en A quedará dispuesto verticalmente y hacia abajo.

Hallamos las componentes verticales de $\mathbf{g_1}$ y $\mathbf{g_2}$, a las que llamaremos g_{1y} y g_{2y}, respectivamente:

$$g_{1y} = g_{2y} = g_1\cos\alpha = g_2\cos\alpha = 6{,}67.10^{-10}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 4{,}72.10^{-10}\ \text{N/kg}$$

y concluimos que el campo en A estará dispuesto verticalmente, hacia B, y medirá el doble de esta última cantidad:

$$g = \mathbf{9{,}43.10^{-10}\ N/kg}$$

La aplicación de (1), ahora, acabará la cuestión: la fuerza sobre la masa m' = 0,2 kg colocada en A será **vertical, apuntando hacia B, y su módulo** será

$$F = m'g = 0{,}2\ .\ 9{,}43.10^{-10} = \mathbf{1{,}89.10^{-10}\ N}$$

b) Ahora hemos de recordar que la intensidad de campo gravitatorio en un punto mide la fuerza que actuaría sobre una masa de 1 kg colocada en ese punto, pero también representa la **aceleración de cualquier objeto masivo que se coloque ahí**. Por tanto, ya que conocemos la intensidad **g** de campo en A, sabemos cuál será la aceleración de m' en ese punto

$$g = \mathbf{9{,}45.10^{-10}\ m/s^2}$$

En cuanto al punto B, el campo gravitatorio se calcula de nuevo aplicando (2): esta vez, ya que se trata del punto intermedio entre las dos masas M, los campos $\mathbf{g_1}$ y $\mathbf{g_2}$ tienen la misma dirección, sentidos opuestos y, por razones de simetría, el mismo módulo, de manera que suman **0**. Consiguientemente, la intensidad de campo en B es cero, y la aceleración de m' cuando pasa por B es

$$g = \mathbf{0\ m/s^2}$$

SEPTIEMBRE 05

C5.– Un protón que parte del reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 10 V. Determine:

a) la energía que adquiere el protón expresada en eV y su velocidad en m/s;

b) la longitud de onda de De Broglie asociada al protón moviéndose con la velocidad anterior.

Datos: Carga del protón, $q_p = 1{,}6.10^{-19}$ C; Masa del protón, $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg; Constante de Planck, $h = 6{,}63.10^{-34}$ J s

a) Un ejercicio que aborda una cuestión muy común, la de cargas aceleradas (o frenadas) por medio de una diferencia de potencial. De manera genérica, el planteamiento debe ser el siguiente: una partícula de masa m y carga q, en un campo eléctrico, tiene una energía que se obtiene sumando energía cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV \qquad (1)$$

donde V es el potencial del punto en el que se encuentre la carga, y v su velocidad en ese lugar. Convendría recordar aquí, una vez más, el sentido físico del potencial eléctrico: en esencia, no es otra cosa que la energía potencial por unidad de carga; de ahí que la energía potencial eléctrica de una carga q se escriba como $E_p = qV$.

De este modo, ya que las fuerzas eléctricas son conservativas, si una partícula de carga q se mueve desde un punto A a un punto B **bajo la acción exclusiva de las fuerzas del campo** (¡esto es fundamental!) **la energía se conserva**. Esto es

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B \qquad (2)$$

independientemente, además, del camino que la partícula haya seguido para ir de A a B. Podemos entonces relacionar la **variación de la energía cinética** de la partícula con la **diferencia de potencial entre los puntos A y B**:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = q(V_A - V_B) = -q\Delta V = -\Delta E_p \qquad (3)$$

donde las expresiones $\Delta E_c = E_c^{final} - E_c^{inicial} = E_c^B - E_c^A$; $\Delta V = V_{final} - V_{inicial} = V_B - V_A$

se entienden, como toda variación de una magnitud, en términos de valor final menos valor inicial. El uso de (3),

$$\Delta E_c = -q\Delta V$$

es muy frecuente, en los cálculos de aceleración o frenado de cargas en un campo eléctrico. La diferencia de potencial entre **llegada** y **salida**, ΔV, se llama **potencial de aceleración, o de frenado**, según los casos: es de aceleración cuando la carga gana energía cinética; es de frenado si sucede lo contrario.

Así, en el problema que nos ocupa, se dice que un protón es **acelerado por una diferencia de potencial de 10 V**. Como va a ganar energía cinética, ΔE_c va a ser positiva, y la observación de (3) muestra que ΔV **tiene que ser negativa**: esto no hace sino confirmar algo que ya sabíamos, y es que un protón — carga positiva — es empujado por un campo eléctrico hacia los potenciales bajos.

Las cuentas darán
$$\Delta E_c = -1{,}6.10^{-19}(-10) = \mathbf{1{,}6.10^{-18}\ J} = \frac{1{,}6.10^{-18}\ \text{J}}{1{,}6.10^{-19}\ \text{J}/\text{eV}} = \mathbf{10\ eV}$$

para la energía cinética ganada por el protón. Como parte del reposo, esa es también la energía cinética final, de modo que la velocidad alcanzada será

$$E_c^{final} = \frac{1}{2}m_p v^2 = 1{,}6.10^{-18}\ \text{J} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2.1{,}6.10^{-18}}{1{,}67.10^{-27}}} = \mathbf{4{,}38.10^4\ m/s}$$

b) La longitud de onda de De Broglie asociada a tal protón es ya inmediata

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_p v} = \frac{h}{\sqrt{2m_p E_c}}$$

y, ya que tenemos la energía cinética del protón, usaremos la última de esas expresiones

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_p E_c}} = \frac{6{,}63.10^{-34}}{\sqrt{2.1{,}67.10^{-27}.1{,}6.10^{-18}}} = \mathbf{9{,}07.10^{-12}\ m}$$

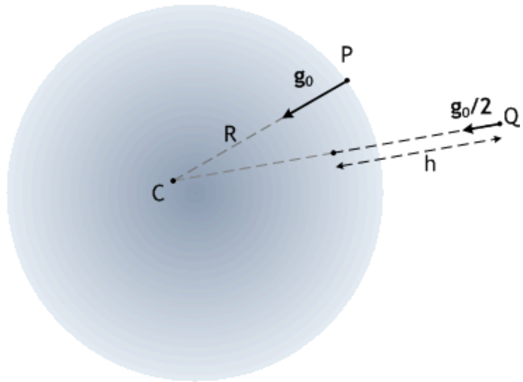
JUNIO 06

C1.– Llamando g_0 y V_0 a la intensidad de campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre respectivamente, determine en función del radio de la Tierra:

a) La altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad del campo gravitatorio es $g_0/2$.

b) La altura sobre la superficie terrestre a la cual la el potencial gravitatorio es $V_0/2$.

a) La figura muestra un punto P sobre la superficie terrestre y la intensidad del campo gravitatorio en ese punto, $\mathbf{g_0}$. Se trata de un vector radial, apuntando al centro de la Tierra, y de módulo



$$g_0 = G\frac{M}{R^2} \qquad (1)$$

donde M y R son la masa y el radio de la Tierra. También se muestra un punto Q, a una altura h sobre la superficie, en el que la intensidad de campo gravitatorio es un vector igualmente radial, hacia dentro, de módulo mitad de g_0. La distancia de Q al centro de la Tierra es r = R+h, de modo que debe cumplirse

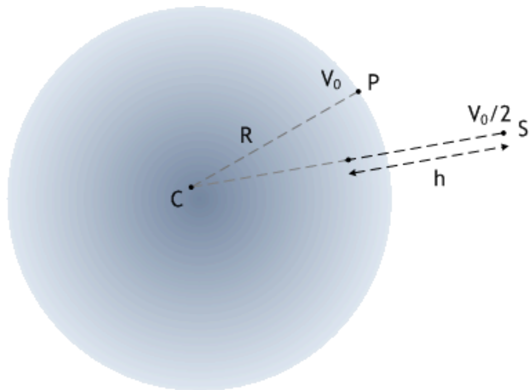
$$\frac{g_0}{2} = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R+h)^2} \qquad (2)$$

así que, llevando a (2) el valor de g_0 de (1), tenemos

$$G\frac{M}{2R^2} = G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \Rightarrow \quad 2R^2 = (R+h)^2 \quad \Rightarrow \quad R\sqrt{2} = R+h \quad \Rightarrow \quad h = R(\sqrt{2}-1) = \mathbf{0{,}41R}$$

la primera respuesta.

b) La figura muestra ahora el punto P de la superficie terrestre, que está a un potencial V_0 (recuérdese que la superficie de la Tierra es equipotencial, de modo que **todos** los puntos de la superficie están a ese potencial). El valor de V_0 es



$$V_0 = -G\frac{M}{R} \qquad (3)$$

donde M y R son de nuevo la masa y el radio de la Tierra. Un punto S, a una altura h sobre la superficie de la Tierra, está a un potencial gravitatorio

$$V_S = -G\frac{M}{r}$$

donde r = R+h. Para que el potencial aquí sea $V_0/2$, deberá cumplirse

$$V_S = -G\frac{M}{R+h} = \frac{V_0}{2} = -G\frac{M}{2R} \quad \Rightarrow \quad 2R = R+h \quad \Rightarrow \quad h = \mathbf{R}$$

la segunda respuesta. Nótese que, tratándose de cantidades negativas, el potencial en S, V_S, es mayor que en la superficie.

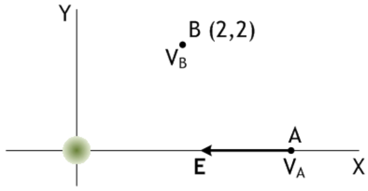
JUNIO 06

C3.– Una carga puntual de valor Q ocupa la posición (0,0) del plano XY en el vacío. En un punto A del eje X el potencial es V = –120 V y el campo eléctrico es E = –80 i N/C, siendo i el vector unitario en el sentido positivo del eje X. Si las coordenadas están dadas en metros, calcule:

a) La posición del punto A y el valor de Q.

b) El trabajo necesario para llevar un electrón desde el punto B(2,2) hasta el punto A.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = 1,6.10^{-19} C, Constante de la ley de Coulomb, K = 9.10^{9} N m^{2} C^{-2}



a) La carga puntual Q se encuentra en el origen de coordenadas del plano XY. El punto A está en todo caso en el eje X, y, ya que el potencial ahí es negativo, es fácil concluir que la carga Q es **negativa**. Sabiendo eso, también sabemos que el campo **E** creado por Q debe ser radial y hacia la carga, así que A debe estar a la derecha de (0,0), en algún punto del semieje X positivo: la figura recoge la situación, tal como la hemos descrito.

Lo que queda es una simple cuestión de escribir campo y potencial, para tener dos ecuaciones con las que trabajar. Las expresiones, para una carga puntual, son las bien conocidas

$$E = K\frac{|Q|}{r^2} \quad ; \quad V = K\frac{Q}{r}$$

donde E es el **módulo** de **E**: como hemos señalado en diversas ocasiones, es una de las escasas situaciones en las que Q debe ser tomado en **valor absoluto**, prescindiendo de su signo. Eso, por ejemplo, no se hace en la expresión del potencial. Llevando los valores en A, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} E = 80 = K\dfrac{|Q|}{r^2} \\ V_A = -120 = K\dfrac{Q}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{80}{-120} = \frac{K\dfrac{|Q|}{r^2}}{K\dfrac{Q}{r}} = \frac{-\dfrac{1}{r^2}}{\dfrac{1}{r}} = -\frac{1}{r} \Rightarrow r = \mathbf{1{,}5\ m}$$

la posición del punto A: nótese que Q es negativa, mientras que |Q| es una cantidad positiva. Ahora, llevando el valor de r al potencial en A:

$$V_A = K\frac{Q}{r} = -120\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad 9.10^9\frac{Q}{1{,}5} = -120 \quad \Rightarrow \quad Q = -\frac{120.1{,}5}{9.10^9} = \mathbf{-\ 0{,}02\ \mu C}$$

b) Para discutir el trabajo entre dos puntos de un campo eléctrico necesitamos los potenciales de ambos: el de A es un dato del problema; el de B se calcula con facilidad. La distancia de este punto a la carga Q es

$$r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ \text{m}$$

así que el potencial en B resulta

$$V_B = K\frac{Q}{r} = 9.10^9\ \frac{-2.10^{-8}}{2\sqrt{2}} = -63{,}64\ \text{V}$$

de modo que nos hablan de mover un electrón — una carga e negativa — desde un punto B a potencial –63,64 V hasta un punto A a potencial –120 V: por tanto, **hacia potenciales bajos**. Ahora bien, las cargas negativas se mueven **espontáneamente** en un campo **hacia potenciales altos**; por lo tanto, estamos tratando un desplazamiento **en contra de las fuerzas del campo**. Se precisaría un trabajo **realizado por nosotros**, contra el campo, y su valor sería, **como mínimo**, el mismo que haga el campo y de signo contrario. Una manera práctica de hacer el cálculo y no depender demasiado de la memoria (¿era $V_A - V_B$, o era del revés, $V_B - V_A$?) es calcular **siempre** el **trabajo que hace el campo**:

$${}^{\text{campo}}_{-e}W_B^A = -e(V_B - V_A) = -1{,}6.10^{-19}(-63{,}64-(-120)) = -9{,}07.10^{-18}\ \text{J}$$

donde, como debemos saber — ¡¡eso es lo que debemos saber!! — se resta el potencial del punto de **salida**, B en nuestro caso, menos el potencial del punto de **llegada**, A en nuestro caso.

El hecho de que el trabajo realizado por el campo sea negativo tiene un significado inequívoco: la carga se movió de forma **no espontánea**, contra las fuerzas del campo. En nuestro caso, ya lo habíamos entendido. Además, el trabajo necesario **mínimo**, contra el campo, es ese mismo, con signo positivo

$${}^{\text{contra el campo}}_{-e}W_B^A = \mathbf{9{,}07.10^{-18}\ J}$$

Un comentario último: ¿por qué hablamos de trabajo necesario mínimo? Generalmente, cuando nos plantean una cuestión como este apartado b), hay un sobreentendido que no se menciona: imaginemos al electrón inicialmente, en B, en reposo, con velocidad v = 0.

Si el electrón se va a mover de forma no espontánea, el campo hará trabajo negativo, como ya hemos visto, y no ayudará en el desplazamiento; se estará oponiendo a él. Para conseguir que el electrón se mueva, necesitamos vencer el trabajo del campo con otro **positivo**. Si realizamos exactamente el mismo trabajo que hace el campo, aunque con signo positivo, el electrón de mueve de B a A sin ganancia de velocidad: si sale de B con velocidad v = 0, llega a A con velocidad v = 0. Ese es el **trabajo mínimo necesario**, y el electrón **no ha cambiado de energía cinética.**

Claro está, podemos realizar un trabajo mayor que el mínimo necesario: en nuestro caso, el campo hace el trabajo que hemos calculado, –9,07.10^{-18} J, y nosotros podemos realizar otro, positivo, y mayor que ese: entonces el electrón llegará a A con alguna velocidad, y **habrá ganado energía cinética**.

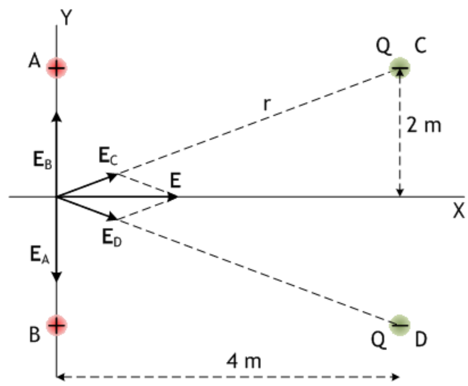
SEPTIEMBRE 06

B2.– Dos cargas eléctricas positivas e iguales de valor 3.10^{-6} C están situadas en el punto A(0,2) y B(0,–2) del plano XY. Otras dos cargas iguales Q están localizadas en los puntos C(4,2) y D(4,–2). Sabiendo que el campo eléctrico en el origen de coordenadas es E = 4.10^3 i N/C, siendo i el vector unitario en la dirección del eje X, y que todas las coordenadas están expresadas en metros, determine:

a) El valor numérico y el signo de las cargas Q.

b) El potencial eléctrico en el origen de coordenadas debido a esta configuración de cargas.

Datos: Constante de la Ley de Coulomb, K = 9.10^9 N m^2 C^{-2}



a) La figura muestra la disposición de las cuatro cargas, en los puntos A, B, C y D. De entrada, es evidente que los campos creados en el origen de coordenadas por las cargas situadas en A y B son vectores opuestos, ya que se trata de cargas positivas, iguales y a la misma distancia. Por tanto, $\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B = \mathbf{0}$, y sólo debemos preocuparnos por las cargas Q situadas en C y D. Un poco de reflexión permitirá entender que estas cargas son negativas: de otro modo, no sería posible que el campo en el origen de coordenadas acabe siendo $\mathbf{E} = 4.10^3\ \mathbf{i}$ N/C, un vector que lleva el sentido positivo del eje X: únicamente si los campos $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ apuntan hacia C y D puede obtenerse ese resultado.

El resto es un cálculo sencillo. La igualdad de las cargas Q, junto a la simetría respecto al origen de coordenadas, impone que los vectores $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ tengan el mismo módulo. Puede verse entonces con facilidad que las componentes de $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ en la dirección del eje Y se anularán, pues tienen sentido contrario. Así, quedan las componentes de $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ en la dirección X, que se superponen y se refuerzan, para dar el campo final en el origen de coordenadas.

La distancia entre C (o D, tanto da) y el origen es $\quad r = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ m

El módulo coincidente de $\mathbf{E}_C$ y $\mathbf{E}_D$ vale, entonces, en función de Q

$$E_C = E_D = K\frac{Q}{r^2} = 9.10^9\,\frac{Q}{20} = 4{,}5Q.10^8\ \text{N/C}$$

y la componente de cualquiera de ellos en el eje X, teniendo en cuenta que $\cos\alpha = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, resulta ser

$$E_{Cx} = E_{Dx} = E_C\cos\alpha = 4{,}5Q.10^8\,\frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{N/C}$$

así que el campo en el origen finalmente resulta un vector en la dirección del eje X, sentido positivo, y que mide el doble que cualquiera de esas componentes. Si ha de tener el valor que exige el enunciado, deberá cumplirse la siguiente igualdad entre módulos:

$$E = 2E_{Cx} = 2E_C\cos\alpha = 2.4{,}5Q.10^8\,\frac{2}{\sqrt{5}} = 4.10^3 \qquad \Rightarrow \qquad Q = 4{,}97.10^{-6}\ \text{C} = 4{,}97\ \mu\text{C}$$

pero debemos recordar que Q es negativa, de modo que nuestra respuesta sería $\quad$ **Q = $-4{,}97.10^{-6}$ C = $-4{,}97$ μC**

b) Ahora conocemos la configuración de cargas de manera completa. El potencial del origen de coordenadas es, de acuerdo con el principio de superposición, la suma de los potenciales debidos a cada una de las cuatro cargas, que llamaremos V_A, V_B, V_C y V_D y que serán iguales dos a dos, por razones de simetría obvia ($V_A = V_B$, $V_C = V_D$). Resultará:

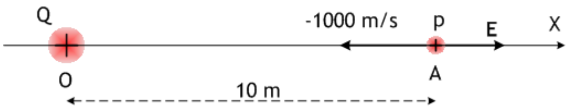
$$V = V_A + V_B + V_C + V_D = 9.10^9\,\frac{3.10^{-6}}{2} + 9.10^9\,\frac{3.10^{-6}}{2} + 9.10^9\,\frac{-4{,}97.10^{-6}}{2\sqrt{5}} + 9.10^9\,\frac{-4{,}97.10^{-6}}{2\sqrt{5}} = \mathbf{7000\ V}$$

B1.– Una carga positiva de 2 μC se encuentra situada inmóvil en el origen de coordenadas. Un protón moviéndose por el semieje positivo de las X se dirige hacia el origen de coordenadas. Cuando el protón se encuentra en el punto A, a una distancia del origen de x = 10 m, lleva una velocidad de 1000 m/s. Calcule:

a) El campo eléctrico que crea la carga situada en el origen de coordenadas en el punto A.
b) El potencial y la energía potencial del protón en el punto A.
c) La energía cinética del protón en el punto A.
d) El cambio de momento lineal experimentado por el protón desde que parte de A y por efecto de la repulsión vuelve al mismo punto A.

Datos: Cte de la ley de Coulomb, $K = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}; masa del protón, $m_p = 1{,}67.10^{-27}$ kg; Carga del protón, $q_p = 1{,}6.10^{-19}$ C

a) El primer apartado es un sencillo cálculo de intensidad de campo creado por una carga puntual. El vector **E** en el punto A llevará la dirección del eje X, sentido positivo, como se muestra en la figura, y será



$$\mathbf{E} = K\frac{Q}{r^2}\mathbf{i} = 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{10^2}\,\mathbf{i} = 1{,}8.10^6\,\mathbf{i}\ \text{N / C}$$

b) El potencial del punto A es también obvio; de nuevo hablamos de una carga puntual creadora:

$$V = K\frac{Q}{r} = 9.10^9\frac{2.10^{-6}}{10} = \mathbf{1800\ V}$$

y la energía potencial del protón que se encuentra en ese punto:

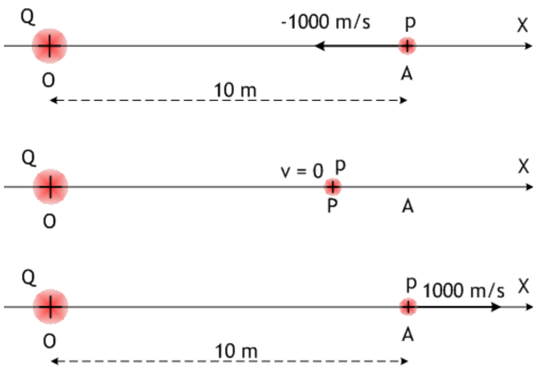
$$E_p = q_pV = 1{,}6.10^{-19}.1800 = \mathbf{2{,}88.10^{-16}\ J} = \mathbf{1{,}8\ keV}$$

(recuérdese que 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J, para aclarar el último cambio de unidades)

c) Conocemos la masa del protón y también su velocidad en el punto A, así que su energía cinética es inmediata. Ya que se está moviendo hacia la izquierda, escribiremos su velocidad con signo negativo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}1{,}67.10^{-27}.(-1000)^2 = \mathbf{8{,}35.10^{-22}\ J}$$

y resulta, como puede verse, mucho más pequeña que la energía potencial, por más de cinco órdenes de magnitud. Esto, naturalmente, debe entenderse como consecuencia de la baja velocidad del protón.



d) ¿Qué le sucede al protón después de pasar por A? La fuerza eléctrica sobre él es de frenado, y será mayor cuanto más cerca esté del origen, donde está la carga Q. Así, el protón pierde velocidad y, con ello, pierde energía cinética; a cambio, la energía potencial aumenta en la misma cuantía: las fuerzas eléctricas son conservativas, de modo que **la suma de las energías cinética y potencial es invariante**, puesto que se trata de la única fuerza sobre el protón.

Así que el protón se detendrá, agotada su velocidad, en un punto P; en ese lugar, toda la energía será potencial eléctrica. No es necesario saber con exactitud dónde está P, pero tampoco es difícil calcularlo: apenas 3 centésimas de milímetro a la izquierda de A, aunque la figura no recoge esto con fidelidad, por razones obvias.

Lo importante es que, después de detenerse, el protón sigue siendo empujado hacia la derecha por el campo, de modo que comienza a acelerar, moviéndose en sentido contrario al que traía; naturalmente, volverá a pasar por A. En ese momento, la energía potencial eléctrica volverá a ser la que obtuvimos en el apartado b; por tanto, **la conservación de energía exige que el protón tenga la misma energía cinética que en su paso anterior por A**, y por ello la misma velocidad, aunque esta vez con signo positivo, pues se mueve hacia la derecha.

De esta manera, considerando como situaciones inicial y final los dos pasos del protón por A, podemos escribir su velocidad en cada caso como

$$\mathbf{v}_i = -1000\,\mathbf{i}\ \text{m / s} \qquad ; \qquad \mathbf{v}_f = 1000\,\mathbf{i}\ \text{m / s}$$

y la variación de momento lineal del protón

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i = m(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i) = 1{,}67.10^{-27}(1000\,\mathbf{i} - (-1000\,\mathbf{i})) = 3{,}34.10^{-24}\,\mathbf{i}\ \text{kgms}^{-1}$$

JUNIO 07

B2.– Dos partículas con cargas de +1 μC y de –1 μC están situadas en los puntos del plano XY de coordenadas (–1,0) y (1,0) respectivamente. Sabiendo que las coordenadas están expresadas en metros, calcule:

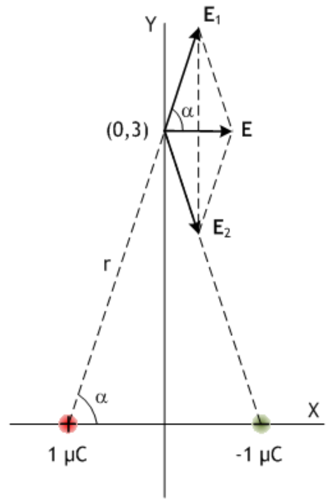
a) El campo eléctrico en el punto (0,3).

b) El potencial eléctrico en los puntos del eje Y.

c) El campo eléctrico en el punto (3,0).

d) El potencial eléctrico en el punto (3,0).

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}



a) Las cargas +1 μC y −1 μC, que llamaremos Q_1 y Q_2 respectivamente, constituyen de hecho un **dipolo eléctrico,** con X como eje del dipolo. Aparecen en la figura, en los puntos que se han indicado. El punto (0,3) está a una distancia r de cualquiera de ambas cargas, de valor fácil de obtener

$$r = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}\ \text{m}$$

El campo eléctrico en el punto (0,3) será, de acuerdo al principio de superposición, **la suma de los campos creados por cada una de las dos cargas**. Esos campos aparecen dibujados en la figura: la carga Q_1 = +1 μC crea un campo $\mathbf{E_1}$ radial y hacia fuera; y la carga Q_2 = −1 μC crea un campo $\mathbf{E_2}$ radial y hacia la carga. Ambas intensidades de campo, por evidentes razones de simetría, tienen el mismo módulo

$$E_1 = E_2 = K\frac{Q_1}{r^2} = 9.10^9\ \frac{10^{-6}}{10} = 900\ \text{N / C}$$

El vector campo en el punto (0,3) es, como hemos dicho, $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$ una suma vectorial. La figura muestra que esa suma sería muy sencilla en este caso, por razones de simetría: en efecto, **E** queda paralelo a la línea que une las cargas (lleva la dirección del eje X). Las componentes verticales de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ se anulan, en tanto que las componentes horizontales son iguales, ambas hacia la derecha, y se suman para dar el resultado final. Estas componentes horizontales valen

$$E_1 \cos\alpha = E_2 \cos\alpha = 900\ \frac{1}{\sqrt{10}} = 90\sqrt{10}\ \text{N/C}$$

donde α es el ángulo marcado en la figura, el mismo en el paralelogramo de los vectores que en el triángulo formado por los puntos (−1,0), (0,0) y (0,3): el cos α se ha calculado en éste último.

Como esas dos componentes se suman, el campo acabará midiendo el doble que cualquiera de ellas:

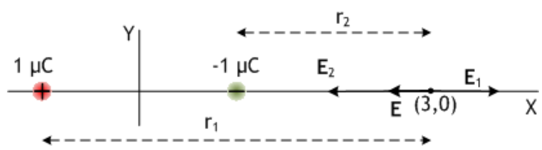
$$E = 2\ E_1 \cos\alpha = 2\ E_2 \cos\alpha = \mathbf{180\sqrt{10}\ N / C}$$

o, si se prefiere escribir el vector **E**, habida cuenta de su dirección paralela al eje X: $\mathbf{E} = 180\sqrt{10}\,\mathbf{i}\ \text{N / C}$

b) Cualquier punto del eje Y está a la misma distancia de la carga positiva del dipolo que de la carga negativa del mismo. Cuando queremos calcular el potencial de un punto aplicamos el principio de superposición: **los potenciales se suman**. Así, escribiríamos

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{Q_1}{r} + K\frac{Q_2}{r}$$

de modo que, siendo r la misma en los dos casos para un punto del eje Y, se sigue que sumaremos cantidades iguales y de signo contrario, pues $Q_1 = -Q_2$: **el potencial quedará 0 V.**



c) Esta vez los campos $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ aparecen ambos en la dirección del eje X, de modo que su suma resultará más sencilla. El módulo de $\mathbf{E_2}$ será mayor, ya que (3,0) está más próximo a la carga negativa. Los módulos de ambos campos, en todo caso, resultan ser ahora

$$E_1 = K\frac{Q_1}{r_1^2} = 9.10^9\ \frac{10^{-6}}{4^2} = 562{,}5\ \text{N / C}\ ; \qquad E_2 = K\frac{|Q_2|}{r_2^2} = 9.10^9\ \frac{10^{-6}}{2^2} = 2250\ \text{N / C}$$

así que el campo $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$, finalmente, llevará la dirección del eje X, en sentido negativo (hacia la carga de −1 μC) y su módulo será la diferencia entre los módulos E_2 y E_1:

$$E = E_2 - E_1 = 2250 - 562{,}5 = \mathbf{1687{,}5\ N/C}$$

O, si queremos escribir el vector **E**, ya que su dirección es el eje X y su sentido negativo, será **E = −1687,5 i** N/C

d) El potencial eléctrico en (3,0), como en cualquier otro punto, es **la suma de los potenciales creados en ese punto por ambas cargas**. Se trata de una sencilla suma de escalares, uno de los cuales es positivo (el potencial creado por la carga +1 μC), y el otro, (el potencial creado por la carga −1 μC), es negativo:

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{Q_1}{r_1} + K\ \frac{Q_2}{r_2} = 9.10^9\frac{10^{-6}}{4} + 9.10^9\frac{-10^{-6}}{2} = 2250 - 4500 = \mathbf{-2250\ V}$$

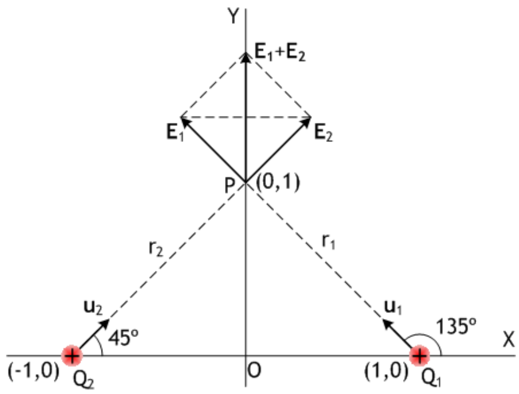
SEPTIEMBRE 07

B2.– Se disponen dos cargas eléctricas sobre el eje X: una de valor Q_1 en la posición (1,0), y otra de valor Q_2 en (–1,0). Sabiendo que todas las distancias están expresadas en metros, determine en los dos casos siguientes:

a) Los valores de las cargas Q_1 y Q_2 para que el campo eléctrico en el punto (0,1) sea el vector E = 2.10^5 j N/C, siendo j el vector unitario en el sentido positivo del eje Y.

b) La relación entre las cargas Q_1 y Q_2 para que el potencial eléctrico en el punto (2,0) sea cero.

Dato: Constante de la ley de Coulomb, K = 9.10^9 N m² C⁻²



a) El dibujo muestra de qué forma debemos imaginar las cosas en este primer apartado. Nótese que la disposición de los puntos (1,0) y (—1,0), donde se encuentran las cargas, y del punto (0,1) donde se calcula la intensidad de campo implica una evidente simetría, que cobra más evidencia cuando se nos dice que el campo **E** en el punto (0,1) tiene que llevar la dirección del eje Y.

Un poco de reflexión muestra enseguida que la única posibilidad que existe es que Q_1 y Q_2 sean **ambas positivas**, y que tengan el **mismo valor**: considérese cualquier otra opción y se comprobará que no hay forma de que **E**, la suma de los campos creados por Q_1 y Q_2, resulte ser **E** = 2.10^5 **j**.

Así, podríamos imaginar la imagen de la figura: los campos $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$, creados por las dos cargas en el punto (0,1), medirán lo mismo, por razones de simetría obvia. Cuando se suman, sus componentes en la dirección del eje X se anulan, ya que resultarían iguales y de signo contrario. Por el contrario, las componentes de ambos vectores en la dirección del eje Y son iguales, van hacia arriba y se suman. De este modo nos queda finalmente una intensidad de campo **E** en la dirección del eje Y, sentido positivo.

Todas las afirmaciones anteriores se basan en consideraciones de simetría. El cálculo formal, prescindiendo de ellas, se plantea con dos incógnitas, las cargas Q_1 y Q_2, que deben crear el campo pedido en el punto P. Los vectores unitarios de dirección de las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ se muestran en la figura, y no requieren mayores explicaciones; son, respectivamente

$$\mathbf{u}_1 = \cos 135^\circ\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 135^\circ\,\mathbf{j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} \qquad ; \qquad \mathbf{u}_2 = \cos 45^\circ\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 45^\circ\,\mathbf{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$$

así que podemos escribir las intensidades de campo $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ en función de las cargas Q_1 y Q_2:

$$\mathbf{E}_1 = K\frac{Q_1}{r_1^2}\mathbf{u}_1 = 9.10^9\,\frac{Q_1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right)\ \text{N/C} \qquad ; \qquad \mathbf{E}_2 = K\frac{Q_2}{r_2^2}\mathbf{u}_1 = 9.10^9\,\frac{Q_2}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right)\ \text{N/C}$$

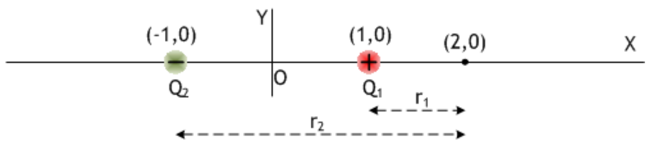
y ahora debemos obligar a que **E = E₁ + E₂** = 2.10^5 **j**, lo que implica que la suma de las primeras componentes de $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ sea cero, y que la suma de las segundas componentes sea 2.10^5; esto es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 2.10^5\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 9.10^9\,\dfrac{Q_1}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 9.10^9\,\dfrac{Q_2}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ 9.10^9\,\dfrac{Q_1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 9.10^9\,\dfrac{Q_2}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2.10^5 \end{cases}$$

De la primera de esas dos igualdades se sigue evidentemente $Q_1 = Q_2$, como ya habíamos entendido. Y llevando esta identidad a la segunda igualdad se tiene:

$$2.9.10^9\,\frac{Q_1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.10^5 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 = \frac{4.10^5}{9\sqrt{2}.10^9} = \mathbf{3{,}14.10^{-5}\ C = 31{,}4\ \mu C}$$

así que, finalmente, dos cargas iguales y positivas, como esperábamos.



b) Este apartado es mucho más sencillo: el potencial en (2,0) es la suma de los potenciales creados por Q_1 y Q_2. Para que el potencial resulte cero, ha de ser

$$V = V_1 + V_2 = 0$$

Naturalmente, eso implica que uno de los potenciales ha de ser positivo y el otro negativo, de manera que las cargas tendrán que tener signos diferentes: una de las posibilidades es que Q_1 sea positiva y Q_2 negativa, como se ha representado en la figura. Los potenciales respectivos se escriben

$$V_1 = K\frac{Q_1}{r_1} \quad ; \quad V_2 = K\frac{Q_2}{r_2}$$

con r_1 = 1 m; r_2 = 3 m. De este modo, tendrá que ser

$$V = V_1 + V_2 = K\frac{Q_1}{r_1} + K\frac{Q_2}{r_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{1} + \frac{Q_2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q_2 = -3Q_1}$$

cargas de signo opuesto y una triple que la otra; la figura recoge una de las dos posibles soluciones.

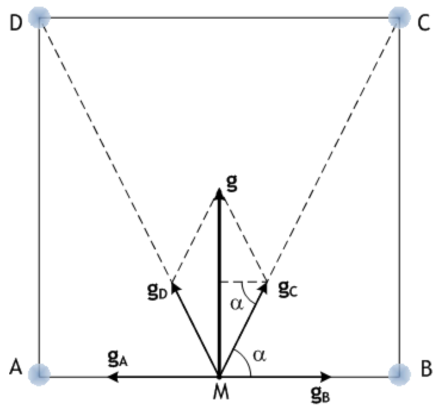
MODELO 08

C1.– Cuatro masas puntuales idénticas de 6 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de lado igual a 2 m. Calcule:

a) El campo gravitatorio que crean las cuatro masas en el centro de cada lado del cuadrado.

b) El potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado, tomando el infinito como origen de potenciales.

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}



a) Podemos considerar el centro de cualquier lado, ya que los cálculos serían idénticos. Tomemos, por ejemplo, el centro M del lado AB, tal como se ve en la figura; se representan ahí los campos $\mathbf{g_A}$, $\mathbf{g_B}$, $\mathbf{g_C}$ y $\mathbf{g_D}$ creados en M por las cuatro masas puntuales. Nótese que cada uno de ellos es, como sabemos, radial y hacia la masa creadora. Calcularemos sus módulos de acuerdo a la expresión

$$g = G\frac{M}{r^2} \qquad (1)$$

del campo creado por una masa puntual. Las distancias de las masas al punto M son, respectivamente

$r_A = r_B = 1$ m ya que cada una es la mitad del lado AB

$r_C = r_D = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ m , hipotenusas de los triángulos MBC y MAD.

y ahora podemos plantearnos sumar todos los campos, para hallar el valor de **g** en el punto M:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g_A} + \mathbf{g_B} + \mathbf{g_C} + \mathbf{g_D} \qquad (2)$$

De entrada, parece obvio que $\mathbf{g_A}$ y $\mathbf{g_B}$ van a medir lo mismo, por simetría, y se anularán al sumarse. Así que sólo debemos ocuparnos de los campos creados por C y D. Los módulos de ambos serán iguales, de nuevo por razones de simetría, y valdrán

$$g_C = g_D = G\frac{M}{r_C^2} = 6{,}67.10^{-11}\,\frac{6}{5} = 8{,}00.10^{-11}\text{ N / kg}$$

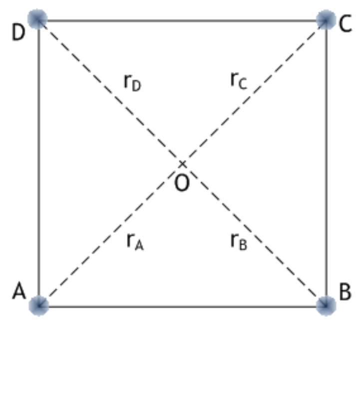
y, al sumar $\mathbf{g_C}$ y $\mathbf{g_D}$, sus componentes horizontales se anularán, reforzándose en cambio las componentes verticales, que además medirán lo mismo. Una de esas dos componentes verticales, digamos la de $\mathbf{g_C}$, se puede obtener con facilidad. De la figura

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{g_{Cy}}{g_C} \quad \Rightarrow \quad g_{Cy} = g_C\operatorname{sen}\alpha = 8{,}00.10^{-11}.\frac{2}{\sqrt{5}} = 7{,}16.10^{-11}\text{ N / kg}$$

donde sen α se ha obtenido del triángulo MBC. Como se suman las componentes verticales de $\mathbf{g_C}$ y $\mathbf{g_D}$, el vector resultante medirá el doble de esa cantidad

$$g = 2\,g_{Cy} = \mathbf{1{,}43.10^{-10}\ N/kg}$$

y estará dirigido, como se ve, hacia el centro del cuadrado. Lo mismo sucedería con el campo en el punto medio de otro cualquiera de los otros lados.



b) La expresión del potencial creado por una masa puntual en un punto a distancia r de la misma es

$$V = -G\frac{M}{r} \qquad (3)$$

y tiene ya, como sabemos, su valor cero a distancia infinita de la masa, siendo crecientemente negativo al acercarnos a ella. De acuerdo con el principio de superposición, el potencial en el punto O, centro del cuadrado, será la suma de los cuatro potenciales creados por las masas dispuestas en los vértices; ahora bien, ya que son todas ellas de 6 kg, y ya que están todas a la misma distancia de O,

$$AC = DB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\text{ m} \quad \Rightarrow \quad r_A = r_B = r_C = r_D = \frac{1}{2}\,AC = \sqrt{2}\text{ m}$$

se sigue que los cuatro potenciales valdrán lo mismo

$$V_A = V_B = V_C = V_D = -G\frac{M}{r} = -6{,}67.10^{-11}\,\frac{6}{\sqrt{2}} = -2{,}83.10^{-10}\text{ J / kg}$$

así que el potencial en O será el cuádruplo de esa cantidad

$$V = V_A + V_B + V_C + V_D = 4\,V_A = \mathbf{-1{,}13.10^{-9}\ J / kg}$$

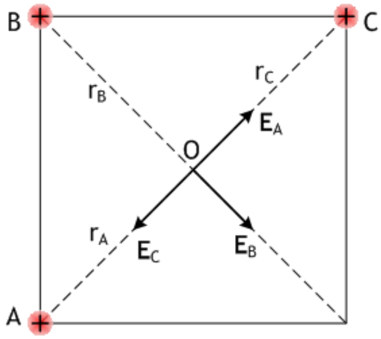
SEPTIEMBRE 08

C3.– Se disponen tres cargas de 10 nC en tres de los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Determine en el centro del cuadrado:

a) **El módulo, la dirección y el sentido del vector campo eléctrico.**

b) **El potencial eléctrico.**

Dato: Constante de la ley de Coulomb, K = 9.10^9 N m^2 C^{-2}



a) Imaginamos las tres cargas en los vértices A, B y C del cuadrado. El centro O del cuadrado está a la misma distancia de cualquiera de los vértices, la mitad de la diagonal del cuadrado,

$$AC = \sqrt{2}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad r_A = r_B = r_C = \frac{1}{2}\,AC = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{m}$$

El principio de superposición, como siempre, es la clave: los campos se suman. En la figura aparecen las intensidades de campo creadas en O por cada una de las cargas: se trata, en los tres casos, de vectores radiales y hacia fuera, como corresponde a cargas puntuales positivas. Además, y ya que las cargas son iguales y están a la misma distancia de O, parece obvio que las tres intensidades de campo, $\mathbf{E_A}$, $\mathbf{E_B}$ y $\mathbf{E_C}$, tendrán el mismo módulo. Su valor es

$$E_A = E_B = E_C = K\frac{Q}{r^2} = 9.10^9\,\frac{10.10^{-9}}{(\sqrt{2})^2} = 45\ \text{N/C} \qquad (1)$$

Finalmente, el campo en O se escribe $\mathbf{E} = \mathbf{E_A} + \mathbf{E_B} + \mathbf{E_C}$ de acuerdo con el principio de superposición. Pero la figura muestra que los vectores $\mathbf{E_A}$ y $\mathbf{E_C}$ son opuestos y se anulan, de modo que el campo acaba siendo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_B}\,; \qquad E = \mathbf{45\ N/C}$$

un vector dirigido hacia el cuarto vértice del cuadrado y cuyo módulo está dado en (1).

b) El potencial eléctrico en O es, de nuevo, suma de los potenciales creados por las tres cargas. Además, por sencillas razones de simetría, el potencial que crea cada una de ellas en O es el mismo: cargas iguales y a la misma distancia de O. El valor del potencial creado por cada carga,

$$V_A = V_B = V_C = K\frac{Q}{r} = 9.10^9\,\frac{10.10^{-9}}{\sqrt{2}} = 63{,}64\ \text{V}$$

y el potencial en O, suma de los tres, es el triple de cualquiera de ellos

$$V = V_A + V_B + V_C = 3\,V_A = \mathbf{190{,}92\ V}$$

B1.– En el plano x = 0 existe una distribución superficial infinita de carga cuya densidad superficial de carga es $\sigma_1 = +10^{-6}$ C/m^2.

a) Empleando el teorema de Gauss, determine el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en los puntos del espacio de coordenadas (1,0,0) y (−1,0,0).

Una segunda distribución superficial infinita de carga de densidad superficial σ_2 se sitúa en el plano x = 3.

b) Empleando el teorema de Gauss, determine el valor de σ_2 para que el campo eléctrico resultante de ambas distribuciones superficiales de carga en el punto (−2,0,0) sea E = +10^4 i N/C

Nota: Todas las coordenadas están expresadas en unidades del SI.
Dato: Permitividad eléctrica del vacío, $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}

Véase Septiembre 09 C4 para aclarar detalles acerca del empleo del teorema de Gauss en el cálculo de **E**.

a) Estúdiese atentamente la figura: el plano x=0 (es decir, el plano YZ) está cargado, con la densidad superficial de carga descrita en el enunciado. Por razones de simetría, y ya que se trata de un plano ilimitado, la intensidad de campo **E** debida a esta distribución de carga será **perpendicular al plano**, única dirección compatible con la simetría plana de la distribución.

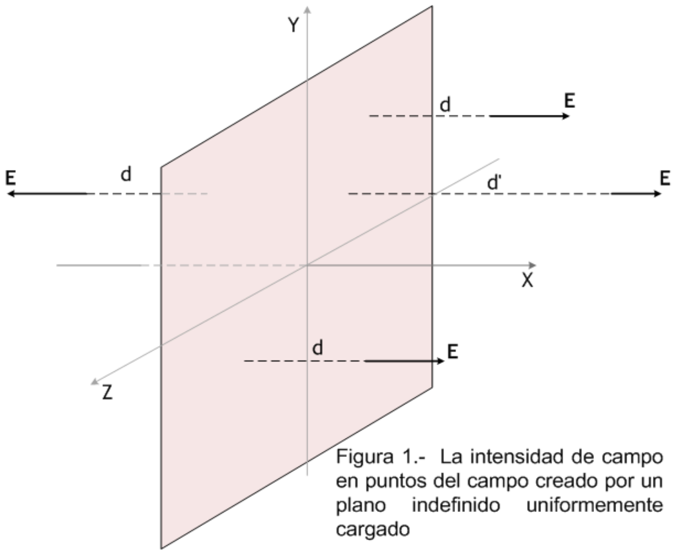


Figura 1.- La intensidad de campo en puntos del campo creado por un plano indefinido uniformemente cargado

Suponiendo que la carga es positiva, debemos imaginar **E** en el sentido positivo del eje X a la derecha del plano YZ, en la figura, y en el sentido negativo del eje X a la izquierda de dicho plano. Además, la simetría impone que **E** deberá ser el mismo para puntos que estén a la misma distancia del plano: en la figura mostramos hasta tres puntos que están a distancia d del plano XY, dos a un lado y uno al otro, en los que **E** tiene el mismo valor, salvo el sentido a un lado y otro del plano.

Es muy posible que la intuición (equivocada, como veremos) sugiera que el campo será menor en puntos más alejados del plano YZ, como en un punto a una distancia d'>d, en el que hemos dibujado un campo **E** menor.

Incluyendo supuestos erróneos como el que acabamos de hacer, lo cierto es que **la simetría de la distribución de carga nos permite conocer cuál será la dirección del vector intensidad de campo E en cualquier punto**: eso significa que se puede emplear el teorema de Gauss para hallar el módulo de **E** en un punto cualquiera del campo.

Para hacerlo, necesitamos definir una superficie cerrada gaussiana a la que aplicar el teorema. Debe ser, como decimos, **cerrada** y debe también **adaptarse a la simetría** que presenta la distribución de cargas creadora del campo. Elegimos un cilindro (serviría un prisma igualmente) dispuesto perpendicularmente al plano YZ, cuyas tapas, a un lado y otro del plano ZY, contienen los puntos (1,0,0) y (−1,0,0) en los que hemos de hallar el campo **E**.

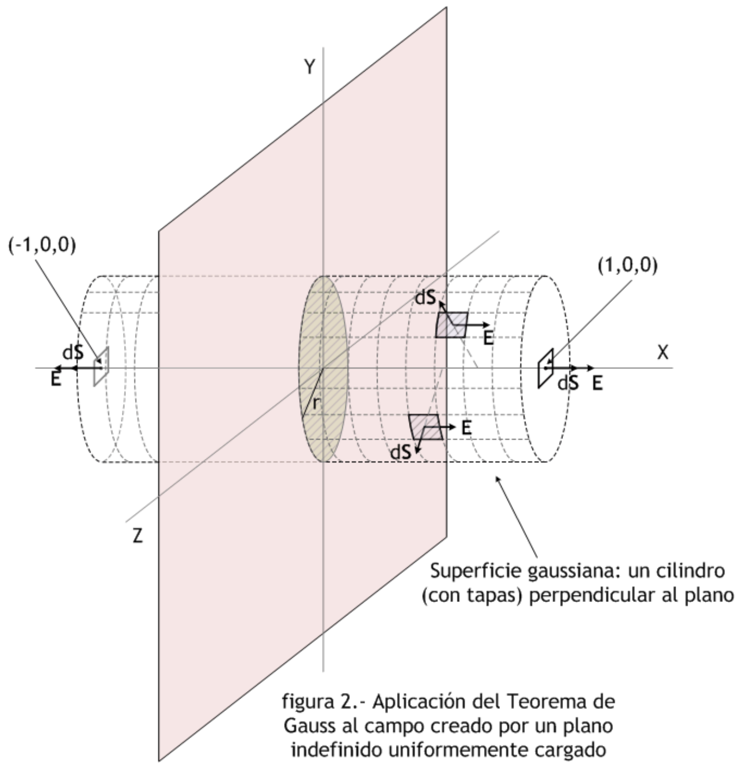


figura 2.- Aplicación del Teorema de Gauss al campo creado por un plano indefinido uniformemente cargado

Dividimos la superficie gaussiana en elementos infinitesimales: la figura sugiere cómo hacer esto, y destaca varios de ellos, un par en la pared lateral del cilindro y uno en cada tapa. Se muestra el vector **E** en cada caso, así como el vector d**S** correspondiente.

Es de máxima importancia notar que los vectores **E** y d**S** son perpendiculares en la pared lateral del cilindro, así que su producto escalar será nulo. En las tapas, en cambio, los vectores **E** y d**S** son paralelos, con la misma dirección y sentido.

Recordemos entonces el teorema de Gauss:

$$\oiint \mathbf{E}.\mathbf{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

que se aplica a la superficie cerrada gaussiana: el primer miembro es el **flujo de campo eléctrico a través de dicha superficie cerrada**; el segundo se refiere a la **carga neta q dentro de la superficie**. Para hacer la integral del primer miembro la romperemos en dos partes, una de ellas referida a la pared lateral del cilindro gaussiano y otra a las tapas del mismo

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \iint_{S\ lateral} \mathbf{E}.d\mathbf{S} + \iint_{Tapas} \mathbf{E}.d\mathbf{S} \qquad \text{(nótese que las integrales ya no se refieren a superficies cerradas)}$$

La primera de esas integrales es nula, ya que **E**.d**S** = 0 en la pared del cilindro gaussiano, como se hizo notar anteriormente. Eso significa que **no hay flujo de E a través de la pared** del cilindro, lo que resulta bastante evidente si se considera que las líneas de campo son perpendiculares al plano, como aparecen en la figura al lado (se han representado las líneas a un lado del plano, serían semejantes al otro lado): parece claro que unas líneas de campo como estas atravesarán las tapas de nuestro cilindro gaussiano, pero no cruzarán la pared lateral del cilindro. Para la otra integral, recordemos que en las tapas **E**⇈d**S**; además, como todos los puntos de ambas tapas están a la misma distancia del plano, podemos estar seguros de que **E** = **cte** en ellas, incluso si mantenemos nuestra equivocada intuición acerca de la caída del campo al alejarnos del plano. De este modo, podemos escribir

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \iint_{Tapas} \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \iint_{Tapas} E.dS = E.\iint_{Tapas} dS = E.2S \qquad (2)$$

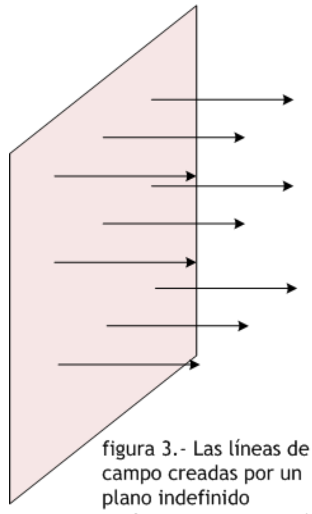


figura 3.- Las líneas de campo creadas por un plano indefinido uniformemente cargado

donde S es el área de una de las tapas, que es una cantidad arbitraria. De este modo, el primer miembro de (1) está evaluado. En cuanto al segundo miembro, la carga encerrada dentro de nuestro cilindro gaussiano es la que corresponde al corte del cilindro con el plano YZ cargado, y puede verse en la figura 2 como un área sombreada de valor S, ya que es igual al área de una tapa del cilindro. Es muy sencillo concluir que, si σ_1 es la densidad superficial de carga del plano, entonces

$$q = \sigma_1 S \qquad (3)$$

de manera que, llevando los resultados (2) y (3) al teorema (1), tenemos

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E.2S = \frac{\sigma_1 S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$

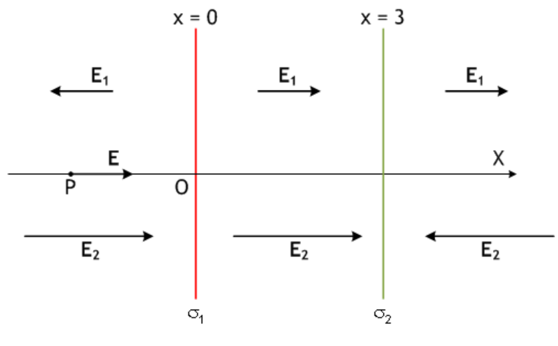
la respuesta al problema. Nótese que, como ya habíamos advertido, nuestra “intuición” acerca de que el campo disminuiría al alejarse del plano es incorrecta: el resultado obtenido es independiente de la distancia al mismo. De este modo, el vector **E** es el mismo en cualquier punto a la derecha del plano, como es el mismo también (con sentido contrario) en cualquier punto a la izquierda del plano. Dicho de otro **modo, una distribución plana indefinida y uniforme de carga crea un campo uniforme a cada lado del plano**; ambos campos uniformes tienen sentido opuesto.

En términos numéricos, nuestro campo vale $E = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \dfrac{10^{-6}}{2.8{,}85.10^{-12}} = \mathbf{5{,}65.10^4\ N/C}$

y va dirigido en el sentido positivo del eje X en el punto (1,0,0), de modo que en ese punto $\mathbf{E} = 5{,}65.10^4\ \mathbf{i}$ N/C

mientras que en el punto (−1,0,0) lleva el sentido negativo del eje X, así que allí es $\mathbf{E} = -5{,}65.10^4\ \mathbf{i}$ N/C

b) Ahora debemos acordarnos del principio de superposición: los campos se suman. Ya que sabemos calcular el campo que crea plano indefinido con carga uniforme, podemos hallar el campo que crean *dos* distribuciones de ese tipo simplemente sumando los campos creados por cada una de ellas. En esta última figura mostramos los planos cargados x = 0 y x = 3, con densidades respectivas σ_1 y σ_2, dispuestos perpendicularmente al plano del papel.



Los campos creados por ambos planos llevarán la dirección del eje X; en el punto P(−2,0,0), a la izquierda del plano x = 0, el campo creado por el plano x = 0 va hacia la izquierda y sabemos que vale $\mathbf{E}_1 = -5{,}65.10^4\ \mathbf{i}$ N/C, de acuerdo con el apartado anterior. Si el campo final en P ha de ser $\mathbf{E} = 10^4\ \mathbf{i}$ N/C, tendrá que ser

$$\mathbf{E} = 10^4\,\mathbf{i} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -5{,}65.10^4\,\mathbf{i} + \mathbf{E}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_2 = 6{,}65.10^4\,\mathbf{i}\ \mathrm{N/C}$$

así que parece claro que el campo $\mathbf{E}_2$ creado por el plano x = 3 en P debe ir hacia la derecha, **de modo que σ_2 debe ser negativa**, para crear campo que apunte hacia el plano x = 3. El módulo de este campo, junto con la expresión para el campo creado por un plano indefinido que hemos encontrado antes, nos dará el valor absoluto de σ_2:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = 2\varepsilon_0 E_2 = 2.8{,}85.10^{-12}.6{,}65.10^4 = 1{,}18.10^{-6}\ \mathrm{C/m^2} = 1{,}18\ \mu\mathrm{C/m^2}$$

y, recordando que ha de tratarse de carga negativa, la respuesta final sería $\sigma_2 = \mathbf{-1{,}18.10^{-6}\ C/m^2 = -1{,}18\ \mu C/m^2}$.

JUNIO 09

A2.– Dos cargas puntuales de −3 μC y +3 μC se encuentran situadas en el plano XY, en los puntos (−1,0) y (1,0) respectivamente. Determine el vector campo eléctrico:

a) En el punto de coordenadas (10,0).

b) En el punto de coordenadas (0,10).

Nota: Todas las coordenadas están expresadas en metros; Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}

Llamemos Q_1 y Q_2 a las cargas situadas en los puntos (−1,0) y (1,0), respectivamente. El campo eléctrico en cualquier punto será la suma de los vectores $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ debidos a cada una de esas cargas,

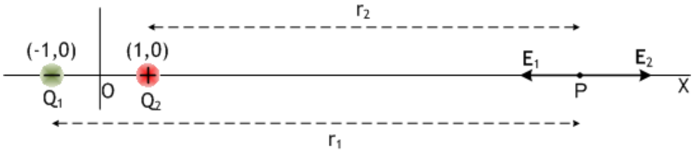
$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$$

de manera que debemos hacer los cálculos en cada uno de los puntos que plantea el enunciado.

a) En P (10,0), un punto del eje X, los vectores $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ tienen la dirección de ese eje, de modo que el vector unitario que describe su dirección es $\mathbf{i}$. Serían

$$\mathbf{E_1} = K\frac{Q_1}{r_1^2}\mathbf{i} = 9.10^9\frac{-3.10^{-6}}{11^2}\mathbf{i} = -\frac{27}{121}10^3\,\mathbf{i}\ \text{N/C}$$

$$\mathbf{E_2} = K\frac{Q_2}{r_2^2}\mathbf{i} = 9.10^9\frac{3.10^{-6}}{9^2}\mathbf{i} = \frac{1}{3}10^3\,\mathbf{i}\ \text{N/C}$$



de modo que

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} = -\frac{27}{121}10^3\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}10^3\,\mathbf{i} = \mathbf{1{,}10.10^2\,i\ \ N/C}$$ sería el campo en P.

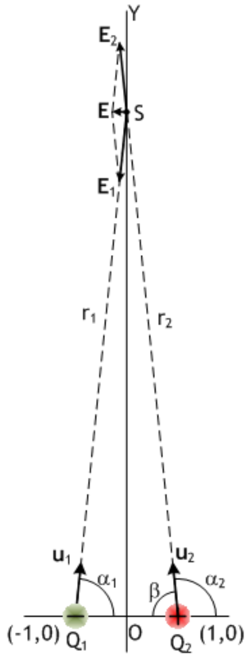
b) En S (0,10), un punto del eje Y, los vectores $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ tienen la dirección que aparece en la figura, marcada por los vectores unitarios $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ respectivamente. Recordando que un vector unitario en el plano XY puede escribirse como

$$\mathbf{u} = \cos\alpha\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\ \mathbf{j}$$

donde α es el ángulo que forma el vector con el semieje X positivo, parece claro que podemos escribir los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ como

$$\mathbf{u_1} = \cos\alpha_1\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha_1\ \mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{101}}\ \mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{101}}\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u_2} = \cos\alpha_2\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha_2\ \mathbf{j} = -\frac{1}{\sqrt{101}}\ \mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{101}}\ \mathbf{j}$$



teniendo presente que α_2 y β son ángulos suplementarios y que, por tanto, $\cos\alpha_2 = -\cos\beta$; $\operatorname{sen}\alpha_2 = \operatorname{sen}\beta$. Con todo esto, resulta sencillo escribir las expresiones para $\mathbf{E_1}$ y $\mathbf{E_2}$ en el punto S:

$$\mathbf{E_1} = K\frac{Q_1}{r_1^2}\,\mathbf{u_1} = 9.10^9\frac{-3.10^{-6}}{(\sqrt{101})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{101}}\mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{101}}\mathbf{j}\right) = -\frac{27}{101\sqrt{101}}10^3\,\mathbf{i} - \frac{27}{101\sqrt{101}}10^3\,\mathbf{j}\ \text{N/C}$$

$$\mathbf{E_2} = K\frac{Q_2}{r_2^2}\,\mathbf{u_1} = 9.10^9\frac{3.10^{-6}}{(\sqrt{101})^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{101}}\mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{101}}\mathbf{j}\right) = -\frac{27}{101\sqrt{101}}10^3\,\mathbf{i} + \frac{27}{101\sqrt{101}}10^3\,\mathbf{j}\ \text{N/C}$$

así que el campo en S finalmente resulta, ya que las componentes $\mathbf{j}$ se anulan:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} = -\frac{27}{101\sqrt{101}}10^3\,\mathbf{i} - \frac{27}{101\sqrt{101}}10^3\,\mathbf{i} = \mathbf{-53{,}2\,i\ \ N/C}$$

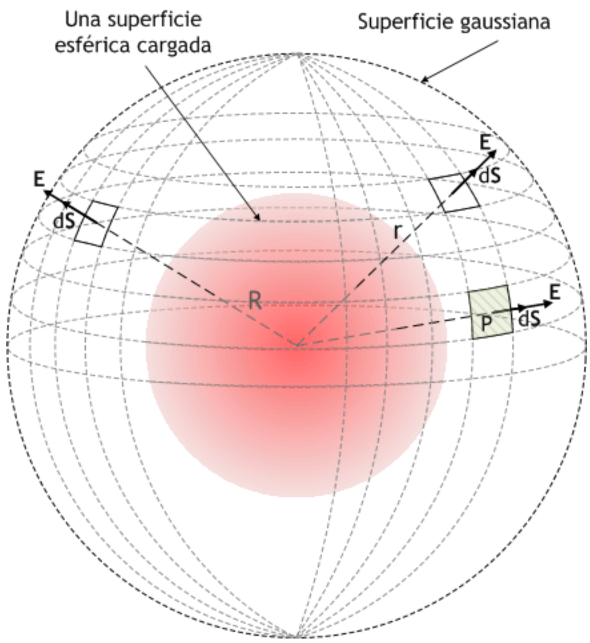
un vector en el sentido negativo del eje X, tal como aparece en la figura.

Septiembre 09

C4.– Una superficie esférica de radio R tiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente en ella.

a) **Deduzca la expresión del módulo del vector campo eléctrico en el punto situado en el exterior de dicha superficie haciendo uso del teorema de Gauss.**

b) **¿Cuál es la razón entre los módulos de los vectores campo eléctrico en dos puntos situados a las distancias del centro de la esfera $r_1 = 2R$ y $r_2 = 3R$?**



a) El teorema de Gauss puede emplearse para hallar el módulo de la intensidad de campo creado por una distribución de carga **en situaciones de alta simetría**, como sucede con el caso que nos ocupa: una superficie esférica uniformemente cargada.

En términos prácticos, podemos reconocer si un problema de búsqueda de **E** podrá resolverse aplicando el teorema de Gauss respondiendo a la siguiente pregunta:

¿Es posible, basándose exclusivamente en la simetría de la distribución de cargas creadoras de campo, saber cuál será la dirección del vector **E** en un punto cualquiera del campo?

Para nuestro caso, la respuesta es sí. De hecho, es fácil comprender que el campo en cualquier punto en el **exterior** de la superficie esférica ha de ser **radial**, ya que esa es la única opción compatible con la simetría que impone al problema la distribución uniforme de carga en la superficie esférica.

Si suponemos que la carga Q es positiva, entonces podemos decir aún más: el vector intensidad de campo **E** en cualquier punto en el exterior de la superficie cargada será **radial y dirigido hacia fuera**. Esto está recogido en la figura al lado, en la que mostramos la intensidad de campo en algunos puntos en el exterior de la superficie cargada.

El siguiente paso, una vez que sabemos que el teorema de Gauss será de utilidad, es **elegir una superficie gaussiana** a la que aplicar el teorema; la superficie elegida debe ser **cerrada** y **adecuada a la simetría** que presenta la distribución de carga. No es difícil escoger: si queremos hallar el campo en un punto P, a una distancia r del centro C de la superficie cargada, debemos tomar una **superficie esférica centrada en C y de radio r**. De hecho, cualquier problema relativo a distribuciones de carga que presenten simetría esférica se discute, de forma natural, empleando superficie gaussianas de esta forma.

La figura muestra que la superficie gaussiana debe ser dividida en elementos infinitesimales de área, d**S**, tan pequeños que pueden suponerse planos; cada uno de ellos se representa por medio del correspondiente vector perpendicular a la superficie: nótese que el vector d**S** en cualquier lugar de la superficie gaussiana resulta **radial y hacia fuera**. También se representa el vector intensidad de campo **E** en el centro de algunos de los elementos de área d**S**: por razones de simetría, estos vectores **E** tendrán el mismo módulo, ya que están supuestos en puntos a la misma distancia del centro de la distribución esférica de carga.

Así, **E** y d**S** son vectores estrictamente paralelos en toda la superficie gaussiana; además, el módulo de **E** es constante en toda ella. Esas son las claves de una sencilla aplicación del teorema de Gauss,

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

ya que la integral de la izquierda, el **flujo de campo E a través de la superficie gaussiana**, es bastante simple:

$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} \overset{(1)}{=} \oiint E.dS \overset{(2)}{=} E \oiint dS \overset{(3)}{=} E.4\pi r^2$$

(1) ya que **E**.d**S** = E.dS, por ser vectores de la misma dirección y sentido;

(2) ya que el modulo de **E**, E, es constante en toda la superficie gaussiana y puede salir de la integral;

(3) ya que la integral resultante no es otra cosa que la superficie de la esfera, igual a $4\pi r^2$

y el segundo miembro, por su parte, es obvio: la carga q encerrada **dentro de la superficie gaussiana** es la carga Q de la superficie esférica cargada de radio R, a la que alude el enunciado.

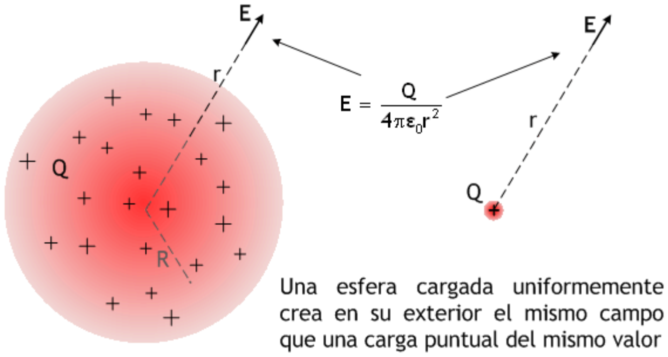
De este modo, el teorema aplicado en nuestro caso se resume en:

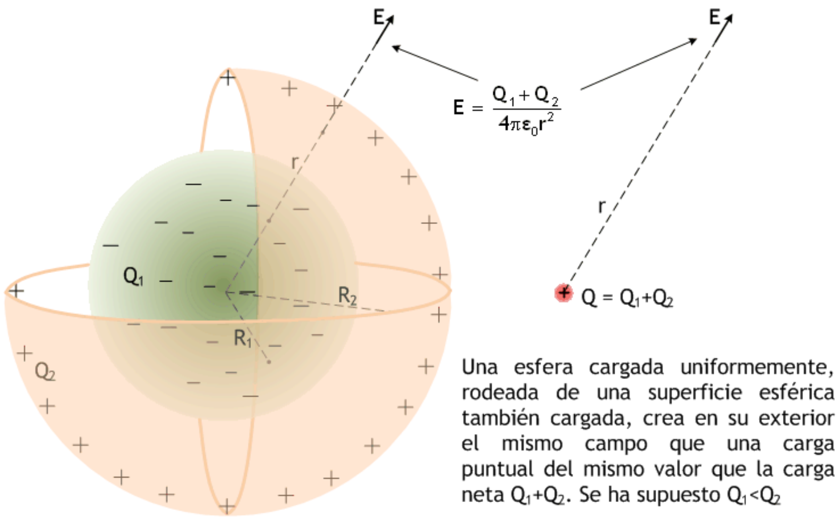
$$\oiint \mathbf{E}.d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

y, por tanto, el módulo de la intensidad de campo resulta

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = K\,\frac{Q}{r^2} \qquad (1)$$

siendo su dirección radial, como nos aseguró la simetría del problema. Es decir, **la misma intensidad de campo que crearía una carga puntual Q situada en el centro de la superficie esférica de radio R**. Este resultado es muy notable, y admite una generalización más notable aún: **cualquier distribución esférica y simétrica de carga, vista *desde fuera*, actúa igual que una sencilla carga puntual situada en su centro**; esa carga tiene el valor neto de la distribución. Unos ejemplos gráficos deberían ilustrar el sentido de esta generalización:





b) Se trata de una simple aplicación del resultado (1), para las distancias pedidas r_1 = 2R y r_2 = 3R. La razón entre los módulos de la intensidad de campo a esas distancias será:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}} = \frac{\dfrac{1}{4R^2}}{\dfrac{1}{9R^2}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$$

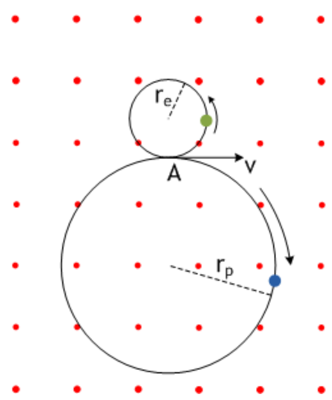
JUNIO 96

C4.— Un protón y un electrón se mueven perpendicularmente a un campo magnético uniforme, con igual velocidad. ¿Qué tipo de trayectoria realiza cada uno de ellos? ¿Cómo es la trayectoria que realiza el protón en relación con la que realiza el electrón? Razona la respuesta.

Datos: Se considera que la masa del protón es igual, aproximadamente, a 1836 veces la masa del electrón.

Por supuesto, las trayectorias de ambos son **circulares**, como siempre que una carga eléctrica es lanzada perpendicularmente a un campo magnético uniforme: queda atrapada en un giro uniforme, cuyo radio

$$r = \frac{mv}{qB}$$



depende de los parámetros de la partícula, en particular de su relación carga masa, q/m, y de su velocidad; además, depende de la intensidad del campo magnético.

Si el protón y el electrón tienen la misma velocidad, $v_e = v_p$, y ya que la carga de ambos es la misma (salvo signo), podemos encontrar la relación entre los radios de giro de uno y otro con facilidad:

$$\frac{r_e}{r_p} = \frac{\dfrac{m_e v_e}{eB}}{\dfrac{m_p v_p}{eB}} = \frac{m_e v_e}{m_p v_p} = \frac{m_e}{m_p} = \frac{1}{1836} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r_p = 1836\, r_e}$$

y así saber que el radio de la trayectoria del protón será 1836 veces el de la trayectoria del electrón.

La otra diferencia entre las trayectorias es el sentido de giro, debido a la diferencia de signo de las cargas. En la imagen, a modo de ejemplo, se supone un campo magnético uniforme dirigido perpendicularmente al papel y hacia el lector; el protón y el electrón coinciden en el punto A, ambos con la misma velocidad v dirigida horizontalmente y hacia la derecha. Utilizando **F** = q **v**∧**B** cuidadosamente, y teniendo en cuenta que la carga e del protón es positiva, pero la carga —e del electrón es negativa, es fácil concluir que el protón gira en sentido horario, mientras que el electrón lo hace en sentido antihorario.

¿Qué pasa con los periodos de giro? En realidad, no hay que recordar ninguna fórmula: si la velocidad es la misma, y si la órbita del protón es 1836 veces mayor, el tiempo que tardará en girar será también mayor, exactamente 1836 veces. Por supuesto, las fórmulas confirman esto: recordemos que el periodo de giro está dado por

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

de modo que la relación entre los periodos resulta

$$\frac{T_e}{T_p} = \frac{\dfrac{2\pi m_e}{eB}}{\dfrac{2\pi m_p}{eB}} = \frac{m_e}{m_p} = \frac{1}{1836} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T_p = 1836\, T_e}$$

como habíamos previsto. Ahora podemos imaginar mejor cómo son las cosas: digamos que los dos salen de A a la vez, girando cada uno en un sentido. El protón describe la órbita grande, con cierta majestuosidad, y el electrón, en la órbita pequeña y con la misma velocidad que el protón, gira de modo enloquecido. Cuando vuelvan a coincidir en A, después de que el protón acabe su primera vuelta, el electrón habrá girado 1836 veces.

SEPTIEMBRE 96

CUESTIÓN **4.— Un protón (carga eléctrica +e) y una partícula alfa (carga eléctrica +2e) se mueven en un campo magnético uniforme según circunferencias de igual radio. Compara los valores de:**

a) Sus velocidades

b) Sus energías cinéticas

c) Sus momentos angulares

Se admite que la masa de la partícula alfa es igual a 4 veces la masa del protón.

a) Se trata de dos partículas con carga positiva, de modo que ambas girarían en el campo en el mismo sentido. Llamando m_p y m_α a las masas respectivas, v_p y v_α a las velocidades, y si el valor del campo magnético es B, tenemos la expresión del radio giromagnético

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad (1)$$

que aplicaríamos a cada partícula:

Para el protón, $r_p = \dfrac{m_p\, v_p}{eB}$ (2); y para la partícula α $r_\alpha = \dfrac{m_\alpha\, v_\alpha}{2eB}$ (3)

Ahora, si han de girar con el mismo radio, entonces $r_p = r_\alpha$ y, dividiendo miembro a miembro (2) y (3), además de recordar $m_\alpha = 4\, m_p$:

$$\frac{r_p}{r_\alpha} = 1 = \frac{\dfrac{m_p\, v_p}{eB}}{\dfrac{m_\alpha\, v_\alpha}{2eB}} = \frac{\dfrac{m_p\, v_p}{e}}{\dfrac{4m_p\, v_\alpha}{2e}} = \frac{v_p}{2\, v_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v_p = 2\, v_\alpha}$$

b) La relación de energías cinéticas, conocidas las que existen entre masas y velocidades, es mero trámite:

$$\frac{E_c^p}{E_c^\alpha} = \frac{\dfrac{1}{2} m_p v_p^2}{\dfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{m_p\,(2\, v_\alpha)^2}{4m_p\, v_\alpha^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E_c^p = E_c^\alpha}$$

c) Y lo propio sucede con los momentos angulares. Recordemos que, para una partícula de masa m girando con velocidad v en una trayectoria circular de radio r, el momento angular (en módulo) es L = mvr. En consecuencia, la relación entre momentos angulares resulta

$$\frac{L_p}{L_\alpha} = \frac{m_p v_p r_p}{m_\alpha v_\alpha r_\alpha} = \frac{m_p\, 2v_\alpha r_p}{4m_p v_\alpha r_\alpha} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L_\alpha = 2L_p}$$

SEPTIEMBRE 96

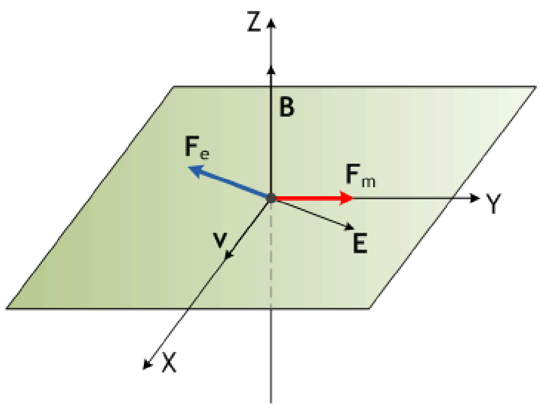
A2.— Un electrón se mueve en una región en la que están superpuestos un campo eléctrico E = 2i + 4j V/m y un campo magnético B = 0,4k T. Determinar para el instante en que la velocidad del electrón es v = 20i m/s:

a) Las fuerzas que actúan sobre el electrón debidas al campo eléctrico y al campo magnético respectivamente.

b) La aceleración que adquiere el electrón.

Datos: masa del electrón, m_e = = $9{,}109.10^{-31}$ kg; Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6.10^{-19}$ C

a) La figura recoge el momento al que alude el enunciado: el electrón se encuentra en el origen de coordenadas, sometido a un campo eléctrico **E** = 2**i** + 4**j** N/C (un vector del plano XY) y a un campo magnético **B** = 0,4**k** T (en la dirección del eje Z).



La fuerza sobre el electrón se escribirá

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_e} + \mathbf{F_m} = q\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = -e\mathbf{E} - e\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

de acuerdo a la conocida expresión de Lorentz: nótese que la carga del electrón es —e, donde e es el valor absoluto que aparece en los datos.

La fuerza eléctrica $\mathbf{F_e}$, debida al campo **E**, valdría

$$\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E} = -1{,}6.10^{-19}(2\mathbf{i}+4\mathbf{j}) = -3{,}2.10^{-19}\mathbf{i} - 6{,}4.10^{-19}\mathbf{j} \text{ N}$$

y llevaría, como se ve en la figura, sentido contrario al campo **E**.

También podemos hallar la fuerza magnética, $\mathbf{F_m}$, según

$$\mathbf{F_m} = -e\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = -1{,}6.10^{-19} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \end{vmatrix} = -1{,}6.10^{-19}(-8\mathbf{j}) = 1{,}28.10^{-18}\mathbf{j} \text{ N}$$

y observar que tiene la dirección del eje Y, en sentido positivo: así debía ser, puesto que **v** y **B** determinan el plano XZ, y su producto vectorial llevará, entonces, la dirección perpendicular a ese plano; el eje Y.

b) La fuerza neta sobre el electrón, que no aparece dibujada en la imagen, es la suma de ambas fuerzas; nótese que se trataría de una fuerza en el plano XY:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_e} + \mathbf{F_m} = -3{,}2.10^{-19}\mathbf{i} - 6{,}4.10^{-19}\mathbf{j} + 1{,}28.10^{-18}\mathbf{j} = -3{,}2.10^{-19}\mathbf{i} + 6{,}4.10^{-19}\mathbf{j} \text{ N}$$

y la aceleración, de acuerdo con la ley de Newton

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_e} = \frac{-3{,}2.10^{-19}\mathbf{i} + 6{,}4.10^{-19}\mathbf{j}}{9{,}109.10^{-31}} = -3{,}51.10^{11}\mathbf{i} + 7{,}03.10^{11}\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

JUNIO 97

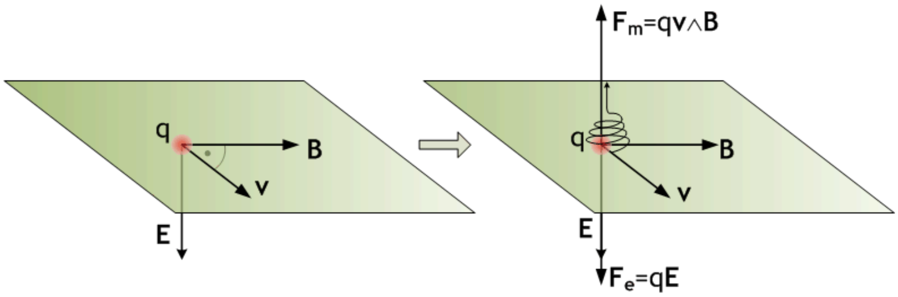
B1.- En una misma región del espacio existen un campo eléctrico uniforme de valor 0,5 . 10^4 V m^{-1} y un campo magnético uniforme de valor 0,3 T, siendo sus direcciones perpendiculares entre sí:

a) ¿Cuál deberá ser la velocidad de una partícula cargada que penetra en esa región en dirección perpendicular a ambos campos para que pase a través de la misma sin ser desviada?

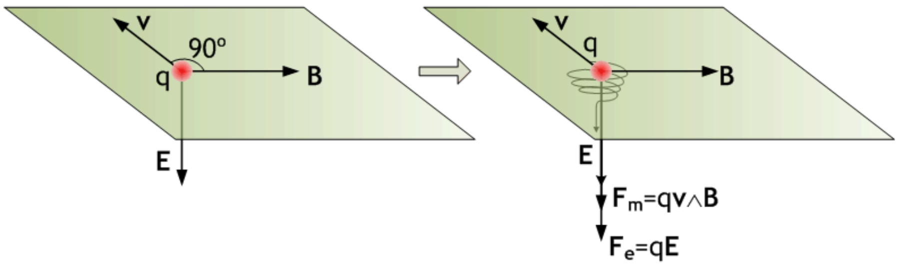
b) Si la partícula es un protón, ¿cuál deberá ser su energía cinética para no ser desviado?

Datos complementarios: Masa del protón m_p = 1,672 . 10^{-27} kg

a) La situación que nos plantean está recogida en la figura de la izquierda, que muestra los vectores **E** y **B** en el punto en que se encuentra la carga q, moviéndose con velocidad **v**. Por supuesto, sabemos que **E** y **B** son perpendiculares (eso sucede siempre); además, **v** es perpendicular a ambos (eso sucede en este problema). De este modo, todos los ángulos en la figura de la izquierda son de 90º.



Supongamos que la carga q es positiva; entonces las fuerzas $\mathbf{F}_e$ y $\mathbf{F}_m$, eléctrica y magnética, que actúan sobre ella están representadas en la figura de la derecha: nótese que $\mathbf{F}_e$ = q**E** lleva la misma dirección y sentido que **E**; y que $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ es perpendicular al plano formado por **v** y **B**, de modo que lleva la misma dirección que $\mathbf{F}_e$, pero sentido contrario.



Antes de seguir adelante, una observación: la figura anterior está pensada para que las cosas salgan como quiere el enunciado, de modo que la carga no se desvíe; naturalmente, eso implica que las fuerzas se anulen entre sí, y por tanto es preciso que lleven sentido contrario. Pero podría ser de otra manera, como se recoge en la figura abajo: véase que se ha invertido el sentido de la velocidad, manteniéndola perpendicular a **E** y **B**. Ahora las fuerzas $\mathbf{F}_e$ y $\mathbf{F}_m$ llevan la misma dirección y sentido, y no podrían anularse. La partícula sería acelerada y desviada.

La conclusión es clara: para que se pueda plantear que la carga pase sin que nada suceda, es necesario que su velocidad **v** sea perpendicular a **E** y **B**, pero además tiene que **llevar el sentido adecuado**.

Así que volvemos a la figura superior: las fuerzas se oponen. Todavía necesitamos algo, y es que **tengan el mismo módulo**; de esta manera, $\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \mathbf{0}$ y no existe efecto alguno sobre la carga, que **no es acelerada ni tampoco desviada**.

Esto requiere que

$$qE = qvB \quad \Rightarrow \quad E = vB \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B} = \frac{0,5.10^4}{0,3} = \mathbf{1,67.10^4\ m/s}$$

Existe un modo de sintetizar cuanto se lleva dicho en una expresión única. Para que una carga q, moviéndose con velocidad **v** en un punto en el que existe campo eléctrico **E** y campo magnético **B** no sea desviada, las fuerzas eléctrica y magnética deben ser iguales y de sentido contrario,

$$\mathbf{F}_e = -\mathbf{F}_m \quad \Rightarrow \quad q\mathbf{E} = -q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$$

y, por tanto, los tres vectores **E**, **v** y **B** deben cumplir la condición anterior. Nótese que esta condición es independiente del signo que pueda tener la carga q, que se simplifica en todo caso al exigir la igualdad de fuerzas. Volviendo a las figuras anteriores, puede verse que esa condición se cumple en la primera de ellas, pero no en la segunda, donde $\mathbf{E} = \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$.

b) Como ya sabemos lo que debe medir su velocidad, parece inmediato conocer la energía cinética que debería llevar el protón:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}1,672.10^{-27}(1,67.10^4)^2 = \mathbf{2,32.10^{-19}\ J} = \frac{2,32.10^{-19}}{1,6.10^{-19}} = \mathbf{1,45\ eV}$$

JUNIO 98

C4.— a) ¿Puede ser cero la fuerza magnética que se ejerce sobre una partícula cargada que se mueve en el seno de un campo magnético?

b) ¿Puede ser cero la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada que se mueve en el seno de un campo eléctrico?

a) Sí, puede serlo. La fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento es $\mathbf{F_m} = q\ \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$, de modo que el producto vectorial se anulará, y por tanto la fuerza $\mathbf{F_m}$ sobre la partícula, con la condición de que **v** y **B tengan la misma dirección**, sean o no del mismo sentido. Cuando una carga es lanzada en la dirección del campo magnético, éste no le afecta.

b) La fuerza eléctrica sobre una carga es $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, donde **E** es la intensidad de campo en el punto en que se encuentre la carga. Obviamente, la única posibilidad de que $\mathbf{F_e}$ sea nula es que lo sea **E**; de otra forma, la fuerza siempre tendrá valor no nulo.

Naturalmente, pueden existir puntos en un campo eléctrico en los que **E** = **0**; en ellos, una carga en **reposo** quedaría en equilibrio. Conviene saber, en todo caso, que se trata de puntos de equilibrio **inestable**: si la carga colocada allí se desplaza infinitesimalmente en cualquier dirección, y después se deja en libertad, **se aleja** del punto de equilibrio en lugar de volver a él.

SEPTIEMBRE 98

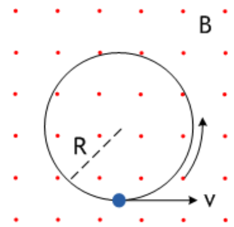
C4.— Un electrón que se mueve con una velocidad constante v penetra en un campo magnético uniforme B, de tal modo que describe una trayectoria circular de radio R. Si la intensidad de campo magnético disminuye a la mitad y la velocidad aumenta al doble, determine:

a) El radio de la órbita.

b) La velocidad angular.

a) El electrón tiene que entrar perpendicularmente al campo, para quedar atrapado describiendo una órbita circular. Como sabemos, el radio de la órbita se determina según

$$R = \frac{mv}{eB} \qquad (1)$$



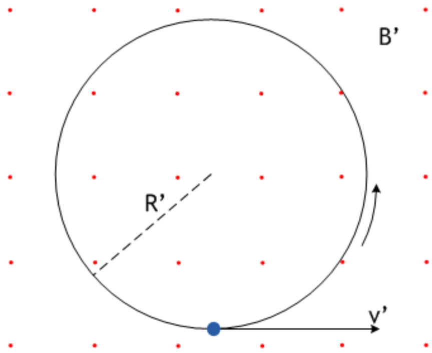
donde e es el valor absoluto de la carga del electrón. Si la intensidad del campo se hace la mitad, y la velocidad del electrón se duplica, llamando B' y v' a los nuevos valores

$$B' = \frac{B}{2} \quad ; \quad v' = 2v \qquad (2)$$

el nuevo radio de giro sería R'

$$R' = \frac{mv'}{eB'} \qquad (3)$$

y, dividiendo miembro a miembro (1) y (3), teniendo además (2) en cuenta



$$\frac{R}{R'} = \frac{\frac{mv}{eB}}{\frac{mv'}{eB'}} = \frac{\frac{v}{B}}{\frac{v'}{B'}} = \frac{vB'}{v'B} = \frac{vB'}{2v.2B'} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{R' = 4R}$$

b) La velocidad angular de un electrón moviéndose en las condiciones descritas,

$$\omega = \frac{e}{m}B \qquad (4)$$

tiene una característica muy interesante, que es su **independencia de la velocidad lineal v y, por tanto, también del radio de giro**. De hecho, (4) expresa claramente que ω depende únicamente del valor B del campo magnético uniforme en que está el electrón, y de la relación carga/masa del electrón, que es invariable y la misma siempre. En consecuencia, bajo las nuevas circunstancias, lo único que importa es el cambio del campo expresado en (2), y la nueva velocidad angular será

$$\omega' = \frac{e}{m}B' = \frac{e}{m}\frac{B}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{2}}$$

la mitad de la que tendría en las circunstancias iniciales.

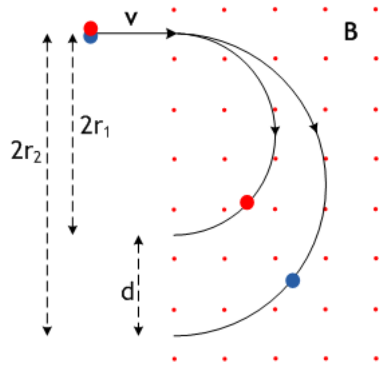
JUNIO 99

B1.– Dos isótopos, de masas $19{,}92.10^{-27}$ kg y $21{,}59.10^{-27}$ kg, con la misma carga de ionización, son acelerados hasta que adquieren una velocidad constante de $6{,}7.10^{5}$ m/s. Se les hace atravesar una región de campo magnético uniforme de 0,85 T cuyas líneas de campo son perpendiculares a la velocidad de las partículas.

a) Determine la relación entre los radios de las trayectorias que describe cada isótopo.

b) Si han sido ionizados una sola vez, determine la separación entre los dos isótopos cuando han descrito una semicircunferencia.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6.10^{-19}$ C



Podemos imaginar una situación como se representa en la figura, con un campo magnético uniforme dirigido perpendicularmente al plano del papel, hacia el lector. Los dos isótopos se mueven inicialmente hacia la derecha, cuando están entrando en el campo, y se han representado con colores distintos: rojo, el más ligero; azul, el más pesado.

La fuerza de Lorentz que actúa sobre cada uno de ellos es la conocida $\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$, y el resultado de esta acción sería el giro de ambos iones, cargados positivamente, en el plano del papel y en sentido horario, tal como recoge la figura.

a) La expresión del radio de la trayectoria de una partícula cargada, moviéndose perpendicularmente a un campo magnético **B** uniforme es la conocida

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad (1)$$

de modo que, puesto que ambos isótopos entran en el campo con la misma velocidad v = $6{,}7.10^{5}$ m/s, y ya que ambos tienen la misma carga de ionización q, el único factor que diferencia las trayectorias es la masa: de acuerdo con (1), los radios de las órbitas descritas serán proporcionales a las masas respectivas, según

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{m_1 v}{qB} \\[2ex] r_2 = \dfrac{m_2 v}{qB} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\dfrac{m_1 v}{qB}}{\dfrac{m_2 v}{qB}} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{19{,}92.10^{-27}\ \text{kg}}{21{,}59.10^{-27}\ \text{kg}} = \mathbf{0{,}92}$$

b) En cuanto a la segunda cuestión, podemos volver a (1) para calcular los radios de las órbitas, ya que ahora sabemos cuál es la carga q de los iones: si han sido ionizados una vez, tienen un electrón de menos, de manera que su carga es positiva y de valor q = e = $1{,}6.10^{-19}$ C. Con esta cantidad, y con los datos del enunciado, es inmediato obtener

$$r_1 = \frac{m_1 v}{eB} = \frac{19{,}92.10^{-27}\ \text{kg} \,.\, 6{,}7.10^{5}\ \text{m/s}}{1{,}6.10^{-19}\ \text{C} \,.\, 0{,}85\ \text{T}} = 9{,}81.10^{-2}\ \text{m}$$

$$r_2 = \frac{m_2 v}{eB} = \frac{21{,}59.10^{-27}\ \text{kg} \,.\, 6{,}7.10^{5}\ \text{m/s}}{1{,}6.10^{-19}\ \text{C} \,.\, 0{,}85\ \text{T}} = 10{,}64.10^{-2}\ \text{m}$$

Finalmente, la figura muestra cómo, tras haber girado cada uno de los isótopos una semicircunferencia, la separación entre ambos es d, la diferencia entre los diámetros de sus trayectorias respectivas, que pueden escribirse como $2r_1$ y $2r_2$. En consecuencia, la separación pedida es

$$d = 2r_2 - 2r_1 = 2(10{,}64.10^{-2} - 9{,}81.10^{-2}) = 1{,}65.10^{-2}\ \text{m} = \mathbf{1{,}65\ cm}$$

SEPTIEMBRE 99

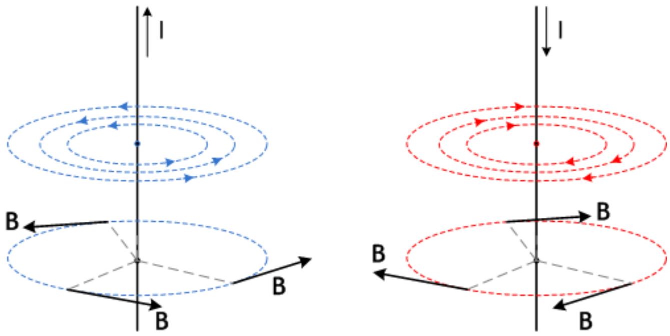
C4.— a) Analice cómo es la fuerza que ejercen entre sí dos conductores rectilíneos e indefinidos, paralelos, separados una distancia d y recorridos por una corriente de intensidad I, según que los sentidos de las corrientes coincidan o sean opuestos.

b) Explique si es posible que un electrón se mueva con velocidad v, paralelamente a estos conductores y equidistante entre ellos, sin cambiar su trayectoria.

a) El campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida en un punto cualquiera sigue la ley de Biot y Savart

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (1)$$

donde r es la distancia del punto al hilo indefinido; I es el valor de la corriente. La dirección y sentido de este campo se entiende bien a partir de sus líneas de campo, que son circulares, centradas en el hilo, y deben recorrerse de modo tal que al girar un destornillador o sacacorchos lleve el sentido de la corriente (equivalente a esta regla es la denominada "de la mano derecha", en la que el pulgar de esta mano debe mostrar el sentido de la intensidad de corriente cuando el resto de los dedos de la mano se curvan en el sentido de recorrido de la línea de campo). La figura muestra cómo serían las líneas de campo magnético creados por hilos verticales indefinidos que llevan corrientes de sentidos opuestos.



De otro lado, conocemos la acción de un **campo magnético uniforme** sobre una **corriente rectilínea indefinida**, que se escribe en términos

$$\mathbf{F} = I\,\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \qquad (2)$$

donde **l** es un trozo de hilo de longitud arbitraria. Por supuesto, **B** no es aquí el campo creado por esta corriente, sino el campo — creado por quienquiera que sea, en todo caso se tratará de otras corrientes — en el que está metida nuestra corriente. Esta duplicidad de campos magnéticos, el que crea la corriente y el que actúa sobre ella, es fuente de múltiples confusiones y debe entenderse bien desde el principio.

Junio 01

C3.— Un electrón que se mueve con una velocidad de 10^6 m/s describe una órbita circular en el seno de un campo magnético uniforme de valor 0,1 T cuya dirección es perpendicular a la velocidad. Determine:

a) El valor de radio de la órbita que realiza el electrón.

b) El número de vueltas que da el electrón en 0,001 s.

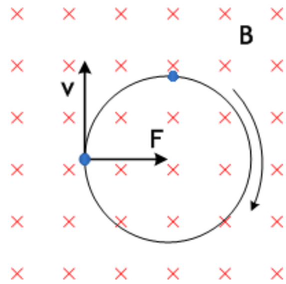
Datos: Masa del electrón $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

a) En las condiciones descritas, con el electrón entrando en dirección perpendicular al campo magnético, su movimiento es un **giro uniforme**. El radio de la órbita está dado por

$$r = \frac{m_e v}{eB} \qquad (1)$$

donde e es el valor absoluto de la carga del electrón, y m_e su masa. Tenemos cuantos datos se precisan para operar sin más:

$$r = \frac{9{,}1.10^{-31}.10^6}{1{,}6.10^{-19}.0{,}1} = \mathbf{5{,}7.10^{-5}\ m}$$



y, en lo que respecta al sentido de giro, debe determinarse en función de la situación concreta: por ejemplo, en la figura hemos supuesto un campo magnético **B** uniforme dirigido perpendicularmente y hacia dentro del papel; suponemos también al electrón moviéndose inicialmente hacia arriba: en tales condiciones, la fuerza magnética sobre el electrón resulta

$$\mathbf{F} = -e\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

y estaría en el plano del papel, horizontal y hacia la derecha: eso permite entender que el electrón giraría en **sentido horario**. Naturalmente, sería en sentido antihorario si, por ejemplo, hubiésemos imaginado el campo hacia fuera del papel, o si, dejando el campo como está en la figura, supusiésemos al electrón inicialmente moviéndose hacia abajo y no hacia arriba.

b) El periodo en un movimiento giromagnético es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{B\frac{e}{m_e}} = \frac{2\pi}{B}\frac{m_e}{e}$$

y su característica principal es su **independencia del radio r o de la velocidad v** del giro del electrón. Cualquiera que sea el valor de r y v, el periodo es el mismo, y está determinado exclusivamente por el valor del campo, B, y por la relación carga/masa (e/m_e en nuestro caso) de la partícula.

En nuestro caso, el periodo vale $$T = \frac{2\pi}{0{,}1}\frac{9{,}1.10^{-31}}{1{,}6.10^{-19}} = 3{,}57.10^{-10}\ \text{s}$$

de manera que el número de vueltas en una milésima de segundo será

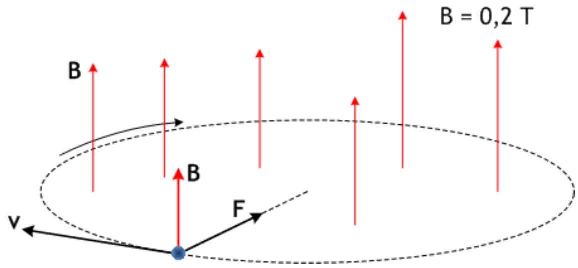
$$N = \frac{0{,}001\ \text{s}}{3{,}57.10^{-10}\ \text{s / vuelta}} = \mathbf{2{,}8.10^{6}\ \text{vueltas}}$$

SEPTIEMBRE 01

C3.— Una partícula de carga q = $1{,}6.10^{-19}$ C se mueve en un campo magnético uniforme de valor B = 0,2 T, describiendo una circunferencia en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético con período $3{,}2.10^{-7}$ s y velocidad de $3{,}8.10^{6}$ m/s. Calcule:

a) El radio de la circunferencia descrita.

b) La masa de la partícula.



a) La carga de la partícula es, en valor absoluto, la de un electrón. Eso es compatible con una variedad de partículas, que incluye, entre otras, electrón y protón o sus correspondientes antipartículas. En la figura se ha supuesto que se trata de una carga positiva; así puede entenderse el sentido de giro de la partícula, teniendo en cuenta que el plano XY de giro se imagina horizontal y el campo magnético, perpendicular a ese plano, en la dirección del eje Z.

En todo caso, el radio de giro de una partícula en un giro uniforme del que se conoce el periodo y la velocidad es una obviedad, con independencia de que se trate de un giro en un campo magnético o de cualquier otro supuesto, como podría ser un satélite en órbita circular alrededor de un planeta. En efecto, sabemos que

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v\,T}{2\pi} = \frac{3{,}8.10^{6}.3{,}2.10^{-7}}{2\pi} = \mathbf{19{,}4\ cm} = \mathbf{0{,}19\ m}$$

b) Ahora podemos emplear la expresión del radio giromagnético $$r = \frac{mv}{qB}$$

para despejar la masa de la partícula $$m = \frac{qBr}{v} = \frac{1{,}6.10^{-19}.0{,}2.0{,}19}{3{,}8.10^{6}} = \mathbf{1{,}63.10^{-27}\ kg}$$

que resulta, con una aproximación muy buena, la masa de un protón; así, podríamos imaginar que se trata de esta partícula, o puede que se trate de un antiprotón, que tiene la mimsa masa y la misma carga e, pero negativa.

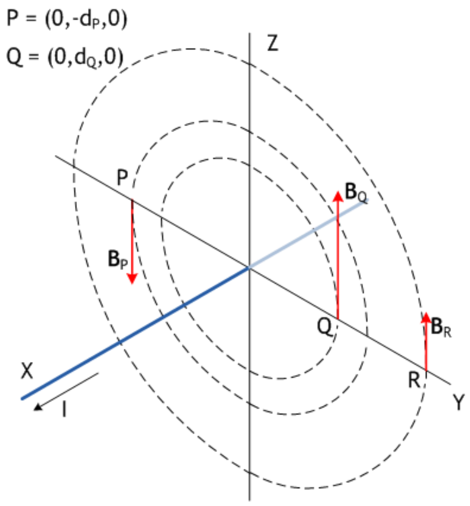
SEPTIEMBRE 01

A2.— Por un hilo conductor rectilíneo e infinitamente largo, situado sobre el eje X, circula una corriente eléctrica en el sentido positivo del eje X. El valor del campo magnético producido por dicha corriente es de 3.10^{-5} T en el punto P $(0,-d_P,0)$, y es de 4.10^{-5} T en el punto Q $(0,+d_Q,0)$. Sabiendo que d_P+d_Q = 7 cm, determine:

a) La intensidad que circula por el hilo conductor.

b) Valor y dirección del campo magnético producido por dicha corriente en el punto de coordenadas (0, 6 cm, 0).

Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2} ; Las cantidades d_P y d_Q son positivas.



a) La figura muestra el hilo indefinido a lo largo del eje X, transportando una corriente I en sentido positivo. Las líneas de campo magnético creado por esta corriente serían círculos centrados en puntos del hilo; nos interesan especialmente las líneas de campo que pasan por los puntos P (0,—dP,0) y Q (0,dQ,0), ambos del eje Y. Estas dos líneas de campo son círculos centrados en el origen de coordenadas, y se encuentran en el plano YZ, el del papel: aparecen dibujadas en la figura.

Nótese que el campo $\mathbf{B}_P$ en el punto P, tangente a la línea de campo, está dirigido verticalmente (dirección del eje Z) y hacia abajo; por su parte, el campo $\mathbf{B}_Q$ en Q está dispuesto también en la dirección Z, pero hacia arriba. El enunciado facilita los módulos de ambos vectores, que reponden a la conocida ecuación

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (1)$$

del campo creado por una corriente rectilínea indefinida en un punto a distancia r de la misma. El punto P está a distancia d_P (en valor absoluto, que es lo necesario en (1)) del hilo; el punto Q a distancia d_Q. Podemos, por tanto, escribir

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_P} = 3.10^{-5}\ \text{T} \qquad (2) \qquad\qquad B_Q = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_Q} = 4.10^{-5}\ \text{T} \qquad (3)$$

un par de ecuaciones con tres incógnitas: d_P, d_Q e I. La tercera ecuación necesaria está en el enunciado,

$$d_P+d_Q = 7\ \text{cm} \qquad (4)$$

de modo que, dividiendo miembro a miembro (2) y (3)

$$\frac{B_P}{B_Q} = \frac{3}{4} = \frac{\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d_P}}{\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d_Q}} = \frac{d_Q}{d_P} \quad\Rightarrow\quad d_Q = \frac{3}{4} d_P$$

que, llevada a (4), da
$$d_P + \frac{3}{4} d_P = 7 \quad\Rightarrow\quad 7\,d_P = 28 \quad\Rightarrow\quad d_P = 4\ \text{cm}$$

así que sólo falta volver a (2)
$$I = 3.10^{-5}\frac{2\pi.0{,}04}{4\pi.10^{-7}} = \mathbf{6\,A}$$

b) El campo en un punto R (0, 6 cm, 0) sería semejante al campo en Q, como en todos los puntos del eje Y a la derecha del origen: será vertical, en la ▫irección del eje Z, y hacia arriba. Su módulo quedará

$$B_R = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_R} = \frac{4\pi.10^{-7}.6}{2\pi.0{,}06} = \mathbf{2.10^{-5}\ T}$$

MODELO 02

C3.— Una partícula cargada se mueve en línea recta en una determinada región.

a) Si la carga de la partícula es positiva, ¿puede asegurarse que en esa región el campo magnético es nulo?

b) ¿Cambiaría su respuesta si la carga fuese negativa en vez de ser positiva?

a) No, no puede asegurarse tal cosa. La acción de un campo magnético sobre una carga en movimiento es

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

y, como sabemos, la única acción posible de esta fuerza es la desviación de la dirección de movimiento de la carga. Si la partícula cargada se mueve en línea recta, como dice el enunciado, es posible que no exista campo, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, de modo que no exista fuerza, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, pero también es posible que la partícula cargada **se mueva precisamente en la dirección del campo**, no importa si con el mismo sentido o no; en tal caso, el producto vectorial $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = \mathbf{0}$, y de nuevo resultará $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, así que la partícula tampoco se desviará en estas condiciones.

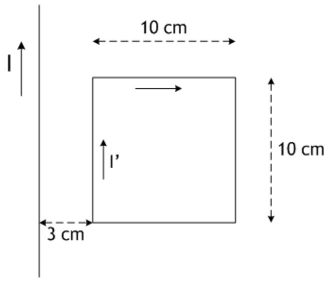
b) No, no cambiará: el signo de la carga nada tiene que ver con los argumentos que se han empleado. El signo de q influye en el sentido de la fuerza **F** en la expresión de Lorentz, pero eso carece de importancia cuando estamos hablando de que suceda $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

MODELO 02

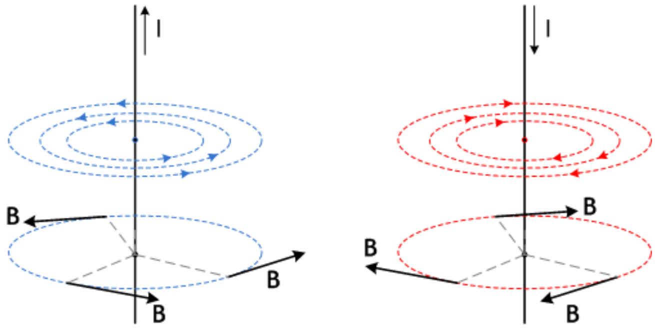
B2.- Sea un conductor rectilíneo y de longitud infinita, por el que circula una intensidad de corriente I = 5 A. Una espira cuadrada de lado a = 10 cm está colocada con dos de sus lados paralelos al conductor rectilíneo, y con su lado más próximo a una distancia d = 3 cm de dicho conductor. Si la espira está recorrida por una intensidad de corriente I' = 0,2 A en el sentido que se indica en la figura, determine:

a) El módulo, la dirección y el sentido del campo magnético creado por el conductor rectilíneo en cada uno de los lados de la espira paralelos a dicho conductor.

b) El módulo, la dirección y el sentido de la fuerza ejercida sobre cada uno de los lados de la espira paralelos al conductor rectilíneo.



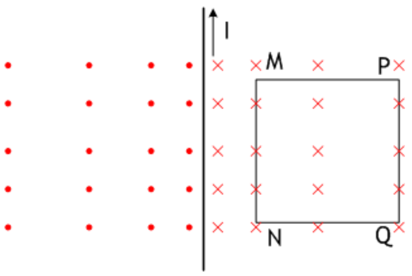
a) El campo creado por el conductor rectilíneo indefinido debe ser familiar: sus líneas de campo son circulares, centradas en puntos del hilo y el sentido del campo debe ser el adecuado para que, al girar según ese sentido en una línea de campo, un destornillador avance en la dirección de la corriente. La figura muestra cómo sería ese campo, representando algunas de las líneas de campo y los vectores **B** en algunos puntos.



Conocemos también el módulo del campo creado por un conductor rectilíneo indefinido, dado por

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \qquad (1)$$

donde r es la distancia al conductor del punto donde se mide el campo: el radio de la línea de campo que pase por allí.



Naturalmente, podemos aplicar lo anterior a cualquier punto de la espira. Como todos los puntos del lado MN de ésta distan lo mismo del conductor, parece claro que **B medirá lo mismo en todos ellos**. Ese campo estará dirigido hacia dentro del papel, tal como sucede en todos los puntos de la figura a la derecha del conductor; a la izquierda de éste, el campo se dirige hacia el lector. Esto está recogido en la figura de la izquierda, donde también puede verse que, por idénticas razones, el campo **B será el mismo en todos los puntos del lado PQ**, y estará igualmente dirigido hacia dentro del papel, pero será menor que en el lado MN. Llamando $\mathbf{B_{MN}}$ al campo en el lado MN, y $\mathbf{B_{PQ}}$ al que existe en el lado PQ, las medidas de ambos serán, tomando datos del enunciado, y usando (1):

$$B_{MN} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{MN}} = \frac{4\pi.10^{-7}.5}{2\pi.0,03} = \mathbf{3,33.10^{-5}\ T} \qquad (2)$$

$$B_{PQ} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{PQ}} = \frac{4\pi.10^{-7}.5}{2\pi.0,13} = \mathbf{7,69.10^{-6}\ T} \qquad (3)$$

b) Se trata ahora de calcular la fuerza sobre los lados MN y PQ de la espira. En principio, parece una aplicación sencilla de la expresión conocida para la interacción (atracción o repulsión) entre corrientes indefinidas rectilíneas y paralelas:

$$F = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi d} l \qquad (4)$$

donde I e I' son los valores de las corrientes; d es la distancia entre ambas y l la longitud de los lados MN o PQ, en el caso que nos ocupa. Sin embargo, ni NM ni PQ son indefinidas, aunque sí son rectilíneas y paralelas al conductor de la izquierda. ¿Deberíamos preocuparnos por esto?

La respuesta es que no: el campo creado por el conductor indefinido en los segmentos de espira MN y PQ es, sin duda, el dado por (1), y eso garantiza la validez de (4) para hallar la fuerza sobre MN o sobre PQ. Otra cosa sería la discusión de la fuerza sobre un trozo de conductor rectilíneo de la longitud de MN o de PQ, en la que (4) plantearía dificultades.

Aplicamos, pues, (4) para hallar la fuerza sobre MN: ya que I' tiene el mismo sentido que I, se trata de corrientes del mismo sentido, **que se atraerán**, como sabemos. La fuerza sobre MN será de atracción hacia el conductor indefinido y valdrá

$$F_{MN} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi d_{MN}} l = \frac{4\pi.10^{-7}.5.0,2}{2\pi.0,03}.0,1 = \mathbf{6,67.10^{-7}\ N}$$

En cambio, la corriente I' en PQ es de sentido contrario a la del conductor indefinido: la fuerza sobre PQ será **repulsiva** y de valor

$$F_{PQ} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi d_{PQ}} l = \frac{4\pi.10^{-7}.5.0,2}{2\pi.0,13}.0,1 = \mathbf{1,54.10^{-7}\ N}$$

¿Qué pasa con la fuerza sobre los lados MP o NQ? La expresión (4) no puede usarse ahora, ya que el campo creado por el conductor indefinido en MP o NQ no es constante, de modo que el cálculo de la fuerza requeriría integración.

SEPTIEMBRE 02

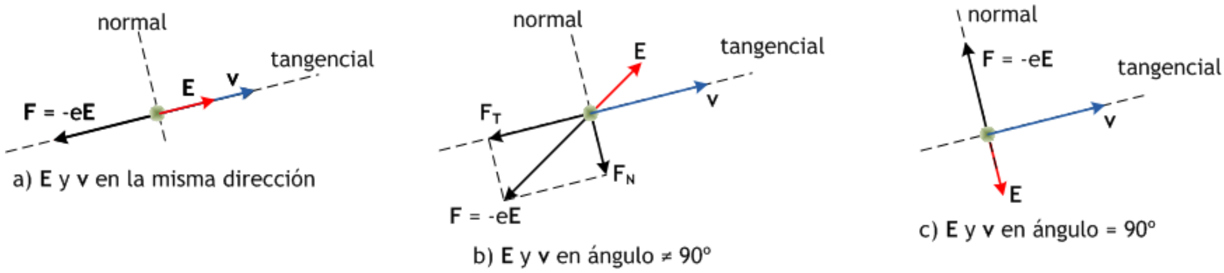
C2.– Un electrón se mueve con velocidad v en una región del espacio donde coexisten un campo eléctrico y un campo magnético, ambos estacionarios. Razone si cada uno de estos campos realiza o no trabajo sobre la carga.

La fuerza sobre el electrón estará dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = -e\mathbf{E} - e\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

suma de las acciones eléctrica y magnética. Por supuesto, sabemos que los vectores **E** y **B** son perpendiculares, como sucede en cualquier punto del campo electromagnético.

De estas dos fuerzas, la eléctrica $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ es, en general, una fuerza con componentes tangencial y normal; aunque pudiera ocurrir, en situaciones excepcionales, que fuese exclusivamente tangencial o exclusivamente normal. Todo ello depende del ángulo entre la velocidad **v** y el campo **E** en el punto en que se halle la partícula: en la figura, mostramos



las posibilidades que, salvo matices, pueden plantearse de hecho. Como puede verse,

a) caso en que **v** y **E** coinciden en dirección. Entonces la fuerza $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ es exclusivamente **tangencial** en ese punto;
b) caso en que **v** y **E** forman un ángulo no recto. Entonces la fuerza $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ tiene componentes **tangencial** y **normal**. Este caso sería el más frecuente.
c) caso en que **v** y **E** son perpendiculares. Entonces la fuerza $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ es exclusivamente **normal** en ese punto.

En cuanto a la fuerza magnética, $\mathbf{F_m} = -e\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$, su dirección **siempre** es perpendicular a la velocidad **v**, ya que implica el producto vectorial $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$. En consecuencia, la fuerza $\mathbf{F_m}$ siempre es una fuerza **normal**.

Recordemos ahora principios básicos de mecánica de la partícula: **las fuerzas normales que actúan sobre una partícula no hacen trabajo sobe ella**. Dicho de otra manera, **todo el trabajo que recibe una partícula lo realizan las fuerzas tangenciales que actúan sobre ella**.

Nuestra conclusión parece ahora clara:

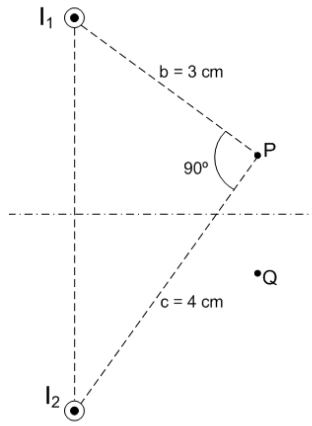
La fuerza eléctrica $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$, en general, **realiza trabajo sobre el electrón**. Excepcionalmente, en un supuesto como el recogido en la situación c), podría suceder que no hubiese tal trabajo.

La fuerza magnética $\mathbf{F_m} = -e\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ **nunca realiza trabajo**, porque siempre es un fuerza normal.

Como corolario, hago notar que estos resultados implican cosas muy interesantes: en general, un campo eléctrico **E** hará que cambie la **dirección** y el **módulo** de la velocidad del electrón; naturalmente, los cambios de módulo significan cambios de energía cinética (tanto como el trabajo recibido). Excepcionalmente, como en la situación a), sólo cambiará el módulo de la velocidad; en la situación c), sólo cambiará la dirección, quedando el módulo intacto. Dicho de manera muy compacta: un campo eléctrico **E**, en general, **desvía y acelera**. Ocasionalmente, puede que **sólo desvíe** o que **sólo acelere**. Nótese que un campo eléctrico **siempre cambia la velocidad de la partícula cargada, el electrón, de algún modo.**

Un campo magnético, en cambio, no puede modificar el módulo de la velocidad del electrón: **sólo puede desviarle**. Ocasionalmente, como sabemos, puede que no haga nada, cuando **v** y **B** tiene la misma dirección.

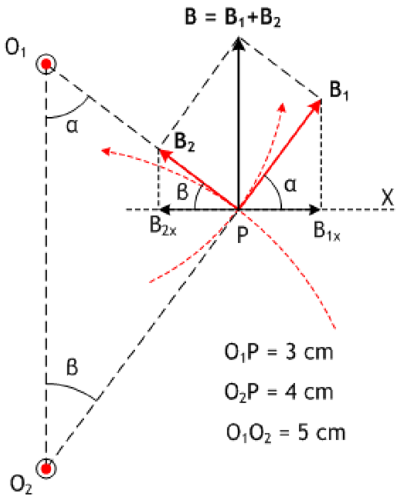
SEPTIEMBRE 02



B1.– En la figura se representan dos hilos conductores rectilíneos de gran longitud que son perpendiculares al plano del papel y llevan corrientes de intensidades I_1 e I_2 de sentidos hacia el lector.

a) Determine la relación entre I_1 e I_2 para que el campo magnético B en el punto P sea paralelo a la recta que une los hilos indicada en la figura.

b) Para la relación entre I_1 e I_2 obtenida anteriormente, determine la dirección del campo magnético B en el punto Q (simétrico del punto P respecto del plano perpendicular a la citada recta que une los hilos y equidistante de ambos).



a) La figura recoge la situación que demanda el enunciado. En ella deben distinguirse, para comprender la situación final:

— la línea de campo campo magnético creado por el hilo 1 en el punto P. Se trata de un círculo, en el plano del papel, con centro en el hilo y radio 3 cm; debe recorrerse en sentido antihorario. El campo $\mathbf{B_1}$ creado por el hilo 1 en P es tangente a esta línea, como se muestra.

— la línea de campo campo magnético creado por el hilo 2 en el punto P. Se trata de un círculo, en el plano del papel, con centro en el hilo y radio 4 cm; debe recorrerse en sentido antihorario. El campo $\mathbf{B_2}$ creado por el hilo 2 en P es tangente a esta línea, como se muestra.

— El campo en P, finalmente, se calcula aplicando el principio de superposición: los campos se suman. Así, $\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}$.

— El triángulo O_1O_2P, en el plano del papel, es rectángulo; los ángulos en O_1 y O_2 se han llamado respectivamente α y β.

Las medidas de los vectores $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ se siguen de

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (1)$$

expresión familiar del campo creado por una corriente rectilínea e indefinida. Aplicándola a estos supuestos, tenemos:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi .0,03} \quad (2); \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi .0,04} \quad (3)$$

Ahora, para que el campo **B** en P sea finalmente paralelo a la línea O_1O_2, **las componentes horizontales de B_1 y B_2 deben anularse**. Eso es posible porque, como se ve, tienen sentidos opuestos; bastará con que midan lo mismo. Se han denominado, respectivamente, B_{1x} y B_{2x}, ya que llevan la dirección horizontal que habitualmente es la de ese eje. La observación cuidadosa de la figura permitirá entender que los ángulos α y β aparecen de nuevo al buscar estas componentes; de ella se deduce que

$$B_{1x} = B_1 \cos\alpha \quad ; \quad B_{2x} = B_2 \cos\beta \qquad (4)$$

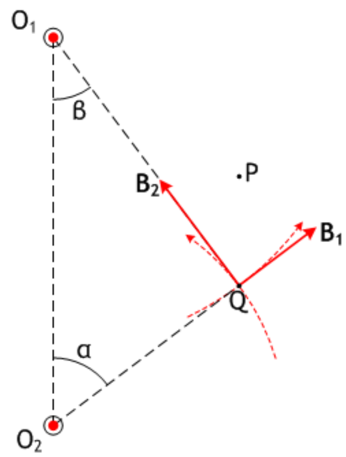
y, por otro lado, en el triángulo O_1O_2P

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{4}{5} \qquad (5)$$

de modo que, si debe cumplirse $B_{1x} = B_{2x}$, empleando (3), (4) y (5) se sigue que

$$B_{1x} = B_{2x} \quad \Rightarrow \quad B_1 \cos\alpha = B_2 \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_0 I_1}{2\pi .0,03}\frac{3}{5} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi .0,04}\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I_1 = I_2}$$

es decir, ambas corrientes deben tener el mismo valor.



b) La situación es perfectamente simétrica con lo que sucede en el punto P, cambiando el papel que juegan los campos $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$: las respectivas componentes horizontales se anulan de nuevo, exactamente como sucedió en P. De nuevo, por tanto, el campo **B** resultante en Q lleva **la dirección de la línea O_1O_2 que une los hilos**. De hecho, como es fácil de comprobar, es exactamente el mismo campo que en P.

SEPTIEMBRE 03

C3.— Una partícula de carga positiva q se mueve en la dirección del eje de las X con una velocidad constante v = a **i y entra en una región donde existe una campo magnético de dirección eje Y y módulo constante B** = b **j.**

a) Determine la fuerza ejercida sobre la partícula en módulo, dirección y sentido.

b) Razone qué trayectoria seguirá la partícula y efectúe un esquema gráfico.

a) Un caso sencillo de empleo de la fuerza de Lorentz sobre una partícula en un campo magnético

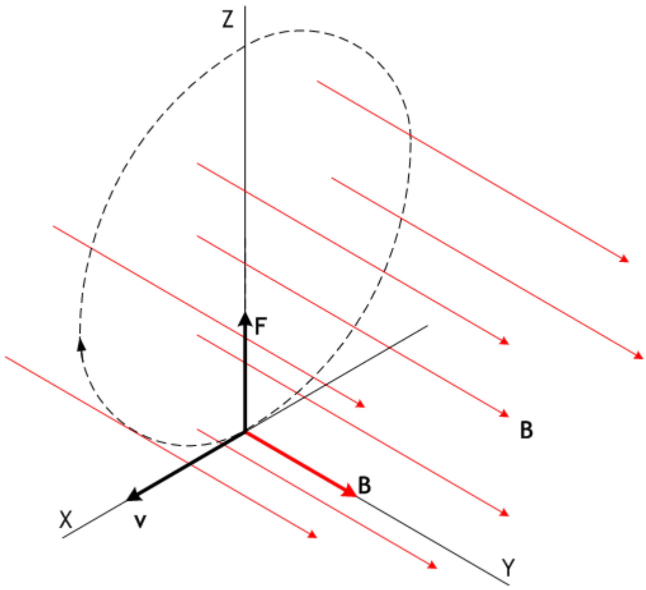
$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

que, además, es uniforme. Con toda la información disponible, el cálculo es inmediato:

$$\mathbf{F} = q\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = qab\,\mathbf{k}$$

resultando una fuerza en la dirección del eje Z, sentido positivo.

b) Obsérvese en la figura la dirección y sentido de todos los vectores en el momento que se describe: puede verse con claridad que, siendo **v** y **B** perpendiculares, estamos ante una aplicación más del movimiento de giro uniforme de una carga en un campo magnético uniforme; en nuestro caso, el giro sucede en el plano XZ. El sentido positivo de **F** en el eje Z, junto con el sentido igualmente positivo de **v**, en el eje X, dejan bien claro cómo va a girar la partícula: lo hará en **sentido horario**, tal como se muestra en la figura.



MODELO 04

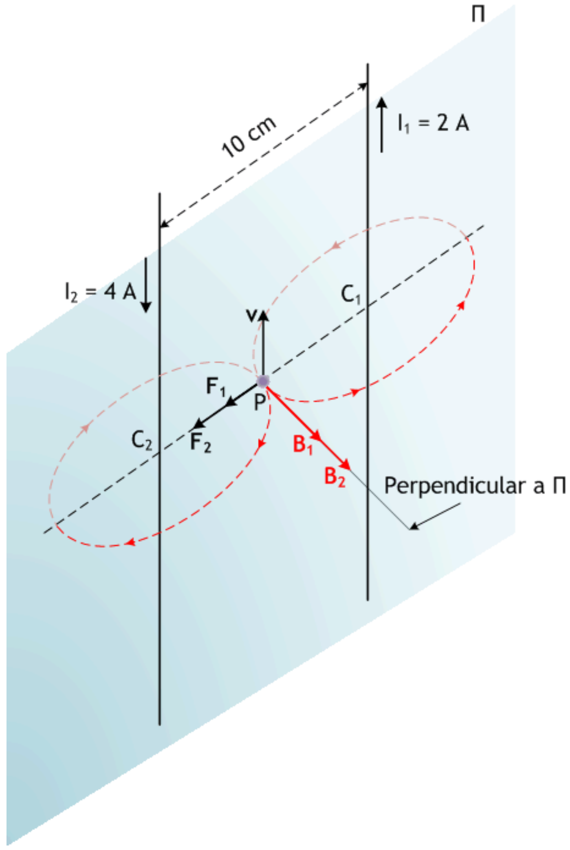
A2.– Por dos hilos conductores, rectilíneos y paralelos, de gran longitud, separados una distancia de 10 cm, circulan dos corrientes de intensidades 2 A y 4 A, respectivamente, en sentidos opuestos. En un punto P del plano que definen los conductores, equidistante de ambos, se introduce un electrón con una velocidad de 4.10^4 m/s paralela y del mismo sentido que la corriente de 2 A. Determine:

a) El campo magnético en la posición P del electrón.

b) La fuerza magnética que se ejerce sobre el electrón situado en P.

Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N A^{-2}; Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}6.10^{-19}$ C

a) El plano Π es el que forman los dos conductores, que hemos llamado I_1 e I_2; los detalles sobre ellos pueden verse con facilidad en la figura. El punto P en el que se introduce el electrón es medio entre los puntos C_1 y C_2 de los hilos; la distancia C_1C_2 = 10 cm y las distancias $C_1P = C_2P$ = 5 cm.



El campo $\mathbf{B_1}$ creado por el hilo I_1 en el punto P es tangente en ese punto a un círculo centrado en C_1 y de radio $r_1 = C_1P$; ya que la corriente I_1 se ha imaginado hacia arriba, la línea de campo circular debe recorrerse en sentido antihorario, como se muestra en la figura. Así, $\mathbf{B_1}$ resulta perpendicular al plano Π, dirigido hacia el lector. Su módulo es sencillo:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = 2.10^{-7}\frac{2}{0{,}05} = 8.10^{-6}\ \text{T} = 8\ \mu\text{T}$$

De modo semejante, el campo $\mathbf{B_2}$ creado por el hilo I_2 en el punto P es tangente en ese punto a un círculo centrado en C_2 y de radio $r_2 = C_2P$. Como la corriente I_2 se ha supuesto hacia abajo, la línea de campo circular debe recorrerse en sentido horario, y $\mathbf{B_2}$ resulta perpendicular al plano Π, dirigido hacia el lector, con la misma dirección y sentido que $\mathbf{B_1}$. El módulo de $\mathbf{B_2}$ es también inmediato:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = 2.10^{-7}\frac{4}{0{,}05} = 16.10^{-6}\ \text{T} = 16\ \mu\text{T}$$

Finalmente, el campo en P será $\quad \mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}$

y, con los resultados obtenidos, es sencillo comprender que **B** llevará la misma dirección y sentido que comparten $\mathbf{B_1}$ **y** $\mathbf{B_2}$; será, por tanto, perpendicular al plano Π en el punto P, dirigido hacia el lector y de módulo

$$B = B_1 + B_2 = 24\ \mu\text{T}$$

Si miramos la figura con atención podemos ver un triedro trirrectángulo que puede usarse como sistema de referencia XYZ: estaría formado por la dirección de **B** en el punto P como eje X, la dirección C_1C_2 como eje Y, y la dirección de la velocidad **v** del electrón en P, vertical y hacia arriba (como I_1), como eje Z.

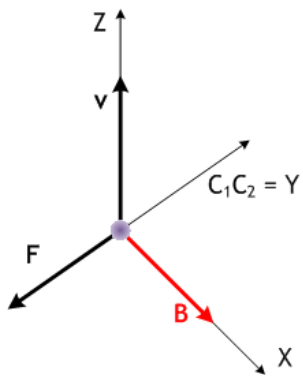
Usando ese sistema de referencia, que se muestra abajo, la respuesta al apartado a) sería

$$\mathbf{B} = 24\mathbf{i}\ \mu\text{T}$$

b) Bastaría aplicar la expresión de la fuerza magnética sobre una carga q con velocidad **v** en un punto en el que el campo magnético es **B**:

$$\mathbf{F} = q\ \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$$

donde $\mathbf{v} = 4.10^4\mathbf{k}$ m/s, en nuestro sistema de referencia, igual que $\mathbf{B} = 24\mathbf{i}\ \mu$T, como ya hemos visto: ambos vectores están recogidos en la figura, al lado. La fuerza sobre el electrón resulta inmediata: recordando que $q = -e = -1{,}6.10^{-19}$ C, será



$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = -e\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = -1{,}6.10^{-19}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 4.10^4 \\ 24.10^{-6} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1{,}54.10^{-19}\,\mathbf{j}\ \text{N}$$

en la dirección del eje Y, en sentido negativo: aunque el producto vectorial $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ llevaría el sentido positivo del eje Y, el valor negativo de la carga del electrón invierte el sentido de la fuerza.

Naturalmente, podríamos haber calculado el valor de la fuerza que aplica **cada hilo** sobre el electrón, con expresiones que hubiesen sido, respectivamente, $\mathbf{F_1} = q\ \mathbf{v}\wedge\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{F_2} = q\ \mathbf{v}\wedge\mathbf{B_2}$, para sumar después ambas fuerzas y obtener $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, el mismo resultado final. Las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ se muestran en la primera figura, y hubiesen resultado, respectivamente,

$$\mathbf{F_1} = -0{,}51.10^{-19}\mathbf{j}\ \text{N}; \qquad \mathbf{F_1} = -1{,}02.10^{-19}\mathbf{j}\ \text{N}$$

de manera que su suma ofrezca el resultado final que ya conocemos.

SEPTIEMBRE 04

C4.– En una región del espacio existe un campo magnético uniforme dirigido en el sentido negativo del eje Z. Indique mediante un esquema la dirección y el sentido de la fuerza que actúa sobre una carga, en los siguientes casos:

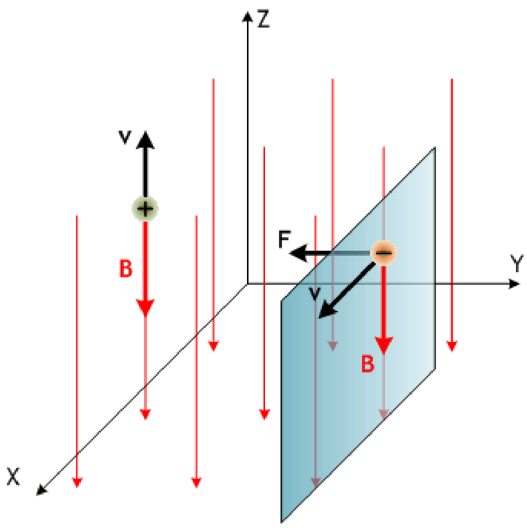
a) La carga es positiva y se mueve en el sentido positivo del eje Z.

b) La carga es negativa y se mueve en el sentido positivo del eje X.

La fuerza sobre la carga será la conocida fuerza magnética $\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$. El campo magnético puede escribirse $\mathbf{B} = -B\mathbf{k}$ T en los dos casos, para que resulte un vector uniforme en el sentido negativo del eje Z. Así, queda entrar en esa expresión con los datos acerca de q y de su velocidad:

a). Si la carga es positiva, $q > 0$, y su velocidad lleva la dirección del eje Z, sentido positivo, será $\mathbf{v} = v\mathbf{k}$ m/s. Siendo los vectores **v** y **B** de la misma dirección, su producto vectorial será **nulo**, así que no se observará fuerza sobre la carga. En efecto,

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = q\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} = \mathbf{0}\ \text{N}$$



b) Si la carga es negativa, $q < 0$, y su velocidad es en el sentido positivo del eje X, $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ m/s, debemos considerar el plano que forman **v** y **B**, que resultaría el plano XZ. El producto vectorial $\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$ llevaría la dirección del eje Y, sentido positivo. El signo negativo de la carga invertiría el sentido de la fuerza, que acabaría en la dirección del eje Y, sentido negativo. En efecto,

$$\mathbf{F} = -q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = q\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} = -q(Bv\,\mathbf{j}) = -qvB\,\mathbf{j}\ \text{N}$$

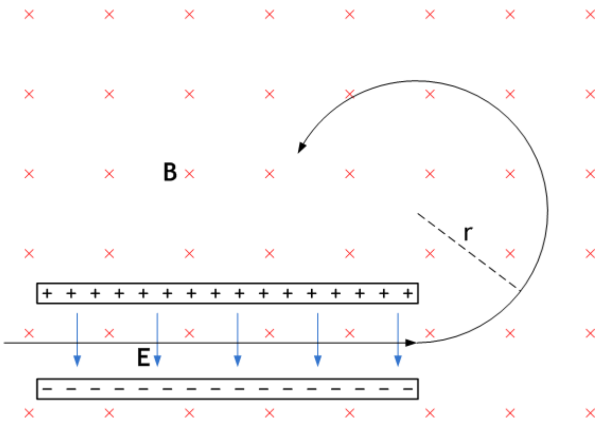
MODELO 05

A2.— Una partícula cargada pasa sin ser desviada de su trayectoria rectilínea a través de dos campos, eléctrico y magnético, perpendiculares entre sí. El campo eléctrico está producido por dos placas metálicas (situadas a ambos lados de la trayectoria) separadas 1 cm y conectadas a una diferencia de potencial de 80 V. El campo magnético vale 0,002 T. A la salida de las placas, el campo magnético sigue actuando perpendicularmente a la trayectoria de la partícula, de forma que ésta describe una trayectoria circular de 1,14 cm de radio. Determine:

a) La velocidad de la partícula en la región entre las placas.

b) La relación masa/carga de la partícula.

Un problema que puede parecer complejo a causa de la acumulación de circunstancias implicadas, pero que no lo es tanto si se procede a discutirlo ordenadamente. Comencemos por considerar cómo pasa la partícula cargada, sin sufrir desviación, atravesando la zona entre las placas metálicas en la que tenemos los campos eléctrico y magnético: hemos imaginado el campo eléctrico hacia abajo, en el plano del papel, y el campo magnético perpendicular al plano del papel y dirigido hacia dentro del mismo; además, tal como señala el enunciado, el campo eléctrico **E** es uniforme y existe únicamente en el espacio entre las placas, mientras que el campo magnetico **B** es igualmente uniforme y existe dentro y fuera del espacio entre las placas.



La figura inmediata muestra la trayectoria completa que propone el ejercicio, formada por una línea recta entre las placas, cuando la partícula cargada desarrolla un movimiento rectilíneo y uniforme sin sufrir modificación alguna en la velocidad, seguida de una trayectoria circular cuando, al salir de las placas, queda en un campo magnético uniforme y con una velocidad perpendicular al mismo.

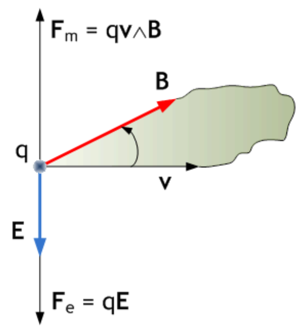
a) Entendida entonces la situación en términos globales, discutámosla en detalle en las dos zonas de interés, primero entre las placas y después al salir de ellas. Entre las placas, y suponiendo que la carga de la partícula sea positiva, existirán dos fuerzas sobre ella:

1) la fuerza eléctrica, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, dirigida verticalmente y hacia abajo.

2) la fuerza de Lorentz magnética, $\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$, que será igualmente vertical, pero dirigida hacia arriba (**v** está en el plano del papel, hacia la derecha; **B** va hacia dentro del papel: basta considerar el producto vectorial para comprender la dirección y el sentido de **F**).

Para que no exista desviación, como hemos visto ya en otras ocasiones, es preciso que ambas fuerzas, de igual dirección y sentido opuesto, se anulen. Para ello, sus módulos deberán ser iguales

$$qE = qvB \qquad (\mathbf{v} \text{ y } \mathbf{B} \text{ forman ángulo de 90º, cuyo seno es 1})$$



de manera que la velocidad tendría que ser exactamente $$v = \frac{E}{B} \qquad (1)$$

el cociente entre los módulos de **E** y **B**, presentes en el enunciado: B es 0,002 T, sin más vueltas, y E no aparece directamente, sino a través de la diferencia de potencial entre las placas, de 80 V. Para conseguir E, hay que recordar que, en un campo uniforme entre placas, la relación entre la intensidad de campo y la diferencia de potencial entre las placas es muy sencilla

$$V = E.d$$

donde d, distancia entre placas, es en nuestro caso d = 1 cm = 10^{-2} m. De esta manera, es inmediato obtener

$$E = \frac{V}{d} = \frac{80}{0,01} = 8000\ \frac{V}{m} = 8000\ \frac{N}{C}$$

y sólo resta ir a (1) para responder a la primera pregunta $$v = \frac{E}{B} = \frac{8000}{0,002} = \mathbf{4.10^6\ m/s}$$

acerca de la velocidad de la partícula cargada.

b) La segunda cuestión es más rápida, una vez que conocemos la velocidad de la carga. Como sabemos, una carga q moviéndose con velocidad **v** perpendicular a un campo magnético uniforme **B** describe un giro de radio r dado por

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad (2)$$

en nuestro caso, además, considerando las direcciones que hemos supuesto para **E** y **B**, se trataría de un giro en sentido antihorario, tal como aparece en la primera figura. Puesto que nos dicen que el radio de giro es r = 1,14 cm, y dado que conocemos los valores de B y de v, parece claro que podemos despejar directamente la relación masa/carga (m/q) de la partícula, que tomaría el valor

$$\frac{m}{q} = \frac{rB}{v} = \frac{1{,}14.10^{-2}.0{,}002}{4.10^6} = 5{,}7.10^{-12}\ \frac{kg}{C}$$

y habríamos terminado. Acaso se pueda hacer una rápida reflexión acerca del valor que acabamos de obtener: ¿qué clase de partícula puede tener esa relación carga/masa?. La respuesta podría orientarse hacia una partícula elemental, como un protón, por ejemplo, pero las cuentas dan un resultado del orden 10^{-8} kg/C; mucho mejor va la cosa con un electrón, que resulta tener un cociente masa/carga $5{,}69.10^{-12}$ kg/C: se trata entonces, seguramente, de un electrón, o acaso de un positrón, si se quiere pensar en carga positiva.

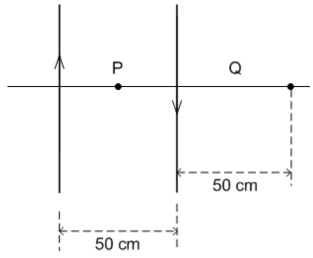
MODELO 05

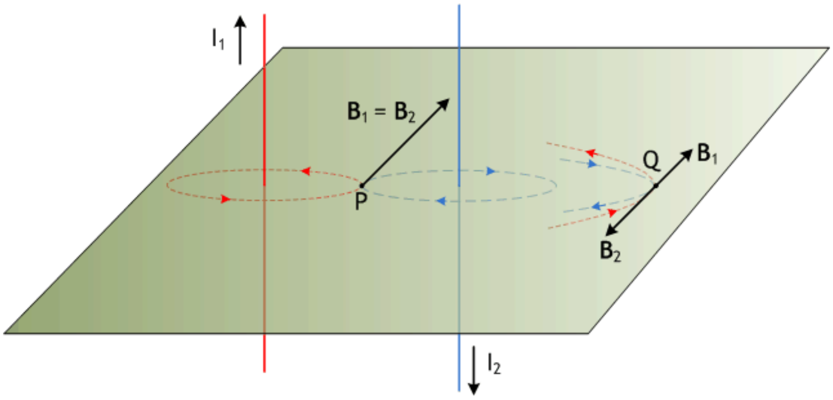
B2.— Dos hilos conductores de gran longitud, rectilíneos y paralelos, están separados una distancia de 50 cm, tal como se indica en la figura. Si por los hilos circulan corrientes iguales de 12 A de intensidad y sentidos opuestos, calcule el campo magnético resultante en los puntos indicados en la figura:

a) Punto P equidistante de ambos conductores.

b) Punto Q situado a 50 cm de un conductor y a 100 cm del otro.

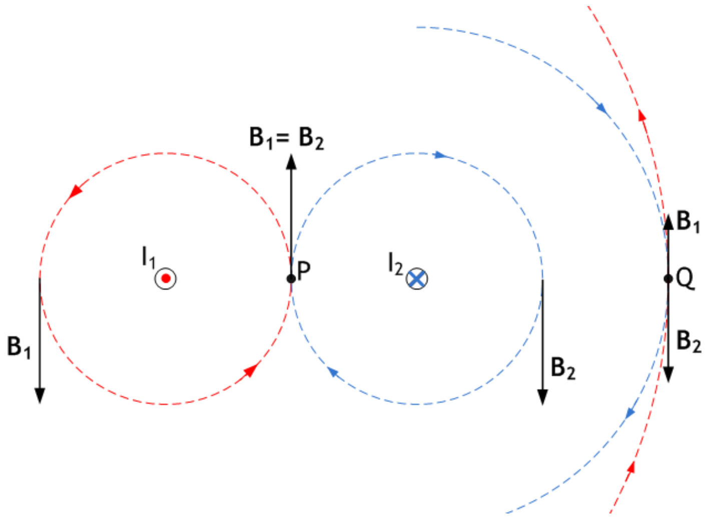
Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N.A^{-2}





Llamaremos 1 al hilo situado a la izquierda de la figura, que lleva corriente hacia arriba. El campo creado por este hilo en los puntos P y Q es perpendicular al plano del papel y hacia dentro del mismo, como en todos los puntos del plano del papel a la derecha de ese hilo. En cambio, el hilo 2, situado a la derecha del hilo 1, lleva corriente hacia abajo: eso implica que el campo creado por ese hilo en P está dirigido hacia dentro del papel, pero en Q está dirigido hacia fuera del papel.

Un punto de vista útil a menudo es el que recoge la figura que aparece al lado, en la que se representan los hilos perpendicularmente al plano del papel: uno de ellos — el hilo 1 — con corriente dirigida hacia el lector (se representa con el símbolo ⊙) y el otro — el hilo 2 — con corriente dirigida hacia dentro del papel (se representa con ⊗). Los puntos P y Q están ahora en el plano del papel, y se han dibujado las líneas de campo de los campos $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ creados por ambos hilos y que pasan por P y por Q.



Así, puede verse que las líneas de campo de $\mathbf{B_1}$ se recorren en sentido antihorario (de modo que un sacacorchos girando en ese sentido avanzaría hacia el lector), mientras que las de $\mathbf{B_2}$ se recorren en sentido contrario.

a) Como consecuencia, en P los dos campos, $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ coinciden en dirección y sentido, de modo que si regresamos al punto de vista de arriba, irían ambos hacia dentro del papel. Por otro lado, ya que I_1 e I_2 tienen el mismo valor, y dado que P equidista 25 cm de los dos hilos, es fácil comprender que $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ medirán lo mismo en P: son, pues, vectores iguales. La medida de cualquiera de ellos sería:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{4\pi.10^{-7}.12}{2\pi.25.10^{-2}} = 9{,}6.10^{-6}\ \text{T}$$

y el campo en el punto P mediría el doble de esa cantidad, ya que habría que sumar $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$:

(Punto P) B = **1,92.10^{-5} T**

dirigido hacia dentro del papel, tal como lo representa la figura de arriba.

b) En el punto Q, los dos campos $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ tienen medidas diferentes, ya que este punto está a 50 cm del hilo 2 y a 100 cm del hilo 1; además, los campos tienen sentidos opuestos, con $\mathbf{B_2}$ hacia fuera del papel y $\mathbf{B_1}$ hacia dentro, siempre desde el punto de vista de la figura del enunciado. Los módulos de $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ en Q resultan ser

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{4\pi.10^{-7}.12}{2\pi.1} = 2{,}4.10^{-6}\ \text{T} \qquad ; \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} = \frac{4\pi.10^{-7}.12}{2\pi.50.10^{-2}} = 4{,}8.10^{-6}\ \text{T}$$

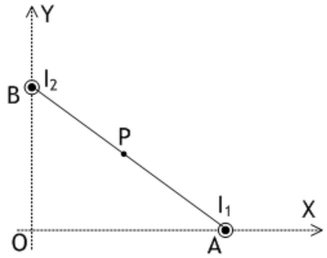
de modo que B_2, como era de esperar, tiene doble medida que B_1. El campo total sería la diferencia entre ambos,

(Punto Q) B = **2,4.10^{-6} T**

e iría dirigido hacia fuera del papel, considerando una vez más el punto de vista del dibujo en el enunciado.

MODELO 06

B2.– Dos conductores rectilíneos, indefinidos y paralelos, perpendiculares al plano XY, pasan por los puntos A(80,0) y B(0,60) según indica la figura, estando las coordenadas expresadas en centímetros. Las corrientes circulan por ambos conductores en el mismo sentido, hacia fuera del plano del papel, siendo el valor de la corriente I_1 = 6 A. Sabiendo que $I_2 > I_1$ y que el valor del campo magnético en el punto P, punto medio de la recta que une ambos conductores, es de $B = 12.10^{-7}$ T, determine:



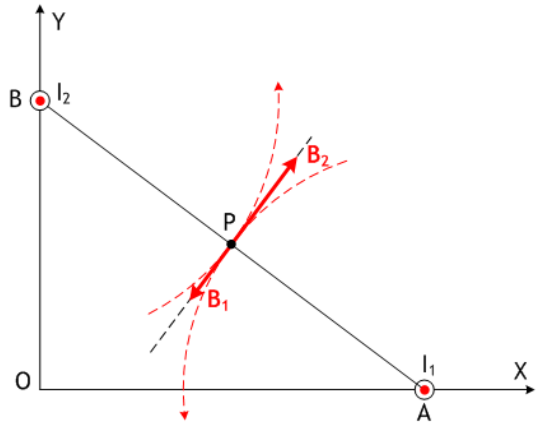
a) El valor de la corriente I_2.

b) El módulo, la dirección y el sentido del campo magnético en el origen de coordenadas O, utilizando el valor de I_2 obtenido anteriormente.

Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N.A^{-2}

a) La distancia AB = 100 cm, ya que es hipotenusa del triángulo AOB. El punto P es el medio de AB, de modo que los segmentos AP = BP = 50 cm = 0,5 m. Las líneas de campo magnético creadas por ambos conductores en el punto P serían circulares, en el plano XY (el del papel), centradas respectivamente en los puntos A y B, y se recorrerían en ambos casos en sentido antihorario, ya que las corrientes se dirigen al lector.

Todo ello aparece recogido en la figura, en la que se muestran los campos $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ creados en P por las corrientes I_1 e I_2. Ya que P es punto a la misma distancia, 50 cm, de ambos hilos, parece claro que el campo $\mathbf{B_2}$ será más intenso en ese punto que $\mathbf{B_1}$, debido a que la corriente I_2 es mayor que I_1, condición impuesta por el enunciado.



En todo caso, $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ tienen la misma dirección (perpendicular a AB) y sentidos opuestos. En consecuencia, el campo total en P será

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}$$

un vector que llevará **esa misma dirección y sentido de $\mathbf{B_2}$**. Su módulo, que nos da el enunciado, es $B = 12.10^{-7}$ T; que debe ser la diferencia entre los módulos de $\mathbf{B_2}$ y $\mathbf{B_1}$:

$$B = B_2 - B_1 \qquad (1)$$

Ahora bien, esos módulos son, respectivamente:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{AP}} \quad ; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{BP}}$$

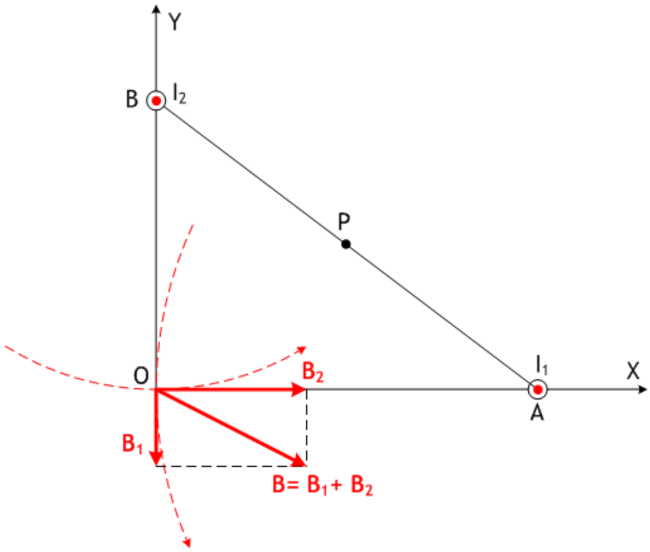
donde I_1 = 6 A; $r_{AP} = r_{BP}$ = 0,5 m; I_2 es desconocida. Como ha de cumplirse (1), bastará entrar con los valores conocidos y despejar I_2:

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{BP}} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{AP}} = 12.10^{-7} \text{ T}$$

es decir, $$2.10^{-7}\frac{I_2}{0,5} - 2.10^{-7}\frac{6}{0,5} = 12.10^{-7} \text{ T} \quad \Rightarrow \quad 4I_2 - 24 = 12 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \mathbf{9\ A}$$

la corriente en el segundo conductor.

b) Conocidas ambas corrientes, la búsqueda del campo en el origen de coordenadas en sencilla. Nótese que I_1 crea en O un campo $\mathbf{B_1}$ en el sentido negativo del eje Y, tangente a una circunferencia con centro en A y que pasa por O, recorrida en sentido antihorario. Del mismo modo, I_2 crea en O un campo $\mathbf{B_2}$ en la dirección del eje X y sentido positivo. La figura, al lado, debería ilustrar suficientemente ambas cosas.



Los campos quedarían, tomando en consideración lo dicho acerca de sus direcciones y sentidos:

$$\mathbf{B_1} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{AO}}\mathbf{j} = -2.10^{-7}\frac{6}{0,8}\mathbf{j} = -1,5.10^{-6}\,\mathbf{j}\text{ T}$$

$$\mathbf{B_2} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{BO}}\mathbf{i} = 2.10^{-7}\frac{9}{0,6}\mathbf{i} = 3,0.10^{-6}\,\mathbf{i}\text{ T}$$

de modo que el campo **B** será

$$\mathbf{B} = 3,0.10^{-6}\,\mathbf{i} - 1,5.10^{-6}\,\mathbf{j}\text{ T}$$

el vector representado en la figura. Su módulo es

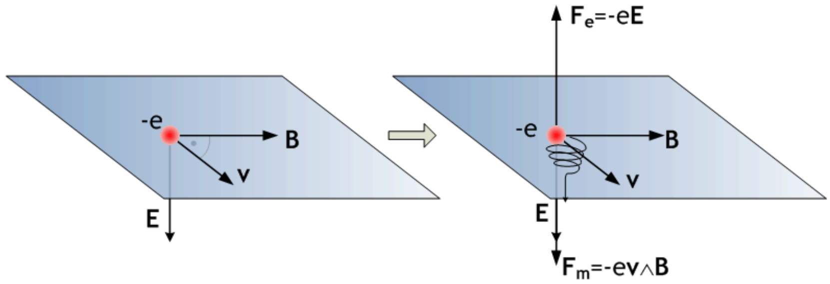
$$B = \sqrt{9.10^{-12} + 2,25.10^{-12}} = \mathbf{3,61.10^{-6}\ T}$$

SEPTIEMBRE 2007

C4.– a) ¿Cuál es la velocidad de un electrón cuando se mueve en presencia de un campo eléctrico de módulo $3,5.10^5$ N/C y de un campo magnético de 2 T, ambos mutuamente perpendiculares y, a su vez, perpendiculares a la velocidad del electrón, para que éste no se desvíe?

b) ¿Cuál es el radio de la órbita descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico?

Datos: Masa del electrón, $m_e = 9,1\times10^{-31}$ kg; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6.10^{-19}$ C

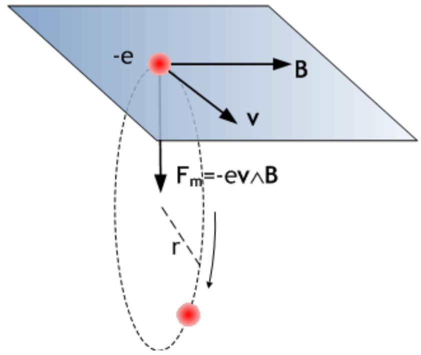


a) Una situación que hemos encontrado frecuentemente: el electrón está bajo las fuerzas eléctrica y magnética, que deben anularse, de modo que su trayectoria no sufra alteraciones. Para que esto sea posible, con independencia de la carga implicada, los vectores campo eléctrico **E**, campo magnético **B** y velocidad de la carga **v** deben cumplir la relación

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

que, en módulo, queda tan sencilla como E = vB. De este modo, imaginando una situación como la que se representa en la figura, la velocidad del electrón debería ser

$$v = \frac{E}{B} = \frac{3,5.10^5}{2} = \mathbf{1,75.10^5\ m/s}$$

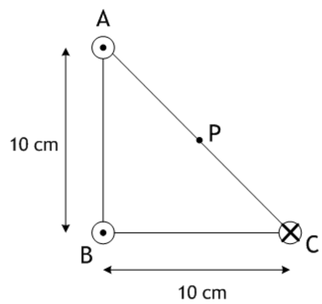


b) Si se elimina el campo eléctrico desaparece la fuerza $\mathbf{F_e} = -e\mathbf{E}$ sobre el electrón, quedando sólo la fuerza magnética. Eso nos deja el escenario bien conocido de una partícula cargada en un campo magnético uniforme y con velocidad perpendicular al mismo: sabemos que la partícula describe un **giro uniforme**, que se ha representado en la figura adjunta. El radio de la órbita se consigue con facilidad

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{9,1.10^{-31}.1,75.10^5}{1,6.10^{-19}.2} = \mathbf{4,98.10^{-7}\ m}$$

Septiembre 07

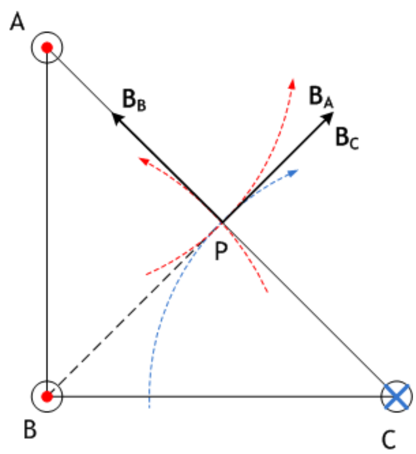
A2.– Tres hilos conductores rectilíneos, muy largos y paralelos, se disponen como se muestra en la figura (perpendiculares al plano del papel pasando por los vértices de un triángulo rectángulo). La intensidad de corriente que circula por todos ellos es la misma, I = 25 A, aunque el sentido de la corriente del hilo C es opuesto al de los otros dos hilos. Determine:



a) El campo magnético en el punto P, punto medio del segmento AC.

b) La fuerza que actúa sobre una carga positiva $Q = 1,6.10^{-19}$ C si se encuentra en el punto P moviéndose con una velocidad de 10^6 m/s perpendicular al plano del papel y con sentido hacia fuera.

Datos: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N A^{-2}



a) En el punto P, del plano del papel, los campos creados por los conductores serán llamados $\mathbf{B_A}$, $\mathbf{B_B}$ y $\mathbf{B_C}$, respectivamente. Se trata de vectores en el plano del papel, tangentes a líneas de campo centradas, respectivamente, en los puntos A, B y C. Para entender los resultados, debe mirarse con atención la figura, considerando en qué sentido deben recorrerse estas líneas de campo: las dos primeras, centradas en A y B, en sentido **antihorario**, de acuerdo con intensidades de corriente hacia fuera del papel; la última, centrada en C, se gira en sentido **horario**, como corresponde a una corriente dirigida hacia dentro del papel.

Obsérvese, entonces que las direcciones y sentidos de $\mathbf{B_A}$ y $\mathbf{B_C}$ coinciden, y forman ángulo de 90º con la dirección de $\mathbf{B_B}$. Los módulos de los tres campos se obtienen de

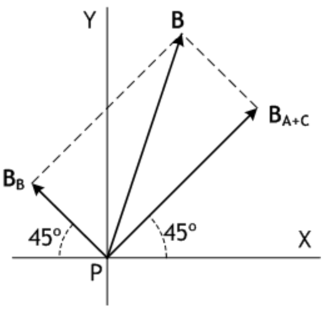
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (1)$$

expresión del campo creado por una corriente rectilínea e indefinida en un punto a distancia r de la misma. Cuando la usemos en los tres casos, pondremos siempre el mismo valor de I = 25 A, idéntica corriente en los tres conductores. En cuanto al valor de r, se tratará, respectivamente, de los segmentos AP, BP y CP: es muy sencillo concluir, ya que ABC es un triángulo rectángulo e isósceles, que esos tres segmentos son iguales y de valor

$$AP = BP = CP = 5\sqrt{2}\ \text{cm}$$

de forma que los tres campos $\mathbf{B_A}$, $\mathbf{B_B}$ y $\mathbf{B_C}$ van a terminar teniendo el mismo módulo, que será

$$B_A = B_B = B_C = \frac{4\pi .10^{-7}.25}{2\pi .0,05\sqrt{2}} = \mathbf{7,07.10^{-5}\ T} \qquad (2)$$



Ahora hemos de sumarlos, para hallar el campo magnético resultante en el punto P:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_A} + \mathbf{B_B} + \mathbf{B_C}$$

y eso puede hacerse con facilidad: empezamos sumando $\mathbf{B_A} + \mathbf{B_C}$, lo que dará un vector de la misma dirección y sentido que ambos, y de módulo doble que (2); llamaremos $\mathbf{B_{A+C}}$ a este vector que, después, sumaremos con $\mathbf{B_B}$. Para hacer esta última suma nos remitimos a la figura, en la que mostramos ambos vectores y un sistema de ejes XY orientados como BA y BC. Es fácil ver que los ángulos de los vectores con el eje X son de 45° (o de 45° en un caso y de −45° en otro, con más propiedad). Así, los vectores pueden escribirse calculando sus respectivas componentes:

$$\mathbf{B_{A+C}} = 2.7,07.10^{-5}\cos 45^\circ\ \mathbf{i} + 2.7,07.10^{-5}\,\text{sen}\,45^\circ\ \mathbf{j} = 10^{-5}\ \mathbf{i} + 10^{-5}\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{B_B} = -7,07.10^{-5}\cos 45^\circ\ \mathbf{i} + 7,07.10^{-5}\,\text{sen}\,45^\circ\ \mathbf{j} = -5.10^{-6}\ \mathbf{i} + 5.10^{-6}\ \mathbf{j}$$

de suerte que el campo finalmente resulta $\quad \mathbf{B} = \mathbf{B_{A+C}} + \mathbf{B_B} = 0,5.10^{-5}\ \mathbf{i} + 1,5.10^{-5}\ \mathbf{j}$

un vector en el plano del papel, de módulo $\quad B = \sqrt{(0,5.10^{-5})^2 + (1,5.10^{-5})^2} = \mathbf{1,58.10^{-5}\ T}$

b) Tal como tenemos las cosas, parece que lo más sencillo en este apartado sería emplear la expresión vectorial de **B** que acabamos de obtener, para usarla en $\mathbf{F} = Q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ y obtener de este modo la fuerza sobre la carga Q. Necesitamos escribir su velocidad **v**, pero eso no plantea dificultad: mide 10^6 m/s y está dirigida perpendicularmente al plano del papel y hacia fuera; eso equivale a decir, según están colocados los ejes XY, en la dirección del eje Z, sentido positivo, de modo que

$$\mathbf{v} = 10^6\ \mathbf{k}\ \text{m/s}$$

y, por tanto, es ya inmediato

$$\mathbf{F} = Q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = 1,6.10^{-19}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 10^6 \\ 0,5.10^{-5} & 1,5.10^{-5} & 0 \end{vmatrix} = 1,6.10^{-19}(-15\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}) = -2,4.10^{-18}\,\mathbf{i} + 8.10^{-19}\,\mathbf{j}\ \text{N}$$

una fuerza que está también en el plano XY, y cuyo módulo es F = $\mathbf{2,53.10^{-18}\ N}$. Aunque no se ha representado, el alumno debe intentar visualizarla, considerando las direcciones de **B**, en el plano del papel, de **v**, perpendicular al plano del papel, y la que llevaría, por tanto, su producto vectorial.

MODELO 09

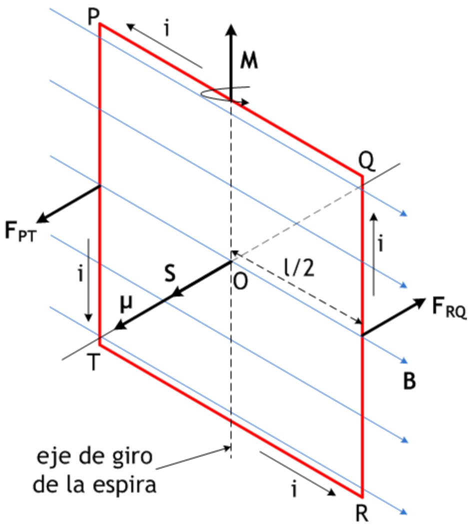
C4.– Una espira cuadrada de 10 cm de lado está recorrida por una corriente eléctrica constante de 30 mA.

a) Determine el momento magnético de la espira.

b) Si esta espira está inmersa en un campo magnético uniforme B = 0,5 T paralelo a dos de sus lados, determine las fuerzas que actúan sobre cada uno de sus lados. Analice si la espira girará o no hasta alcanzar la posición de equilibrio en el campo.

a) El momento magnético de una espira se calcula según

$$\boldsymbol{\mu} = i\,\mathbf{S} \qquad (1)$$



donde el vector superficie **S** tiene el sentido de avance de un sacacorchos o destornillador que gire en la espira en el sentido de la corriente. De este modo, el momento magnético **μ** tiene un sentido que depende del de la corriente en la espira. Hemos supuesto la corriente en la espira PTRQ en sentido antihorario, de modo que los vectores **S** y **μ** tienen el sentido mostrado en la figura. El módulo de **S** es

$$S = 0{,}1 . 0{,}1 = 0{,}01 \text{ m}^2$$

y el momento magnético de la espira resulta

$$\mu = 30.10^{-3}.\ 10^{-2} = \mathbf{3.10^{-4}\ A.m^2}$$

b) Imaginamos el campo magnético uniforme **B** paralelo a los lados QP y TR, como puede verse. Para calcular la fuerza que actúa sobre cada lado de la espira debemos usar

$$\mathbf{F} = i\,\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \qquad (2)$$

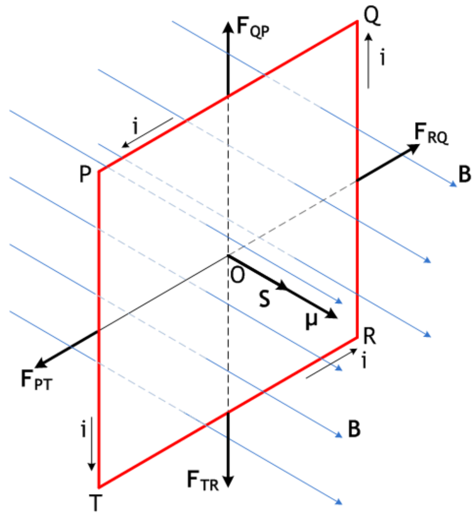
donde **l** = **QP**; **l** = **PT**; **l** = **TR**; **l** = **RQ**, respectivamente en los cuatro lados de la espira: **l**, como sabemos, debe llevar el sentido de la corriente. De este modo, resulta sencillo, observando la figura, concluir que la fuerza sobre los lados QP y TR es nula, ya que los vectores **QP** y **RT** son de la misma dirección que **B**:

$$\mathbf{F}_{QP} = i\,\mathbf{QP} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{F}_{TR} = i\,\mathbf{TR} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

aunque una vez son del mismo sentido y la otra, opuestos: no importa, el producto vectorial es nulo en ambos casos.

La fuerza sobre los lados PT y RQ no es nula; su dirección puede verse en la figura, en la que deben considerarse cuidadosamente los vectores involucrados en los productos vectoriales

$$\mathbf{F}_{PT} = i\,\mathbf{PT} \wedge \mathbf{B} \quad ; \quad \mathbf{F}_{RQ} = i\,\mathbf{RQ} \wedge \mathbf{B}$$



La espira ha girado 90° desde la posición inicial

pero, por razones sencillas, las dos fuerzas medirán los mismo: de hecho, se trata de dos fuerzas iguales y de sentido contrario, que forman un **par de fuerzas**, cuyo efecto sobre la espira es un **momento de giro** que la obliga a rotar sobre el eje de giro señalado en la figura, en el sentido también señalado, el antihorario. El módulo común de estas fuerzas es

$$F_{PT} = F_{RQ} = ilB = 30.10^{-3}.0{,}1.0{,}5 = \mathbf{1{,}5.10^{-3}\ N}$$

y el momento **M** del par de fuerzas tiene como medida el producto de cualquiera de ellas por la longitud del lado de la espira (el brazo del par):

$$M = Fl = 1{,}5.10^{-3}.0{,}1 = \mathbf{1{,}5.10^{-4}\ N.m}$$

¿Qué sucederá, entonces? La espira empezará a girar alrededor del eje indicado. Como consecuencia, las fuerzas sobre los lados de la espira comenzarán también a cambiar, así como el momento de giro (se hará más pequeño, de hecho). Cuando la espira haya **girado 90°**, la situación será la que se recoge en esta segunda imagen: queda para el lector la tarea de comprobar que el campo **B** aplica ahora fuerzas sobre los cuatro lados de la espira, que se anulan dos a dos ($\mathbf{F}_{QP} = -\mathbf{F}_{TR}$; $\mathbf{F}_{RQ} = -\mathbf{F}_{PT}$). No existe ningún momento de giro sobre la espira en esta posición, **que sería de equilibrio**, y a ello se refiere el enunciado. Cosa diferente sería discutir si la espira se queda en esa posición, o si la rebasa debido a la inercia de giro adquirida, que es lo que realmente sucedería: al final, estaría oscilando, salvo rozamientos que lo impidiesen.

Nótese, en cualquier caso, que la situación de equilibrio se tiene cuando el campo **B** y el momento magnético **μ** de la espira tienen la **misma dirección** (no importa si el mismo sentido o no; en realidad, hay dos posiciones de equilibrio). Una manera rigurosa y muy útil de manejar esta idea es recordar que el momento de giro **M** sobre una espira en un campo uniforme **B** se escribe

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{B}$$

de modo que el momento de giro es nulo (la espira está en equilibrio) cuando **μ** y **B** tienen la misma dirección y su producto vectorial se anula.

JUNIO 09

C4.– Analice si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) **Una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme aumenta su velocidad cuando se desplaza en la misma dirección de las líneas del campo.**

b) **Una partícula cargada puede moverse en una región en la que existe un campo magnético y un campo eléctrico sin experimentar ninguna fuerza.**

a) Esto es **falso**. De hecho, un campo magnético no puede alterar el módulo de la velocidad de una partícula cargada que se mueve en su seno; **lo único que puede hacer es desviar su trayectoria**, debido a que las fuerzas magnéticas son siempre fuerzas normales. Pero, además, si la partícula se mueve en la dirección de las líneas del campo, la fuerza magnética $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = \mathbf{0}$, por ser paralelos los vectores **v** y **B**. Por tanto, nuestra partícula cargada **no sufrirá modificación alguna de la velocidad, ni en su módulo ni en su dirección**. Literalmente, se movería como si el campo magnético no existiese.

b) En parte, hemos respondido ya. Para que el campo magnético no aplique fuerza sobre la partícula, **ésta debe moverse en la dirección de las líneas de B**. Cosa diferente es el comportamiento del campo eléctrico **E**, que aplica una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$: esta fuerza no es nula nunca, salvo que $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, b) parecería ser también falso, si consideramos las dos fuerzas de manera individual, intentando que ambas sean nulas.

Existe, no obstante, una alternativa que apuntaría a la existencia de fuerzas magnética y eléctrica que se anulan mutuamente, en unas circunstancias que hemos encontrado repetidamente (véase **JUNIO 97 C1** y **JUNIO 98 C4**, también **MODELO 10 A–C3**, más adelante). Para que esto suceda, debe cumplirse la condición $\mathbf{E} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$, donde **v** es la velocidad de la partícula cargada. Si se cumple esta condición, la fuerza neta sobre la partícula será cero, y b) resultaría **cierto**.

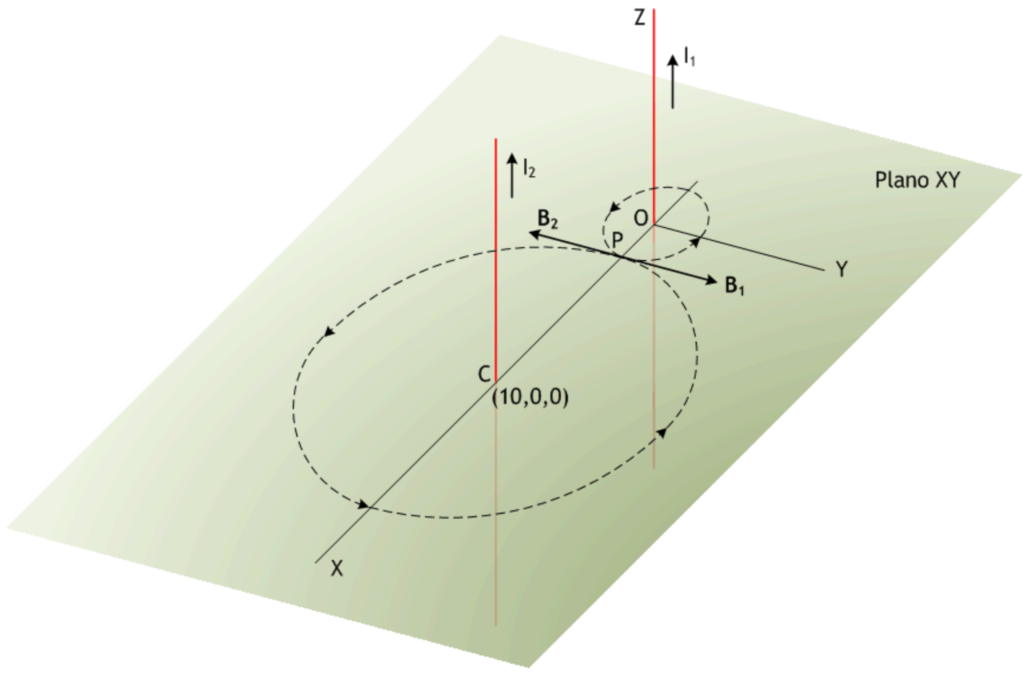
SEPTIEMBRE 09

B2.– Un hilo conductor rectilíneo de longitud infinita está situado en el eje Z y transporta una corriente de 20 A en el sentido positivo de dicho eje. Un segundo hilo conductor, también infinitamente largo y paralelo al anterior, corta al eje X en el punto de coordenada x = 10 cm. Determines:

a) **La intensidad y el sentido de la corriente en el segundo hilo, sabiendo que el campo magnético resultante en el punto del eje X de coordenada x = 2 cm es nulo.**

b) **La fuerza por unidad de longitud que actúa sobre cada conductor, explicando cuál es su dirección y sentido.**

Dato: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N A^{-2}



La situación descrita en el enunciado, en lo que respecta al primer apartado, queda recogida en la figura. Se muestran los dos conductores rectilíneos indefinidos, uno en el eje Z con una corriente I_1; el otro, paralelo al anterior, pasa por el punto C(10,0,0) del eje X y transporta corriente I_2.

Sabemos que I_1 = 20 A, en sentido positivo del eje Z. Se muestra en la figura la línea de campo creada por el conductor I_1, que debe recorrerse en sentido antihorario, acorde con la corriente hacia arriba.

De este modo, en el punto P(2,0,0) al que alude el apartado a), el conductor I_1 crea un campo $\mathbf{B_1}$ como el que se muestra: llevaría la dirección del eje Y, sentido positivo. Para que el campo magnético resultante en P sea nulo, el segundo conductor debe crear en P un campo como $\mathbf{B_2}$, de sentido opuesto a $\mathbf{B_1}$; además, como es lógico, deberán tener el mismo módulo para anularse finalmente.

En consecuencia, la línea de campo creada por I_2 y que pasa por P debe recorrerse en sentido también antihorario, para que $\mathbf{B_2}$ tenga el sentido deseado. **Ambas corrientes van hacia arriba**.

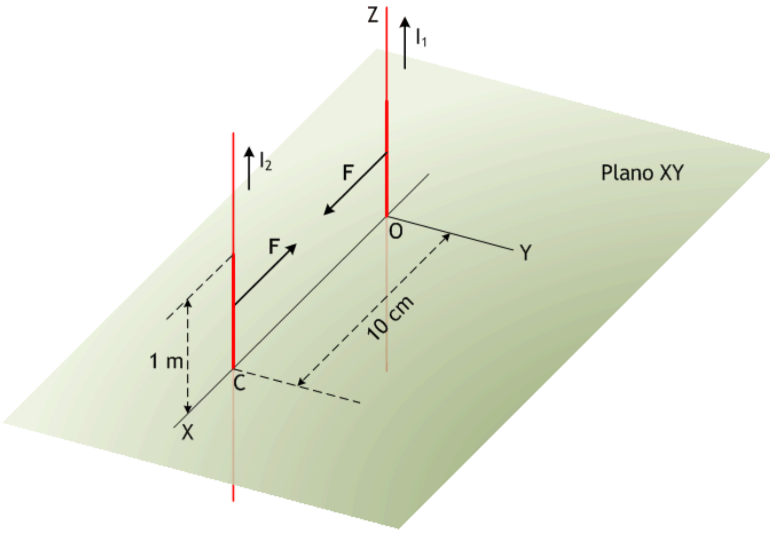
Además, como ya se ha dicho, los módulos de $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ deben ser iguales. Recordando la expresión del campo creado por una corriente rectilínea indefinida en un punto a distancia r de la misma, cuyo módulo es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

se sigue que en nuestro caso debe cumplirse

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{OP}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_{CP}} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{r_{OP}} = \frac{I_2}{r_{CP}} \quad \Rightarrow \quad \frac{20 \text{ A}}{2 \text{ cm}} = \frac{I_2}{8 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \mathbf{80\ A}$$

que sería el valor de la corriente en el segundo hilo.



b) Dos conductores rectilíneos indefinidos y paralelos se atraen cuando soportan corrientes paralelas; se repelen en caso contrario. Ya que nuestro caso se refiere a I_1 e I_2 paralelas, nuestros conductores **se atraerán**, del modo que se recoge en la figura.

Si d = 10 cm = 0,1 m es la distancia entre los hilos, la fuerza **por unidad de longitud**, es decir, la fuerza sobre un trozo de hilo de 1 m resulta

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = 2.10^{-7} \frac{20.80}{0,1} = \mathbf{3{,}2.10^{-3}\ N/m}$$

OPCIÓN A–C3.– Una carga puntual Q con velocidad v = v_xi entra en una región donde existe un campo magnético uniforme B = B_xi + B_yj + B_zk. Determine:

a) **La fuerza que se ejerce sobre la carga en el campo magnético.**
b) **El campo eléctrico E que debería existir en la región para que la carga prosiguiese sin cambio del vector velocidad.**

a) La fuerza que aparece sobre una carga Q, moviéndose con velocidad **v**, en un punto en el que el campo magnético es **B** es la conocida expresión de Lorentz, **F** = Q **v**∧**B**. En nuestro supuesto, resultará

$$\mathbf{F} = Q\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = Q\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = Q\,v_x\,(-B_z\mathbf{j}+B_y\mathbf{k})$$

una fuerza en el plano YZ, puesto que carece de componente **i**.

b) En presencia de ambos campos, **E** y **B**, la fuerza neta sobre la partícula cargada es la suma de las contribuciones eléctrica y magnética,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_e} + \mathbf{F_m} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$$

de modo que, para conseguir que la velocidad **v** de la carga no experimente ningún cambio (ni en módulo ni en dirección), es preciso que las fuerzas $\mathbf{F_e}$ y $\mathbf{F_m}$ se anulen, de acuerdo a

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} = \mathbf{F_e} + \mathbf{F_m} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \qquad Q\mathbf{E} = -\,Q\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$$

así que la condición que debe cumplirse termina siendo

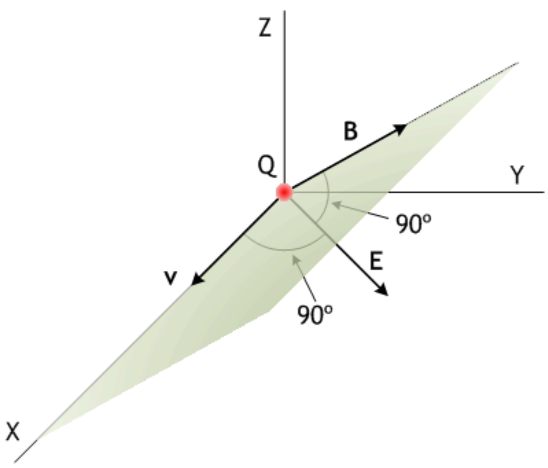
$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \qquad (1)$$

En el caso que nos ocupa, ya que conocemos **v** y **B**, es inmediato conocer la expresión de **E** que sería necesaria para que se produzca la anulación de fuerzas:

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = v_xB_z\,\mathbf{j} - v_x\,B_y\,\mathbf{k}\ \ \mathrm{N/C}$$

de nuevo un vector sin componente en la dirección X, como era de esperar. La figura recoge de qué forma podríamos imaginar los vectores implicados: **v** lleva la dirección del eje X; **B** tiene una dirección arbitraria, no coincidente con ninguno de los ejes X, Y o Z, finalmente **E** debería estar dispuesto en una dirección perpendicular al plano formado por **v** y **B**, de forma que pueda verificarse la condición (1). Naturalmente, el módulo de **E** tendría que ser el que se desprende del resultado que acabamos de obtener, es decir,

$$E = \sqrt{v_x^2\,(B_z^2+B_y^2)} = v_x\,\sqrt{B_z^2+B_y^2}$$



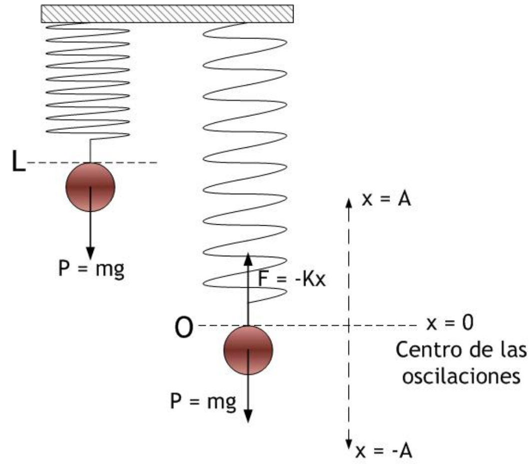
SEPTIEMBRE 96

PROBLEMA B2.— Una pequeña esfera homogénea de masa 1,2 kg que cuelga de un resorte vertical, de masa despreciable y constante recuperadora K = 300 N/m, oscila libremente con una velocidad máxima de 30 cm/s. Determinar:

a) El periodo del movimiento.

b) El desplazamiento máximo de la esfera respecto de la posición de equilibrio.

c) Las energías cinética, potencial y total de la esfera cuando se encuentra en la posición de desplazamiento máximo.



Un pequeño preámbulo debe aclarar el modo en que oscila un objeto, tal como nuestra esfera, suspendido de un resorte vertical. Lo esencial es recordar que el centro de las oscilaciones, es decir, el punto en que la fuerza que actúa sobre el objeto es cero, se encuentra en el lugar en que el peso mg del objeto y la fuerza de recuperación del resorte se anulan entre sí, tal como muestra la figura. Así, el centro de las oscilaciones **no** se corresponde con la longitud natural del resorte, sino con la longitud *alargada* por el peso del cuerpo. Además, podemos olvidarnos del peso a partir del momento en que hayamos tomado en cuenta este *alargamiento* del resorte: ese es todo el efecto que producirá la fuerza gravitatoria. El resto de la discusión de un ejercicio como el que nos plantean se realiza tomando en consideración los siguientes detalles:

1) El centro de las oscilaciones es, como se ha dicho, O, donde se cumple mg = Kx, siendo x el alargamiento del resorte desde su longitud natural hasta el punto O. La igualdad anterior, por supuesto, maneja valores absolutos, ya que ambas fuerzas tienen signos opuestos.
2) Se toma en consideración una sola fuerza, que es F = –Kx, la fuerza de recuperación elástica (de Hooke). Por ello, se habla de una única energía potencial, $E_p = ½\ Kx^2$, asociada a aquella. El peso no produce más efecto que el de desplazar el centro de las oscilaciones al punto O descrito en el epígrafe anterior.
3) Los desplazamientos x se miden respecto al punto O, centro de las oscilaciones, y **no** respecto a la longitud natural del resorte. Todo sucede, pues, como si el peso no existiese y el resorte tuviese una longitud natural hasta O, y no hasta L.

Todas estas consideraciones serán de utilidad, de un modo u otro, en todos los ejercicios que planteen oscilaciones de una masa suspendida en el extremo de un resorte dispuesto verticalmente. En el caso concreto que nos ocupa, las respuestas serían como sigue:

a) El movimiento que observaremos en nuestra esfera es, como sabemos, un M.A.S., cuya aceleración es en cada momento proporcional y de sentido contrario a la deformación del resorte (medida desde O, recuérdese), según

$$a = -\omega^2 x \qquad (1)$$

de modo que la fuerza sobre la esfera se escribe $\quad F = ma = -m\omega^2 x = -Kx \qquad (2)$

y podemos relacionar así la constante K = 300 N/m, característica del resorte, con la masa de la esfera suspendida y un parámetro básico del M.A.S., como es la pulsación ω. Se sigue que

$$K = m\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad (3)$$

y, recordando que el periodo se puede escribir como $T = \frac{2\pi}{\omega}$, tenemos

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,2}{300}} = \mathbf{0,397\ s}$$

b) La velocidad máxima de la esfera se alcanza, como sabemos, cuando pasa por el centro O de las oscilaciones, y está dada por la expresión

$$v_{máx} = \pm A\omega \qquad (4)$$

donde el signo ± toma en consideración los dos sentidos que puede tener la velocidad en O, según la esfera está subiendo o bajando en su oscilación. Tomando el sentido positivo, y puesto que conocemos la velocidad máxima directamente del enunciado y ω se obtiene de (3), podemos despejar la amplitud A, que es lo que demanda este apartado:

$$A = \frac{v_{máx}}{\omega} = \frac{0,3}{\sqrt{\frac{300}{1,2}}} = 0,0190 \text{ m} = \mathbf{1,90 \text{ cm}}$$

c) Cuando la esfera se encuentra en el punto de desplazamiento máximo (tanto da que sea arriba como abajo), la velocidad es nula, mientras que la posición toma su valor máximo $x_{máx}$ = ± A. En consecuencia, no hay energía cinética, y la energía potencial toma su máximo valor

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \mathbf{0 \text{ J}} \quad ; \quad E_p = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}300.0,0190^2 = \mathbf{54.10^{-3} \text{ J}}$$

mientras que la energía total, suma de las dos anteriores, coincide con la total: en el extremo de las oscilaciones, toda la energía es potencial elástica, del mismo modo que en el centro de las oscilaciones toda la energía es cinética. Ese valor total, como sabemos es ½ KA^2.

SEPTIEMBRE 98

CUESTIÓN 2.— Una partícula realiza un movimiento armónico simple con una amplitud de 8 cm y un periodo de 4 s. Sabiendo que en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición de elongación máxima:

a) Determine la posición de la partícula en función del tiempo.

b) ¿Cuáles son los valores de la velocidad y de la aceleración 5 s después de que la partícula pase por un extremo de la trayectoria?

a) La situación inicial en la posición correspondiente a la elongación máxima, entendida en el sentido positivo, significa una fase inicial de $\pi/2$ rad, si empleamos una función **seno**, como hacemos habitualmente, para escribir el M.A.S.; en cambio, si utilizamos la función **coseno**, deberíamos tomar una fase inicial nula. Es decir, podríamos utilizar indistintamente cualquiera de las dos funciones siguientes para la posición del oscilador:

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (1)$$

$$x(t) = A\cos\omega t \qquad (2)$$

entendiendo que ambas representan exactamente el mismo movimiento, y que tomar una u otra es una cuestión de elección libre. Por lo demás, la amplitud es A = 8 cm y la pulsación se obtiene del periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} \quad (s^{-1})$$

de manera que las funciones posición escritas en (1) y (2) quedan definitivamente

$$x(t) = \mathbf{8\,sen\,(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})} \qquad t <> s;\ \ x <> cm \qquad (3)$$

$$x(t) = \mathbf{8\cos\frac{\pi}{2}t} \qquad t <> s;\ \ x <> cm \qquad (4)$$

b) Podemos responder a esta cuestión de muy diversas maneras. Por ejemplo, podemos derivar alguna de las funciones de posición de la partícula, obtener así las funciones velocidad—tiempo y aceleración—tiempo del movimiento y, en ellas, entrar con el valor de tiempo que nos proponen, después de haber establecido con claridad cuál es el tiempo t = 0, que sería el detalle más delicado al pensar de esta manera. Esas derivadas, usando la función (4), más fácil de escribir, serían:

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = -8\frac{\pi}{2}\,\text{sen}\frac{\pi}{2}t = -4\pi\,\text{sen}\frac{\pi}{2}t \quad \text{cm/s} \qquad (5)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -4\pi\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t = -2\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t \quad \text{cm/s}^2 \qquad (6)$$

Y ahora debemos pensar cómo manejamos el tiempo: hemos de localizar un instante tal que hayan transcurrido 5 s desde que el móvil estuvo en un extremo de su trayectoria. Ahora bien, nuestra partícula estaba justamente en la posición de elongación máxima al tiempo t = 0 s, y de acuerdo a ello están escritas las leyes de posición (3) o (4); por tanto, bastará que tomemos el tiempo t = 5 s, que cumplirá la condición pedida. Llevando ese tiempo a las leyes (5) y (6) conseguiremos los valores instantáneos de velocidad y aceleración:

$$v(5) = -4\pi\,\text{sen}\frac{5\pi}{2} = \mathbf{-4\pi \text{ cm/s}} \qquad a(5) = -2\pi^2\cos\frac{5\pi}{2} = \mathbf{0 \text{ cm/s}^2}$$

que se corresponden con valores máximos (aunque en sentido negativo) de la velocidad y nulo de la aceleración: eso quiere decir que el móvil está en ese momento pasando por el centro de la oscilación, en sentido negativo. Esto es la constatación de algo que hubiéramos podido saber considerando que el periodo es de 4 s, debido a lo cual un tiempo de 5 s después de estar en una posición máxima deja margen para una oscilación completa (4 s) y queda 1 s más, que significa un cuarto de oscilación más, es decir, tiempo para ir hasta el centro de la oscilación.

SEPTIEMBRE 00

PROBLEMA B1.- **Un oscilador armónico constituido por un muelle de masa despreciable, y una masa en el extremo de valor 40 g, tiene un período de oscilación de 2 s.**

a) **¿Cuál debe ser la masa de un segundo oscilador, construido con un muelle idéntico al primero, para que la frecuencia de oscilación se duplique?**
b) **Si la amplitud de las oscilaciones en ambos osciladores es 10 cm, ¿cuánto vale, en cada caso, la máxima energía potencial del oscilador y la máxima velocidad alcanzada por su masa?**

a) El periodo de un oscilador de masa m, en un sistema (podría ser un resorte, como es el caso) con constante de recuperación K, es una expresión familiar

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad (1)$$

de manera que si la frecuencia, inversa del periodo, debe duplicarse, entonces el periodo **debe reducirse a la mitad**. El segundo oscilador, con una masa m' y la misma K, debe tener un periodo T' igual a la mitad de T:

$$T' = \frac{T}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}} \qquad (2)$$

de manera que podemos dividir miembro a miembro las igualdades (1) y (2) y obtener así la respuesta:

$$\frac{T}{T'} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}{2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}}} \quad\Rightarrow\quad \frac{T}{T/2} = \sqrt{\frac{\frac{m}{K}}{\frac{m'}{K}}} = \sqrt{\frac{m}{m'}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1/2} = \sqrt{\frac{m}{m'}} \quad\Rightarrow\quad m' = \frac{1}{4}m = \mathbf{10\ g}$$

b) La energía mecánica **total** de un oscilador es $E = \frac{1}{2}KA^2$ (3)

donde K es la constante de recuperación del oscilador y A la amplitud de las oscilaciones. Como se sabe, la energía total es la suma, en cada posición, de energía cinética de la masa oscilante y energía potencial del sistema, magnitudes que varían de una posición a otra. En los extremos de la oscilación, cuando la posición es $x_{máx} = \pm A$, toda la energía es potencial y la energía cinética es nula; por el contrario, cuando la masa oscilante pasa por el centro de las oscilaciones la velocidad toma su máximo valor, $v_{máx} = \pm A\omega$, y entonces toda la energía es cinética y la energía potencial es nula. Sabido todo esto, podemos responder fácilmente a las cuestiones que nos plantean:

Empezamos obteniendo K, que será necesaria para hacer las cuentas. Podemos hacerlo a partir de (1), con los datos que proporciona el enunciado sobre el primer oscilador:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad\Rightarrow\quad K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \quad\Rightarrow\quad K = \frac{4\pi^2.\ 0,04}{4} = 0,39\ N/m$$

donde hemos tenido cuidado de escribir todas las unidades en SI, de modo que K se medirá igualmente en sistema; por tanto, en N/m. Debe notarse que este valor de K refleja el comportamiento del resorte, y es el mismo con los dos osciladores: lo que cambia de uno a otro es el valor de la masa suspendida. Ahora, sabido que la energía potencial máxima es la recogida en (3), debemos notar que depende **exclusivamente** de K y de A, de modo que, si A = 10 cm en ambos casos, se sigue que la energía potencial máxima es la misma para ambos:

Energía potencial máxima: $$E_p^{máx} = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}0,39.0,1^2 = \mathbf{1,95.10^{-5}\ J}$$

En cuanto a la velocidad máxima, podemos recurrir a la expresión ya citada $v_{máx} = \pm A\omega$, donde deberemos notar que A es común e igual a 10 cm en ambos osciladores, pero no así ω, que toma valores diferentes. Calcularemos ω en cada caso y después las velocidades máximas:

Primer oscilador $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad/s \quad\Rightarrow\quad v_{máx} = \pm A\omega = \mathbf{\pm 0,1\pi\ m/s}$$

Segundo oscilador $$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad/s \quad\Rightarrow\quad v'_{máx} = \pm A\omega' = \pm 0,1.2\pi = \mathbf{\pm 0,2\pi\ m/s}$$

donde se ha usado que el periodo del segundo oscilador es la mitad del que tiene el primero; así, la conclusión es que la velocidad máxima del segundo oscilador resulta doble que la del primero. Podríamos haber llegado a esta conclusión de otro modo, discutiendo las energías cinéticas máximas, que deben ser la misma para ambos, y considerando que la masa de un oscilador es cuatro veces mayor que la del otro: es fácil seguir ese razonamiento hasta llegar a la misma conclusión que hemos obtenido nosotros.

SEPTIEMBRE 01

CUESTIÓN 2.— Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuyo período es 1 s. Sabiendo que en el instante t = 0 su elongación es 0,70 cm y su velocidad 4,39 cm/s, calcule:

a) La amplitud y la fase inicial.

b) La máxima aceleración de la partícula.

a) Conocer el periodo equivale, como sabemos, a conocer la frecuencia angular ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad / s}$$

Por otro lado, el enunciado señala que, al tiempo t = 0 s, conocemos la elongación inicial x_0 = 0,70 cm y la velocidad inicial v_0 = 4,39 cm/s. Recordando la relación entre elongación y velocidad

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

y utilizándola en la situación inicial que nos describen, tenemos

$$v_0 = \pm\omega\sqrt{A^2 - x_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad 4{,}39 = 2\pi\ \sqrt{A^2 - 0{,}70^2}$$

donde la elongación (y por tanto la amplitud A) se mide en cm; la velocidad en cm/s. Despejando, se obtiene

$$A = \sqrt{\frac{4{,}39^2}{4\pi^2} + 0{,}70^2} = \mathbf{0{,}99\ cm}$$

Y ahora podemos ir a por la fase inicial. La ley de elongaciones se podría escribir, de acuerdo a lo que sabemos, como

$$x(t) = 0{,}99\ \text{sen}(2\pi t + \varphi_0)$$

Aplicada al tiempo t = 0, con la elongación inicial x_0 = 0,70 cm conocida, nos quedará

$$x_0 = 0{,}70 = 0{,}99\ \text{sen}\ \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \text{arc sen}\ \frac{0{,}70}{0{,}99} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

un resultado que precisa alguna aclaración, seguramente necesaria en otros ejercicios semejantes. Hemos encontrado que sen φ_0 = 0,707, y de ahí hemos concluido nuestra solución, φ_0 = π/4 rad. En realidad, la igualdad sen φ_0 = 0,707 tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante (la que hemos cogido) y otra en el segundo cuadrante, que sería φ_0 = 3π/4 rad. Esto no es más que el hecho bien conocido de que el seno toma valores positivos en los dos primeros cuadrantes. ¿Cómo sabemos que hemos de tomar π/4 rad y no 3π/4 rad como fase inicial?

La respuesta a eso es que la velocidad inicial v_0 es positiva, lo que quiere decir que el oscilador está inicialmente a la derecha del origen (x_0 = 0,70 cm) y moviéndose hacia la derecha (v_0 = 4,39 cm/s), de modo que **no ha llegado aún a la elongación máxima positiva, donde la fase valdrá π/2 rad**; por tanto, la fase inicial ha de ser un ángulo del primer cuadrante, menor que π/2. Si la velocidad inicial hubiese sido negativa, v_0 = —4,39 cm/s, entonces φ_0 hubiese sido 3π/4 rad.

b) La máxima aceleración de la partícula es, como sabemos, $a_{max} = \pm A\omega^2$

de manera que sólo hemos de hacer las cuentas

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm\ 0{,}99.\ 4\pi^2 = \mathbf{\pm\ 39{,}08\ cm/s^2}$$

JUNIO 02

PROBLEMA B1.— Una masa de 2 kg está unida a un muelle horizontal cuya constante recuperadora es K = 10 N/m. El muelle se comprime 5 cm desde la posición de equilibrio (x = 0) y se deja en libertad. Determine:

a) La expresión de la posición de la masa en función del tiempo, x = x(t).

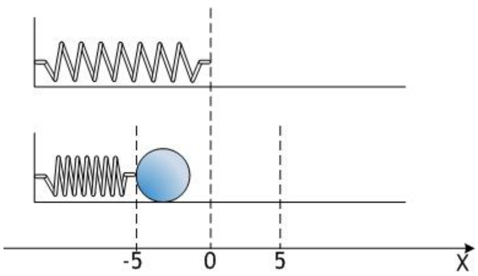
b) Los módulos de la velocidad y de la aceleración de la masa en un punto situado a 2 cm de la posición de equilibrio.

c) La fuerza recuperadora cuando la masa se encuentra en los extremos de la trayectoria.

d) La energía mecánica del sistema oscilante.

Nota: Considere que los desplazamientos respecto a la posición de equilibrio son positivos cuando el muelle está estirado.

a) La figura muestra arriba el resorte sin deformar, antes de sujetar la masa m en su extremo. Debajo aparece la situación correspondiente a t = 0 s, cuando el muelle se ha comprimido 5 cm y se va a soltar.



Parece obvio que la amplitud de las oscilaciones va a ser A = 5 cm. También conocemos directamente el valor de la fase inicial φ_0: considerando la situación inicial del oscilador en el extremo negativo −A de sus oscilaciones, podemos entender que comienza con **tres cuartos de oscilación de adelanto**, y así, φ_0 = 3π/2 rad, o bien que comienza con un **cuarto de oscilación de retraso**, y así φ_0 = −π/2 rad. Tomaremos esta última opción, ya que ambas son equivalentes.

Y queda sólo conocer la frecuencia angular ω para escribir la elongación como función del tiempo. Conociendo la constante K del resorte y la masa del cuerpo, es fácil

$K = m\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}\ \text{rad/s}$

así que nos quedará $\qquad \mathbf{x(t) = 5\ sen(\sqrt{5}\,t - \frac{\pi}{2})} \qquad$ x <> cm; t <> s

b) Conocemos relaciones entre elongación y velocidad, así como entre elongación y aceleración. Se trata de las expresiones

$$v = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad ; \qquad a = -\omega^2 x$$

que resolverán inmediatamente este apartado. Hemos de prescindir de signos en los resultados, ya que se nos piden módulos (de hecho, en la posición x = 2 cm la velocidad puede ser tanto positiva como negativa; la aceleración **es** negativa). Los resultados son

$$v = \sqrt{5}\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{5.21} = \mathbf{10{,}25\ cm/s}$$

$$a = 5.2 = \mathbf{10\ cm/s^2}$$

c) La fuerza recuperadora es $\qquad F = -Kx$

como función de la elongación instantánea del oscilador. Cuando se encuentra en los extremos ±A de su recorrido, la fuerza aplicada por el resorte sobre m será

$$F = \pm KA = \pm\ 10\ \text{N/m}\ .\ 0{,}05\ \text{m} = \mathbf{\pm 0{,}5\ N}$$

Nótese la necesaria precaución en las unidades de A: ya que K está en SI, debemos hacer lo mismo con A y escribirla en metros.

d) La energía mecánica del sistema oscilante es $\qquad E = \frac{1}{2}KA^2$

y se trata, como sabemos, de un valor constante que recoge la suma de las energías cinética y potencial en cualquier posición. En el caso que nos ocupa, sería

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}10\,.\,0{,}05^2 = \mathbf{1{,}25.10^{-2}\ J}$$

MODELO 05

PROBLEMA A1.— Una partícula de masa 100 g realiza un movimiento armónico simple de amplitud 3 m y cuya aceleración viene dada por la expresión $a = -9\pi^2 x$ en unidades SI. Sabiendo que se ha empezado a contar el tiempo cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo en los desplazamientos positivos, determine:

- **a) El periodo y la constante recuperadora del sistema.**
- **b) La expresión matemática del desplazamiento en función del tiempo, x = x(t).**
- **c) Los valores absolutos de la velocidad y de la aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo.**
- **d) Las energías cinética y potencial en el punto donde tiene velocidad máxima.**

a) La expresión a = –kx permite reconocer de modo inmediato un M.A.S. en el eje X, con el centro de las oscilaciones en el origen, x = 0. La constante de proporcionalidad entre **aceleración a** y **elongación x** (posición), que aparece como k en esa expresión, se relaciona con la **pulsación ω**, según

$$a = -\omega^2 x \qquad (1)$$

de manera que una comparación con $a = -9\pi^2 x$ permite identificar de inmediato el valor de ω:

$$\omega^2 = 9\pi^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = 3\pi\ \text{rad/s}$$

y, por tanto, del periodo $\qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi} = \mathbf{\frac{2}{3}\ s}$

La constante recuperadora del sistema se refiere, como sabemos, a la constante de proporcionalidad entre la **fuerza** F sobre la partícula y la **elongación** x (posición) de la misma, según la ecuación

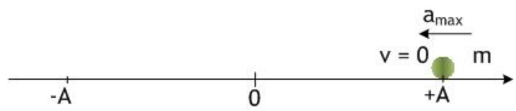
$$F = ma \quad \Rightarrow \quad F = -m\omega^2 x = -Kx \quad \Rightarrow \quad K = m\omega^2$$

de manera que, considerando los valores de m y ω que conocemos, será

$$K = 0{,}1.(3\pi)^2 = \mathbf{0{,}9\pi^2\ N/m}$$

b) La expresión matemática del desplazamiento (es decir, de la elongación) en función del tiempo es la conocida

$$x(t) = A\ sen(\omega t + \varphi_0)$$



En el instante inicial, la aceleración es máxima y negativa; la velocidad es cero

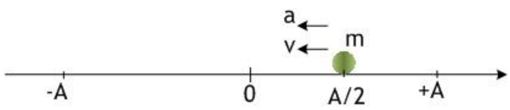
donde φ_0 es el valor de fase inicial del M.A.S., que debe determinarse conociendo la posición inicial del móvil. En nuestro caso, el enunciado señala que se empieza a contar el tiempo (t = 0 s) cuando la aceleración de la partícula es máxima dentro de los desplazamientos positivos, lo que no es sino una manera de decir que la aceleración tiene ahí el valor máximo y negativo, $a = -\omega^2 A$, y que la partícula se encuentra inicialmente en la posición $x = A$, correspondiente al extremo positivo de la oscilación. La fase inicial, por tanto, corresponde a un cuarto de oscilación, $\varphi_0 = \pi/2$ rad. Así, la expresión que nos piden, empleando A = 3 m y ω = 3π rad/s, junto con el valor de fase inicial que acabamos de discutir, queda como

$$\mathbf{x(t) = 3\,sen(3\pi t + \frac{\pi}{2})} \qquad x <> m; \;\; t <> s \qquad (2)$$

c) Esta es una pregunta que debería responderse pensando en ecuaciones que relacionen directa y respectivamente la velocidad y la aceleración con la posición, sin intervención de la variable tiempo. Estas expresiones son bien conocidas: una de ellas es (1), que muestra la dependencia a–x, y la otra es

$$v = \pm\,\omega\,\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (3)$$

que recoge la dependencia entre v y x. Usándolas para el valor de la elongación x correspondiente a la mitad del desplazamiento máximo, es decir, x = 1,5 m, se tiene



Cuando el móvil pasa por A/2, su aceleración es la mitad que en el extremo, y su velocidad ha aumentado mucho (más de la mitad de la máxima)

$$a = -(3\pi)^2 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{27}{2}\pi^2 \;\; m/s^2 \qquad ; \qquad v = \pm 3\pi\sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \pm 3\pi\frac{3\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{9\pi\sqrt{3}}{2} \;\; m/s$$

que serían los valores en la mitad del desplazamiento máximo positivo. La velocidad ofrecería exactamente el mismo resultado en x = −1,5 m, la mitad del desplazamiento máximo negativo, y la aceleración sería la misma, pero con signo positivo. En todo caso, como se nos piden valores absolutos, la respuesta sería

$$a = \mathbf{\frac{27}{2}\pi^2 \;\; m/s^2} \quad ; \qquad v = \mathbf{\frac{9\pi\sqrt{3}}{2} \;\; m/s}$$

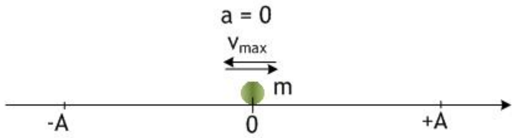
y conviene insistir en algún detalle de importancia: esa aceleración es exactamente la mitad de la que tenía el móvil en el extremo, ya que la aceleración es proporcional (aunque de signo contrario) a la elongación. En cambio, la velocidad no es la mitad de la velocidad máxima, que se alcanzará al llegar a O; cuando pasa por A/2, el móvil tiene ya el 86,6% de la velocidad máxima que alcanzará, y sólo ganará aún el 13,4%.

d) Por fin, las energías potencial y cinética en el punto donde se tiene velocidad máxima. Ese punto, como sabemos, corresponde al centro de las oscilaciones, x = 0 m, donde la aceleración de la partícula es también cero, $a = 0\ m/s^2$, y la velocidad es la máxima, $v = \pm A\omega$ m/s, donde el doble signo ± toma en cuenta los dos sentidos en que la partícula puede pasar por ese lugar. El valor de esa velocidad máxima resulta ser

$$v_{máx} = \pm\, 3.3\pi = \pm\, 9\pi \;\; m/s$$

y las expresiones de las energías cinética y potencial

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad ; \qquad E_p = \frac{1}{2}Kx^2$$



Cuando el móvil pasa por el centro de las oscilaciones, su velocidad es máxima y su aceleración nula.

en ese lugar, con los valores x = 0 m y de velocidad máxima que acabamos de escribir, resultan

$$E_c = \frac{1}{2}0{,}1\,(9\pi)^2 = \mathbf{4{,}05\,\pi^2 \;\; J} \qquad ; \qquad E_p = \mathbf{0 \;\; J}$$

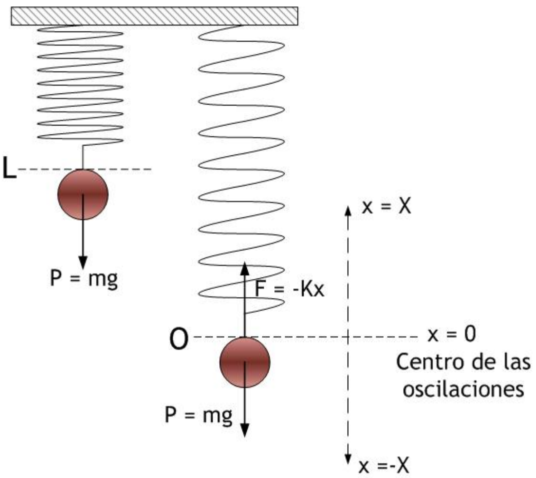
reflejando que la energía en el centro de las oscilaciones es estrictamente cinética, y que el valor $4{,}05\pi^2$ J representa también la energía mecánica constante (suma de E_c y E_p) en cualquier posición. Así, por ejemplo, en los extremos de la oscilación tendremos $E_c = 0$ J y $E_p = 4{,}05\pi^2$ J.

JUNIO 08

CUESTIÓN 1.— Un cuerpo de masa m está suspendido de un muelle de constante elástica k. Se tira verticalmente del cuerpo desplazando éste una distancia X respecto de su posición de equilibrio, y se le deja oscilar libremente. Si en las mismas condiciones del caso anterior el desplazamiento hubiese sido 2X, deduzca la relación que existe, en ambos casos, entre:

a) las velocidades máximas del cuerpo;

b) las energías mecánicas del sistema oscilante.



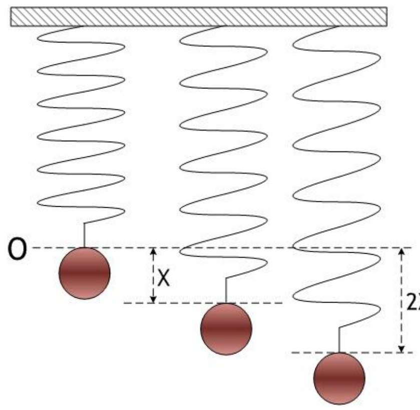
Debemos empezar recordando qué se entiende por posición de equilibrio cuando un cuerpo de masa m está suspendido del extremo de un resorte dispuesto verticalmente. En esa situación, el resorte tendrá un alargamiento tal que la fuerza de recuperación y el peso del cuerpo sean fuerzas iguales y de sentido contrario, que se anulan y justifican así la situación de equilibrio, tal como muestra la figura a la derecha. El centro de las oscilaciones de un resorte dispuesto verticalmente no está en L, que sería la longitud natural del resorte, sino en O, que es la longitud del resorte alargado por el peso de la masa m. Una discusión más detallada de esto puede encontrarse en SEPTIEMBRE 96 PROBLEMA B2, al comienzo de este archivo.

Así que, cuando nos dicen que se tira verticalmente del cuerpo desplazando éste una distancia X respecto de su posición de equilibrio, debemos entender que esto se hace a partir de O, y que X no sería otra cosa que la amplitud de las oscilaciones resultantes. Del mismo modo, cuando el desplazamiento desde la posición de equilibrio sea 2X, será también a partir de la posición O de equilibrio, y se tratará de la nueva amplitud de oscilación.

Por tanto, estamos hablando de oscilaciones de amplitudes X y 2X. Como sabemos, el periodo no es una función de la amplitud, ya que depende sólo de

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

la masa m suspendida y de la constante de recuperación k del resorte.



a) La velocidad máxima de las oscilaciones se alcanza al pasar por el centro de las mismas, y su valor es $v_{max} = \pm A\omega$, donde A es la amplitud. De este modo, la velocidad máxima en cada caso será

$$v_{max} = \pm\,\omega X$$

$$v'_{max} = \pm\,\omega\, 2X$$

y se alcanzarán ambas al pasar por O. La relación entre las velocidades máximas es obvia,

$$\frac{v_{max}}{v'_{max}} = \frac{\pm\,\omega X}{\pm\,\omega\, 2X} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

y resulta doble cuando la amplitud de oscilación es doble.

b) La energía mecánica de un oscilador es un invariante del movimiento, y su valor es

$$E = \frac{1}{2}KA^2$$

donde K es la constante de recuperación del sistema, y A la amplitud de las oscilaciones. En el caso que nos ocupa, las energías mecánicas quedarán

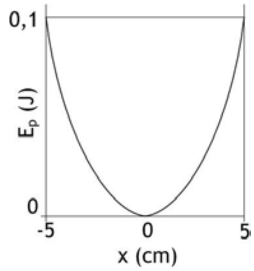
$$E = \frac{1}{2}kX^2 \quad ; \quad E' = \frac{1}{2}k(2X)^2$$

de manera que la relación entre las energías mecánicas es

$$\frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}kX^2}{\frac{1}{2}k\,(2X)^2} = \frac{X^2}{4X^2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

así que la oscilación tiene cuatro veces más energía cuando su amplitud de oscilación se duplica.

MODELO 09



PROBLEMA A1.– **En la figura se muestra la representación gráfica de la energía potencial (E_p) de un oscilador armónico simple constituido por una masa puntual de valor 200 g unida a un muelle horizontal, en función de su elongación (x).**

a) Calcule la constante elástica del muelle.
b) Calcule la aceleración máxima del oscilador.
c) Determine numéricamente la energía cinética cuando la masa está en la posición x = +2,3 cm.
d) ¿Dónde se encuentra la masa puntual cuando el módulo de su velocidad es igual a la cuarta parte de su velocidad máxima?

Hay que mirar la figura con atención: muestra la gráfica de la energía potencial $E_p = ½Kx^2$ de un oscilador armónico. También recoge la amplitud de las oscilaciones, que sería A = 5 cm, así como la energía mecánica total, que es la energía potencial en los extremos de la oscilación y vale, como puede leerse, E = 0,1 J.

a) Sabemos que la energía mecánica total de un oscilador es $E = \frac{1}{2}KA^2$

y, si A = 5 cm y E = 0,1 J, se sigue que $E = 0{,}1\ J = \frac{1}{2}K(5.10^{-2})^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{2.0{,}1}{25.10^{-4}} = \mathbf{80\ N/m}$

b) La aceleración máxima de un oscilador es $a_{max} = \pm\omega^2 A$

y se alcanza, como sabemos, en los extremos de la oscilación. Ya que conocemos A = 5 cm, necesitamos hallar ω: podemos obtenerla a partir de

$$K = m\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{80\ N/m}{0{,}2\ kg}} = 20\ rad/s$$

de modo que ya es inmediato $a_{max} = \pm\ 0{,}05.20^2 = \mathbf{\pm 20\ m/s^2}$

c) La suma de las energías cinética y potencial es la energía mecánica total, un invariante del oscilador:

$$E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2 = 0{,}1\ J$$

que vale 0,1 J en el caso que nos ocupa. Sabiendo que el móvil está en la posición x = +2,3 cm es muy sencillo hallar la energía potencial en esa posición

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}80\ (2{,}3.10^{-2})^2 = 0{,}02\ J$$

y despejar entonces la energía cinética en la posición x = +2,3 cm:

$$E_c = E - E_p = 0{,}1 - 0{,}02 = \mathbf{0{,}08\ J}$$

Nótese que, aunque el oscilador está prácticamente a mitad de camino entre el centro de las oscilaciones (x = 0) y la máxima elongación (x = 5 cm), la energía cinética es aún muy grande, un 80% de la energía total. Esto debe ilustrar cómo la pérdida de velocidad al alejarse del centro de las oscilaciones es pequeña al principio, y bastante brusca al acercarse al extremo de la oscilación.

d) Seguimos trabajando con la conservación de energía mecánica. Si sabemos que la velocidad es la cuarta parte de la velocidad máxima, entonces debe valer

$$v = \frac{1}{4}v_{max} = \pm\frac{1}{4}A\omega$$

ya que, como sabemos, la velocidad máxima es $v_{max} = \pm\ A\omega$. Ahora podemos hallar la energía cinética en ese lugar, que será

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}A\omega\right)^2 = \frac{1}{16}\frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{16}E$$

la energía total partido por 16. La conservación de energía requiere que la suma de energías cinética y potencial en ese lugar sea E = 0,1 J, así que

$$\frac{1}{16}E + E_p = E \qquad \Rightarrow \qquad E_p = E - \frac{1}{16}E = \frac{15}{16}E$$

de modo que podemos despejar la elongación, x:

$$E_p = \frac{15}{16}E = \frac{15}{16}0{,}1 = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{2.15.0{,}1}{16.80}} = 0{,}0484\ m = \mathbf{4{,}84\ cm}$$

casi en el límite máximo de la oscilación: tan cerca de él, todavía queda la cuarta parte de la velocidad (y la dieciseisava parte de la energía total). De nuevo, hay que percibir de qué modo la velocidad cae abruptamente al acercarse al extremo de las oscilaciones: en los últimos 16 mm de nuestro ejemplo se pierde la cuarta parte de la velocidad.

Un comentario: los apartados c) y d) se han discutido como aplicaciones de la conservación de energía mecánica. Se ha hecho así para respetar lo que parecería el deseo del redactor del enunciado, que nos proporciona una gráfica de energías potenciales y parece así inducirnos a ello. Pero pueden resolverse también, probablemente más rápido, recordando

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

que relaciona velocidad del móvil con su elongación. Queda para el alumno esa repetición.

SEPTIEMBRE 09

CUESTIÓN 2.– Una partícula realiza un movimiento armónico simple de 10 cm de amplitud y tarda 2 s en efectuar una oscilación completa. Si en el instante t = 0 su velocidad es nula y la elongación positiva, determine:

a) La expresión matemática que representa la elongación en función del tiempo.

b) La velocidad y la aceleración de oscilación en el instante t = 0,25 s.

Podemos empezar por la situación inicial: el móvil está en un extremo de la trayectoria, ya que su velocidad inicial es nula, y además la elongación es positiva, así que está en $x_0 = A$. Naturalmente, eso significa que la fase inicial es $\varphi_0 = \pi/2$ rad.

Además, sabemos que A = 10 cm, y que el periodo es T = 2 s. Eso implica $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$

a) así que la ecuación de elongaciones en el tiempo queda

$$x(t) = A\ \text{sen}(\omega t + \varphi_0) = \mathbf{10\ sen(\pi t + \frac{\pi}{2})} \qquad x <> cm;\ t <> s$$

b) Ahora basta derivar para tener las ecuaciones de velocidad y aceleración:

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = 10\pi\ \cos(\pi t + \frac{\pi}{2}) \qquad v <> cm\ s^{-1};\ t <> s$$

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = -10\pi^2\ \text{sen}(\pi t + \frac{\pi}{2}) \qquad a <> cm\ s^{-2};\ t <> s$$

y entrar con el tiempo t = 0,25 s. Queda

$$v(0,25) = 10\pi\ \cos(\pi.0,25 + \frac{\pi}{2}) = 10\pi\ \cos\frac{3\pi}{4} = \mathbf{-22,21\ cm/s}$$

$$a(0,25) = -10\pi^2\ \text{sen}(\pi.0,25 + \frac{\pi}{2}) = -10\pi^2\ \text{sen}\frac{3\pi}{4} = \mathbf{69,79\ cm/s^2}$$

JUNIO 96

PROBLEMA **B1.— Una onda armónica transversal que se propaga a lo largo de la dirección positiva del eje de las X tiene las siguientes características: amplitud A = 5 cm, longitud de onda λ = 8π cm, velocidad de propagación v = 40 cm/s. Sabiendo que la elongación de la partícula de abcisa x = 0, en el instante t = 0, es de 5 cm, determinar:**

a) **El número de onda y la frecuencia angular de la onda.**
b) **La ecuación que representa el movimiento vibratorio armónico simple de la partícula de abcisa x = 0.**
c) **La ecuación que representa la onda armónica transversal indicada.**

Las magnitudes que se citan en el enunciado, como datos o como incógnitas, son características de la ecuación de propagación de una onda armónica en una dimensión. En el caso concreto que nos ocupa, se trata de una onda en el eje X, propagándose en sentido positivo, de acuerdo a una ecuación del tipo

$$y(x;t) = A\ \mathrm{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\varphi_0\right) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx + \varphi_0)$$

donde ϕ_0 es una constante que recoge la fase inicial de la oscilación del punto x = 0 m. Si la elongación de ese punto x = 0 m, en el tiempo t = 0 s, hubiese sido y = 0 cm — es decir, si hubiese estado en el punto de equilibrio, comenzando una oscilación —, el valor de φ_0 sería nulo y no aparecería en la ecuación de propagación de la onda. Como el caso es que el punto x = 0 m tiene la elongación máxima en el instante t = 0 s, y = 5 cm, su fase inicial es la que corresponde a un cuarto de oscilación, por tanto, $\varphi_0 = \pi/2$ rad. Todas estas ideas, junto con las relaciones conocidas

$$v = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \quad (1) \qquad ; \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (2) \qquad ; \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3)$$

entre la velocidad de propagación de la onda v (<> m/s), la longitud de onda λ (<> m), el número de onda k (<> m^{-1}), la frecuencia ν (<> Hz) y el periodo T (<> s) permiten responder a las cuestiones que se nos plantean:

a) Conocida λ, el número de onda es inmediato: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{8\pi} = \mathbf{\frac{1}{4}\ cm^{-1}}$

y la frecuencia angular ω es también sencilla, obteniendo antes T o ν por medio de (1):

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{40}{8\pi} = \frac{5}{\pi}\ \mathrm{Hz} \quad \Rightarrow \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{5}{\pi} = \frac{5}{2}\ \mathrm{rad/s} = \mathbf{\frac{5}{2}\ s^{-1}}$$

b) De acuerdo con lo discutido más arriba, la respuesta es inmediata: se trata de una oscilación armónica en una dirección perpendicular al eje X, que supondremos el eje Y. La amplitud de la oscilación es A = 5 cm, la pulsación ω acaba de ser calculada y, por último, la fase inicial es $\phi_0 = \pi/2$ rad. De este modo, la ecuación del M.A.S. de este punto resulta

$$y(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) = \mathbf{5\ sen(\frac{5}{2}t + \frac{\pi}{2})} \qquad t <> s;\ y <> cm$$

c) Por último, la ecuación de propagación de la onda, que también es inmediata, ya que tenemos k, ω y ϕ_0. Queda escribir la ecuación como

$$y(x;t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx + \phi_0) = \mathbf{5\ sen(\frac{5}{2}t - \frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2})} \qquad t <> s;\ x <> cm;\ y <> cm$$

y está hecho. Nótese que se ha empleado cm como unidad de longitud en todos los casos en que ha sido preciso, tanto en el eje X en el que se propaga la oscilación como en el eje Y en que sucede ésta.

SEPTIEMBRE 96

CUESTIÓN **3.— ¿Qué cualidades distinguen entre sí a los diferentes sonidos? ¿Cómo dependen dichas cualidades de las magnitudes que caracterizan la onda sonora? Razona la respuesta.**

Las cualidades que distinguen entre sí a los sonidos son el **tono** y el **timbre.** El **tono** no es sino la **frecuencia** del sonido, medida en Hz, que permite diferenciar los sonidos **graves**, de frecuencia más baja, de los **agudos**, que poseen frecuencias más altas. Como se sabe, el oído humano es capaz de percibir sonidos cuyas frecuencias van de los 20 Hz, los más graves que podemos oir, a los 20000 Hz, los más agudos que podemos oir.

Aunque no es una cualidad de los sonidos, quizá proceda decir aquí algo acerca de la **intensidad**. Como en cualquier otra onda, entendemos por intensidad la **cantidad de energía que la onda transporta por unidad de área perpendicular a la dirección de propagación y por unidad de tiempo;** se mide por tanto en W/m^2. Para poder percibir realmente un sonido, es preciso que tenga una frecuencia entre 20 y 20000 Hz — es decir, que se trate de un tono audible —, pero también que llegue a nuestro oído con un mínimo de intensidad, por debajo de la cual el sonido es demasiado débil para ser percibido. Esa **intensidad umbral** es distinta para las diferentes frecuencias; por ejemplo, para un sonido de frecuencia 1000 Hz el umbral de audición está en 10^{-12} W/m^2.

El **timbre** es una cualidad de los sonidos que permite distinguir, por ejemplo, la misma nota emitida por instrumentos musicales diferentes, y que hace también única la voz de cada persona. Cuando un instrumento musical emite un sonido de una determinada frecuencia, emite también un conjunto de armónicos de ese sonido, cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia base fundamental. El conjunto de armónicos emitidos es característico de cada instrumento, como lo es también de la voz de cada persona, de manera que podemos diferenciarlos gracias al **timbre** de cada cual. Cuanto mayor es el número de armónicos presentes en una nota, más agradable y **armoniosa** resulta la misma.

Como puede verse, la frecuencia — y, por tanto, también la longitud de onda — es la magnitud esencialmente comprometida en la caracterización de un sonido, ya que es directamente identificable con el **tono**, y un conjunto de múltiplos determinado de la frecuencia, los armónicos presentes, determina el **timbre**.

JUNIO 97

CUESTIÓN 3.— a) Si el oído humano puede percibir sonidos de frecuencias comprendidas en el intervalo de 20 a 20000 Hz aproximadamente, ¿cuáles son las longitudes de onda en el aire que corresponden a estas frecuencias?
b) Si el oído humano es capaz de distinguir aproximadamente dos sonidos que se emiten con un intervalo de 0,1 s, ¿cuál es la distancia mínima a la que debe estar de una pared una persona, para que perciba el eco?
Datos: Velocidad del sonido en el aire, v = 340 m s^{-1}

a) Una cuestión muy sencilla: se trata de emplear la expresión fundamental $v = \lambda\nu$ para despejar las longitudes de onda correspondientes a las frecuencias de 20 Hz y de 20000 Hz

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340\ \text{m/s}}{20\ \text{Hz}} = \mathbf{17\ m} \qquad\qquad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340\ \text{m/s}}{20000\ \text{Hz}} = 17.10^{-3}\ \text{m} = \mathbf{17\ mm}$$

b) Para que el oído "separe" los dos sonidos, debe recibirlos con un intervalo de separación de 0,1 s al menos. Así, si una persona situada frente a una pared da un grito, el primer sonido que oye es su propio grito, en el momento mismo en que lo produce. Ese sonido debe viajar hasta la pared, reflejarse allí y retornar hacia la persona, que oirá así un segundo sonido un tiempo después del primero: ese tiempo depende obviamente de la distancia entre pared y persona. Si están muy próximas, el sonido reflejado llegará a la persona antes de que haya pasado 0,1 s después de su grito, y no será capaz de distinguir un sonido de otro: no percibirá el eco. El tiempo mínimo para que se perciba el eco es, como se ha dicho, de 0,1 s, que debería ser el tiempo que emplea el sonido en ir a la pared, reflejarse allí y volver al lugar donde se encuentra la persona. Ya que el sonido se mueve con velocidad constante v = 340 m/s, la distancia que recorre en 0,1 s es obvia:

$$\text{distancia} = v\ .\ t = 340\ \text{m/s}\ .\ 0{,}1\ \text{s} = 34\ \text{m}$$

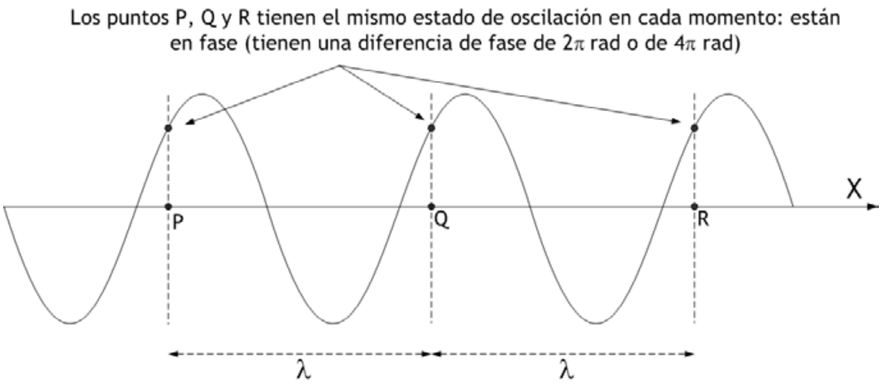
de manera que la distancia mínima entre persona y pared debería ser la mitad de esa cantidad, es decir, **17 m**. Con una distancia menor que 17 m, no hay eco; por encima de 17 m, existe eco y el tiempo entre el grito y el retorno del eco es cada vez mayor.

JUNIO 97

PROBLEMA B2.— Una onda armónica cuya frecuencia es de 50 Hz se propaga en la dirección positiva del eje X. Sabiendo que la diferencia de fase, en un instante dado, para dos puntos separados 20 cm es de $\pi/2$ radianes, determinar:

a) **El periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.**
b) **En un punto dado, ¿qué diferencia de fase existe entre los desplazamientos que tienen lugar en dos instantes separados por un intervalo de 0,01 s?**

Este ejercicio aborda la cuestión de la periodicidad espacial de una onda armónica monodimensional, como la que nos proponen en el eje X. Una onda de estas características requiere que imaginemos una zona del eje X cuyos puntos oscilan a causa de la onda que se propaga: como sabemos, si tomamos un punto P cualquiera del eje y otro punto Q situado a una distancia λ del primero, debemos esperar que ambos oscilen en fase (más correcto sería decir con una diferencia de fase de 2π rad, ya que P habrá completado en todo momento **una oscilación más** que Q, puesto que la onda empleó un periodo T en propagarse desde P hasta Q, y mientras la onda hacía ese viaje, P cumplió su primera oscilación; así, cuando Q comienza su primera oscilación, P está empezando su



segunda oscilación. De la misma manera, el punto R a una distancia λ de Q, y 2λ de P, estará en fase con P y Q (o, dicho con más propiedad, tendrá un retraso de fase de 2π respecto a Q y de 4π respecto a P).

De este modo, la fotografía instantánea del eje X oscilante permite reconocer puntos con diferencias de fase 2π, 4π, 6π, etc. con la sencilla condición de que estén separados distancias iguales a λ, 2λ, 3λ, etc. La cuestión es, entonces, que seamos capaces de conocer la diferencia de fase entre dos puntos del medio que no estén separados un número entero de longitudes de onda, sino **una distancia d cualquiera**. Por fortuna, la relación que liga la **distancia entre dos puntos del medio** y la **diferencia de fase** entre ellos es muy simple, ya que son cantidades proporcionales, así que podemos escribir

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\delta\phi}{d} \qquad (1)$$

donde 2π es la diferencia de fase entre dos puntos separados una distancia λ, en tanto que $\delta\phi$ es la diferencia de fase existente entre dos puntos del eje separados una distancia d: (1) recoge una sencilla proporcionalidad, como hemos dicho. Esta ecuación permite despejar $\delta\phi$, que quedaría como

$$\delta\phi = \frac{\mathbf{2\pi d}}{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{kd} = \frac{2\pi d}{vT} = \boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v}} \qquad (2)$$

escrita en distintas versiones: v es la velocidad de propagación de la onda, ω la frecuencia angular, k el número de ondas y T es el periodo; se han empleado ahí relaciones conocidas, como $\lambda = vT$ o $k = 2\pi/\lambda$. Las relaciones que recoge (2), en cualquiera de las formas, son de gran interés, ya que la periodicidad espacial de una onda armónica es una característica esencial y a menudo no bien entendida.

a) En el caso que nos plantean, conocemos la distancia entre los puntos del medio, d = 20 cm, y también la diferencia de fase $\delta\phi = \pi/2$ rad entre ellos. Empleando (2) obtenemos inmediatamente la longitud de onda λ:

$$\lambda = \frac{2\pi d}{\delta\phi} = \frac{2\pi.20}{\pi/2} = \mathbf{80\ cm}$$

y encontramos un resultado que, esta vez, era fácilmente previsible: después de todo, una diferencia de fase de $\pi/2$ rad debe corresponder a la cuarta parte de λ, del mismo modo que una diferencia de fase de π rad se referiría a puntos separados por ½ λ; en eso consiste la proporcionalidad.

El periodo, conocida la frecuencia ν = 50 Hz, es obvio $\qquad T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{50} = \mathbf{0{,}02\ s}$

y la velocidad de propagación es también inmediata $\qquad v = \lambda\nu = 80.50 = 4000\ cm/s = \mathbf{40\ m/s}$

Conviene observar que hemos utilizado cm como unidad de longitud en todos los cálculos, desde el momento en que pusimos d = 20 cm; así, la longitud de onda aparece en cm, y la velocidad de propagación en cm/s.

b) El segundo apartado incide en la periodicidad temporal de una onda armónica. Se trata ahora de fijar la atención en un punto del medio y seguir su oscilación a lo largo del tiempo; por tanto, estamos hablando sencillamente del M.A.S. que ejecuta ese punto del medio, idéntico al que lleva a cabo cualquier otro punto — siempre que se trate de una onda monodimensional —, salvo por diferencias de fase. Si escribimos la ecuación de propagación de onda

$$y(x;t) = A\,sen(\omega t - kx)$$

para una onda armónica transversal viajera en el eje X, moviéndose hacia la derecha, podemos fijar un punto dado con una posición $x = x_1$, de modo que el término $kx = kx_1$ = Cte, y la función ya no será de 2 variables, sino sólo de t: se habrá convertido en la ecuación del M.A.S. que está ejecutando el punto $x = x_1$:

$$y(t) = A\,sen(\omega t - kx_1) = A\,sen(\omega t - Cte)$$

y el valor Cte no sería sino una fase inicial de ese M.A.S. Los desplazamientos del punto $x = x_1$ siguen esa ley, y la fase de este MAS se escribe

$$\phi(t) = \omega t - Cte$$

de modo que el cambio de fase en un intervalo de Δt determinado tomaría el valor

$$\Delta\phi = \phi(t+\Delta t) - \phi(t) = \boldsymbol{\omega.\Delta t}$$

expresión que podemos utilizar sistemáticamente para resolver cuestiones acerca de variaciones de fase en el tiempo en un MAS. En el caso que nos ocupa, Δt = 0,01 s, de manera que resultaría

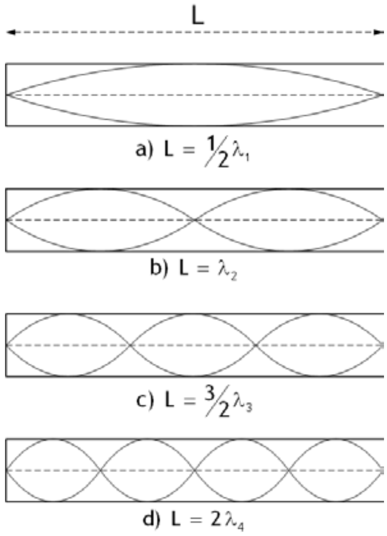
$$\Delta\phi = \omega.\Delta t = 2\pi\nu.0{,}01 = 2\pi.50.0{,}01 = \boldsymbol{\pi}\ \mathbf{rad}$$

y se trataría de un resultado que debíamos esperar, desde que sabíamos que el periodo T = 0,02 s: en efecto, un periodo completo significaría una oscilación completa del punto dado, por tanto, un cambio de fase de 2π rad. En consecuencia, un intervalo de 0,01 s, la mitad de un periodo, implicaría media oscilación del punto y un cambio de fase de π rad.

SEPTIEMBRE 97

CUESTIÓN 2.— Si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuáles son los valores de la frecuencia fundamental y de los otros armónicos en el caso de las ondas estacionarias en un tubo de 1 m de longitud cerrado por ambos extremos? ¿Cuáles son los valores de las longitudes de onda correspondientes a dichas frecuencias?
Justifica las respuestas.

Si los dos extremos del tubo están cerrados, **ambos extremos han de ser nodos**, es decir, puntos de amplitud de vibración nula. La figura que puede verse al lado recoge, entonces, cuál sería la forma de la onda correspondiente a la frecuencia fundamental, caso a), y los tres primeros armónicos, dispuestos de forma ordenada hacia abajo, casos b), c) y d).



Para la frecuencia fundamental, como puede verse, tomamos los dos extremos como nodos consecutivos, de forma que la longitud del tubo resulta igual a media longitud de onda, que hemos llamado λ_1. El primer armónico, de longitud de onda λ_2, tiene un nodo intercalado entre los dos extremos; el segundo armónico, de longitud de onda λ_3, tiene dos nodos intercalados entre los dos extremos, etc..

Es fácil concluir cuál es la relación entre la longitud L del tubo y las longitudes de onda de las ondas estacionarias posibles en estas condiciones:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad (n=1, 2, 3, 4,..) \qquad (1)$$

donde λ_n representa las distintas longitudes de onda, λ_1, λ_2, λ_3, .., que podemos encontrar para los valores n = 1, 2, 3,…; por supuesto, el valor n = 1 corresponde a la onda fundamental. Para hablar de frecuencias, recordemos la relación esencial entre longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación de la onda:

$$\lambda_n . \nu_n = v \qquad (2)$$

que, llevada a (1) y despejando, nos da la fórmula para ir obteniendo las frecuencias pedidas:

$$\nu_n = n\,\frac{v}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (3)$$

de las cuales la primera, ν_1, es la fundamental. Con los valores L = 1 m y v = 340 m/s, tenemos:

$$\nu_1 = \frac{340}{2} = \mathbf{170\ Hz} \qquad (4)$$

y los armónicos sucesivos tienen frecuencias doble, triple, cuádruple, etc..que el valor encontrado en (4). Así:

$$\nu_2 = 2\nu_1 = \mathbf{340\ Hz}$$
$$\nu_3 = 3\nu_1 = \mathbf{510\ Hz}$$
$$\nu_4 = 4\nu_1 = \mathbf{680\ Hz}$$
....

En lo que respecta a las longitudes de onda, podemos volver a (1) y despejar

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (5)$$ para ir obteniendo

$$\lambda_1 = 2L = \mathbf{2\ m}$$
$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2} = \mathbf{1\ m}$$
$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{3} = \mathbf{0{,}67\ m}$$
....

y comprobar que las longitudes de onda de los armónicos sucesivos resultan la mitad, la tercera parte, la cuarta parte, etc.. de la longitud de onda correspondiente al estado fundamental.

SEPTIEMBRE 97

PROBLEMA B1.– Una partícula de masa 5 g oscila con movimiento armónico simple, en torno a un punto O, con una frecuencia de 12 Hz y una amplitud de 4 cm. En el instante inicial la elongación de la partícula es nula.

a) Si dicha oscilación se propaga según una dirección que tomamos como eje X, con una velocidad de 5 m/s, escribir la ecuación que representa la onda unidimensional originada.

b) Calcular la energía que transmite la onda generada por el oscilador.

a) Supondremos que se trata de una onda transversal, además de armónica, propagándose hacia la derecha en el eje X, de acuerdo por tanto a una ecuación de propagación como

$$y(x;t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx) \qquad (1)$$

y en la que, como señala el enunciado, la frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu = 2\pi.12 = 24\pi$ rad/s. En cuanto al número de ondas k, podemos obtenerlo recordando

$$v = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{24\pi}{5} = 4{,}8\pi \text{ m}^{-1}$$

de manera que, con esos valores, podemos escribir ya

$$\mathbf{y(x;t) = 4\,sen(24\pi t - 4{,}8\pi x)} \qquad y <> cm;\ t <> s;\ x <> m$$

la ecuación de propagación que nos piden. Nótese que no incluimos ninguna fase inicial en la misma, ya que el enunciado especifica que la elongación de la partícula es inicialmente nula (aunque ahí queda alguna imprecisión; en realidad también podría tratarse de una fase inicial π, sabiendo **solo** que la elongación inicial es cero. No tiene mayor importancia, en todo caso). Las unidades tienen igualmente interés, y destacamos el que, habiendo conservado la amplitud A = 4 cm en estas unidades, la elongación y se mide en cm; en cambio x se mide en m, igual que k se mide en m^{-1}.

b) La energía transmitida por la onda lo es en la dirección del eje X exclusivamente, ya que se trata de una onda monodimensional. En una situación más frecuente y también más compleja, con una onda propagándose en el espacio tridimensional, nos referiríamos a la **intensidad** de la onda: como se sabe, se trata de la **energía que transporta la onda por unidad de área y de tiempo**; pero en una onda monodimensional este concepto se reduce en todo caso a la **energía transmitida por unidad de tiempo**, es decir, la potencia transmitida por la onda. Podemos recordar que ésta se escribe según

$$P = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2$$

donde μ es la densidad lineal de masa del medio en la dirección X; v = 5 m/s es la velocidad de propagación de la onda, ω y A han sido calculadas más arriba. No tenemos información acerca de la densidad del medio, de modo que tendríamos que dejar el resultado en función de μ. Resultaría

$$P = \frac{1}{2}\mu\, 5(24\pi)^2\, 0{,}04^2 = \mathbf{22{,}74\mu\ W} \quad (\mu \text{ en kg/m})$$

Así, la cuestión planteada en b) no se puede responder. Es posible que el redactor del enunciado desease una respuesta más sencilla, pensando en que la energía del oscilador constituido por la partícula de masa 5 g es la energía que se transmite en la onda. Si es así, calculamos la energía del oscilador

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

cuyo valor numérico sería $E = \frac{1}{2}\, 5.10^{-3}(24\pi)^2(4.10^{-2})^2 = \mathbf{2{,}27.10^{-3}\ J}$

pero no podríamos saber en qué tiempo se transmite: no conoceríamos la potencia de la onda.

JUNIO 99

CUESTIÓN 2.- Dos sonidos tienen niveles de intensidad sonora de 50 dB y 70 dB, respectivamente. Calcule cuál será la relación entre sus intensidades.

La intensidad sonora es una magnitud que se relaciona con nuestro nivel de percepción de los sonidos. Se define de acuerdo según

$$\beta = 10\,\lg\frac{I}{I_0} \qquad (I,\ I_0 \text{ en W/m}^2,\ \beta \text{ en dB}) \qquad (1)$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 es la intensidad umbral para la audición de un sonido de 1000 Hz, que se toma como referencia, y β se mide en **decibelios, dB**. Así,

si I es 10 veces mayor que I_0, entonces β = 10 dB;
si I es 100 veces mayor que I_0, entonces β = 20 dB;
si I es 1000 veces mayor que I_0, entonces β = 30 dB;

etc… Cada orden de magnitud que se incrementa la intensidad, haciéndola 10 veces mayor, produce un incremento de 10 dB de intensidad sonora. Por ejemplo, un sonido de 50 dB tiene una intensidad I que es 5 órdenes de magnitud mayor que I_0; por tanto, una intensidad igual a 10^{-7} W/m^2, del mismo modo que una intensidad sonora de 70 dB es la de un sonido cuya intensidad es 10^{-5} W/m^2. Aunque la comparación entre estos sonidos es ya evidente, hagamos un cálculo formal de las intensidades correspondientes a ambos sonidos:

$$50 = 10 \lg \frac{I_1}{I_0} \quad \Rightarrow \quad \lg \frac{I_1}{I_0} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_0} = 10^5 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10^{-12}.10^5 = \mathbf{10^{-7}\ W/m^2}$$

$$70 = 10 \lg \frac{I_2}{I_0} \quad \Rightarrow \quad \lg \frac{I_2}{I_0} = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_0} = 10^7 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10^{-12}.10^7 = \mathbf{10^{-5}\ W/m^2}$$

donde I_1 e I_2 son las intensidades respectivas de ambos sonidos. Bastaría dividir ambas intensidades

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{-5}}{10^{-7}} = \mathbf{100}$$

para concluir que el segundo sonido es 100 veces más intenso que el primero.

SEPTIEMBRE 99

PROBLEMA B1.- Un tren de ondas armónicas se propaga en un medio unidimensional de forma que las partículas del mismo están animadas de un movimiento armónico simple representado por:

$$\mathbf{y = 4\,sen(\frac{\pi}{3}t + \varphi)} \qquad \text{(y en centímetros y t en segundos)}$$

Determine:

a) La velocidad de propagación de las ondas, sabiendo que su longitud de onda es igual a 240 cm.

b) La diferencia de fase en un instante dado correspondiente a dos partículas del medio separadas una distancia de 210 cm.

a) La velocidad de propagación de una onda armónica se puede escribir $v = \frac{\lambda}{T}$

donde, como se nos dice, λ = 240 cm y, en lo que refiere al periodo T, podemos obtenerlo con facilidad a partir de la ecuación del MAS que anima a las partículas del medio. En efecto,

$$\omega = \frac{\pi}{3}\ \text{rad/s} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6\ \text{s}$$

de modo que la velocidad de propagación resulta ser

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{240\ \text{cm}}{6\ \text{s}} = \mathbf{40\ cm/s}$$

b) La diferencia de fase entre dos partículas del medio separadas una distancia **d** se obtiene de

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d$$

véase **JUNIO 97 PROBLEMA B2** para una explicación detallada de esta expresión. En el caso que nos ocupa

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d = \frac{2\pi}{240\ \text{cm}}210\ \text{cm} = \mathbf{\frac{7\pi}{4}\ rad} = (315^\circ)$$

una cantidad cercana a una oscilación completa.

JUNIO 00

CUESTIÓN 2.— Una onda transversal que se propaga en una cuerda, coincidente con el eje X, tiene por expresión matemática: y(x,t) = 2 sen(7t – 4x), en unidades SI. Determine:

a) La velocidad de propagación de la onda y la velocidad máxima de vibración de cualquier punto de la cuerda.

b) El tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda.

a) La ecuación de propagación que nos ofrece el enunciado contiene suficiente información para responder, se trata de localizar los parámetros de la onda, que son:

$$A = 2\ m; \qquad \omega = 7\ rad/s; \qquad k = 4\ m^{-1}$$

de modo que la velocidad de propagación se tendría directamente según $v = \frac{\omega}{k} = \frac{7}{4} = \mathbf{1,75\ m/s}$

mientras que la velocidad de vibración de los puntos de la cuerda es la correspondiente a M.A.S. de amplitud A = 2 m y pulsación ω = 7 rad/s. Por supuesto, sabemos que esa velocidad es variable en el tiempo pero, si se trata de calcular la velocidad **máxima** de la vibración de cualquier punto, debemos recordar que es

$$v_{máx} = \pm A\omega = \pm 2.7 = \mathbf{\pm 14\ m/s}$$

y que esta velocidad se tiene cuando el punto de la cuerda está pasando por su posición de equilibrio. Además, los signos ± se corresponden con la posibilidad de que el punto en cuestión se esté moviendo hacia arriba o hacia abajo cuando pasa por ese lugar.

b) Una pregunta muy simple: es el **periodo**. Periodo, cuando se trata de la propagación de una onda armónica, es un tiempo que tiene dos interpretaciones posibles, por supuesto coincidentes:

1) Es el tiempo que tarda un punto del medio en ejecutar una oscilación completa.

2) Es el tiempo que la onda precisa para recorrer una longitud de onda λ.

de modo que estamos de lleno en la segunda de ellas. El valor del periodo, por otro lado, es obvio:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7} = \mathbf{0,90\ s}$$

SEPTIEMBRE 00

CUESTIÓN 2.— Uno de los extremos de una cuerda tensa, de 6 m de longitud, oscila transversalmente con un movimiento armónico simple de frecuencia 60 Hz. Las ondas generadas llegan al otro extremo de la cuerda en 0,5 s. Determine:

a) La longitud de onda y el número de onda de las ondas de la cuerda.

b) La diferencia de fase de oscilación existente entre dos puntos de la cuerda separados 10 cm.

a) Comenzaremos calculando la velocidad de propagación de la onda, a partir de un dato tan simple como es que recorra 6 m en un tiempo de 0,5 s, de modo que bastaría dividir distancia recorrida por tiempo empleado en ello:

$$v = \frac{L}{t} = \frac{6\ m}{0,5\ s} = 12\ m/s \qquad (1)$$

y el resto es muy sencillo: conocida la frecuencia ν = 60 Hz y la velocidad de propagación, obtenemos la longitud de onda inmediatamente:

$$v = \lambda\nu \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{12\ m/s}{60\ Hz} = \mathbf{0,2\ m}$$

y también el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{2\pi}{0,2} = \mathbf{10\pi\ m^{-1}}$

b) Una vez más, la cuestión relativa a diferencia de fase en la oscilación de dos puntos del medio separados una cierta distancia. Ya que la longitud de onda es λ = 0,2 m = 20 cm, y puesto que los puntos de que nos hablan distan 10 cm, es decir, ½ λ, podríamos concluir sin más trámite que la diferencia de fase entre ellos corresponde a media oscilación, por tanto, sería π rad. También podemos, en todo caso, recurrir a la proporcionalidad que ya conocemos entre las magnitudes diferencia de fase y distancia entre puntos del medio:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\delta\phi}{d}$$

donde, en nuestro caso, λ = 0,2 m = 20 cm y d = 10 cm. Quedaría despejar la diferencia de fase $\delta\phi$:

$$\delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi.10}{20} = \mathbf{\pi\ rad}$$

MODELO 01

CUESTIÓN 2.— La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa coincidente con el eje X es y = 0,2 sen (100 πt - 200 πx), en unidades SI. Determine:

a) Los valores del periodo, la amplitud, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.

b) La expresión matemática de la onda en términos de la función coseno.

a) La lectura directa de la ecuación de propagación de onda indica que se trata de una onda viajera en el eje X, moviéndose hacia la derecha, con una amplitud de 0,2 m. Los valores de la frecuencia angular, ω, y del número de ondas, k, son

$$\omega = 100\pi \text{ rad/s}; \qquad k = 200\,\pi \text{ m}^{-1}$$

de modo que el periodo T será $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = \mathbf{0{,}02\ s}$

y la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{200\pi} = \mathbf{0{,}01\ m}$

mientras que la velocidad de propagación de la onda resultará

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{100\pi}{200\pi} = \mathbf{0{,}5\ m/s}$$

y la amplitud, como ya se ha dicho, $A = \mathbf{0{,}2\ m}$

b) La función seno puede convertirse en función coseno recordando $\text{sen}\,\varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

de manera que nuestra onda quedará, en términos de función coseno, como

$$y = 0{,}2\ \text{sen}\,(100\,\pi t - 200\,\pi x) = \mathbf{0{,}2\cos\left(100\,\pi t - 200\,\pi x - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{(SI)}$$

y está hecho.

MODELO 01

PROBLEMA B1.— El sonido emitido por un altavoz tiene un nivel de intensidad de 60 dB a una distancia de 2 m de él. Si el altavoz se considera como una fuente puntual, determine:

a) La potencia del sonido emitido por el altavoz.

b) A qué distancia el nivel de intensidad sonora es de 30 dB y a qué distancia es imperceptible el sonido.

Datos: El umbral de audición es $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

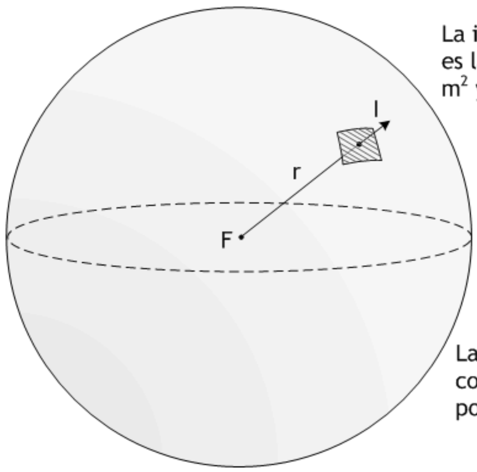
a) El nivel de intensidad sonora conocido permite calcular con facilidad la intensidad del sonido a la distancia de 2 m del altavoz:

$$\beta = 10\ \lg\frac{I}{I_0} \quad \Rightarrow \quad 60 = 10\ \lg\frac{I}{10^{-12}} \quad \Rightarrow \quad \lg\frac{I}{10^{-12}} = 6 \quad \Rightarrow \quad I = 10^{6}.10^{-12} = 10^{-6}\ \text{W m}^{-2}$$

y de ahí resulta inmediato conocer la potencia con que emite el altavoz, ya que bastaría multiplicar la intensidad que acabamos de obtener por la superficie de la esfera de radio r = 2 m; esto es

$$P = 4\pi r^2\, I$$

$$P = 16\pi.10^{-6}\ \text{W} = \mathbf{5{,}03.10^{-5}\ W}$$



b) Podemos hallar la primera de las distancias que nos piden mediante un sencillo cálculo mental: recordemos, en efecto, que al alejarnos radialmente del foco emisor van disminuyendo tanto la intensidad I (medida en W m^{-2}) como el nivel de intensidad sonora, β (medido en dB). De hecho, como sabemos, si la intensidad **se divide por 10**, entonces el nivel de intensidad sonora **disminuye 10 dB.** Naturalmente, esto se aplica de forma reiterada, de forma que si la intensidad **se divide por 100**, entonces β **disminuye 20 dB**, etc..; así, como el nivel de intensidad sonora ha bajado de 60 dB a 30 dB, parece evidente que hemos debido dividir la intensidad por un factor 1000, de forma que la nueva intensidad será

$$I' = \frac{I}{1000} = \frac{10^{-6}}{10^{3}} = 10^{-9}\ \text{W m}^{-2}$$

y ahora, recordando que la intensidad decrece con el cuadrado de la distancia al foco emisor, $I.r^2 = I'.r'^2$
podemos hallar la distancia r' a la que ß = 30 dB:

$$I' = 10^{-9} = I\,\frac{r^2}{r'^2} = 10^{-6}\,\frac{2^2}{r'^2} \qquad \Rightarrow \qquad r' = \sqrt{4000} = \mathbf{63,25\ m}$$

Para hallar la segunda distancia, a la que el sonido es ya imperceptible, recordemos que un sonido se vuelve inaudible cuando su intensidad es I" = 10^{-12} W m^{-2}, de modo que podemos usar de nuevo la caída de la intensidad con el cuadrado de la distancia al foco

$$I.r^2 = I''.r''^2 \qquad \Rightarrow \qquad I'' = 10^{-12} = I\,\frac{r^2}{r''^2} = 10^{-6}\,\frac{2^2}{r''^2} \qquad \Rightarrow \qquad r'' = \sqrt{4.10^6} = \mathbf{2000\ m}$$

SEPTIEMBRE 01

PROBLEMA A1.– La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa orientada según el eje X es:

$$\mathbf{y = 0,5\ sen\ (6\pi t - 2\pi x)} \qquad \text{(x, y en metros; t en segundos)}$$

Determine:

a) **Los valores de la longitud de onda y de la velocidad de propagación de la onda.**
b) **Las expresiones que representan la elongación y la velocidad de vibración en función del tiempo, para un punto de la cuerda situado a una distancia x = 1,5 m del origen.**
c) **Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de la vibración de los puntos de la cuerda.**
d) **La distancia mínima que separa dos puntos de la cuerda que, en un mismo instante, vibran desfasados en 2π radianes.**

La ecuación de propagación de onda que nos dan se corresponde con la conocida onda armónica viajera en el eje X, en sentido positivo,

$$y(x;t) = A\ sen(\omega t - kx) \qquad (1)$$

a) de modo que una sencilla comparación nos da, inmediatamente, los valores de A, ω y k:

$$A = 0,5\ m; \qquad \omega = 6\pi\ rad\ s^{-1}; \qquad k = 2\pi\ m^{-1}$$

de los que deducimos con sencillez:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi} = \mathbf{1\ m}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{6\pi}{2\pi} = \mathbf{3\ ms^{-1}}$$

b) Para un punto situado 1,5 m a la derecha del origen, x = 1,5 m, la elongación de la oscilación armónica en función del tiempo es

$$y(t) = 0,5\ sen(6\pi t - 2\pi.1,5) = 0,5\ sen(6\pi t - \pi) \qquad (x\ e\ y <> m;\ t <> s)$$

Nótese que, aunque la fase inicial calculada para ese punto es $\varphi_0 = -3\pi$ rad, en términos prácticos equivale a $-\pi$ rad, descontando 2π rad: eso no produciría ningún cambio en las elongaciones que obtuviésemos para cualquier valor de t.

Naturalmente, la ley de velocidades para ese punto es la derivada de la elongación:

$$v(t) = \frac{d\,y(t)}{dt} = 3\pi\cos(6\pi t - \pi) \qquad (v <> m/s;\ t <> s)$$

c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de vibración son los mismos para cualquier punto de la cuerda: como sabemos, los máximos de velocidad se alcanzan cada vez que un punto de la cuerda pasa por su posición de equilibrio, en tanto que los máximos de aceleración se tienen en las posiciones extremas de la oscilación de cada punto.

Podemos ver directamente el valor de la velocidad máxima en la ley de velocidades del apartado anterior:

$$v_{max} = \pm A\omega = \mathbf{\pm 3\pi\ m/s}$$

y el de la aceleración máxima es, como recordaremos

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm\ 0,5.(6\pi)^2 = \mathbf{\pm 18\pi^2\ m/s^2}$$

d) La distancia mínima (en realidad, aquí sobra el adjetivo) entre dos puntos que oscilan con diferencia de fase de 2π rad es, por definición, λ. La ambigüedad con que se dice muchas veces "oscilar en fase", hablando de puntos separados una distancia λ, 2λ, 3λ, .. es quizá la razón de que el enunciado emplee la expresión "distancia mínima". Como sabemos, si dos puntos están separados una distancia λ, la diferencia de fase δφ entre ellos es 2π rad; si están separados una distancia 2λ, entonces δφ = 4π rad; etc.. Por supuesto, en el caso que nos ocupa, la respuesta es λ = **1 m**.

MODELO 02

CUESTIÓN 2.— Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 10^{-6} W.

a) **Determine el nivel de intensidad expresado en decibelios a 1 m de la fuente sonora.**

b) **¿A qué distancia de la fuente sonora el nivel de intensidad se ha reducido a la mitad del valor anterior?**

Dato: La intensidad umbral de audición es $I_o = 10^{-12}$ W m^{-2}

a) Podemos empezar por calcular la intensidad de la onda a una distancia de 1 m de la fuente: eso se consigue, ya que debemos suponer que se trata de una onda esférica, con el cociente de la potencia (energía por unidad de tiempo) emitida por la superficie de una esfera de radio r = 1 m; es decir

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{10^{-6}\ W}{4\pi\ m^2} = 7{,}96.10^{-8}\ Wm^{-2}$$

e inmediatamente el nivel de intensidad sonora a 1 m de la fuente,

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{7{,}96.10^{-8}}{10^{-12}} = \mathbf{49\ dB}$$

b) Así que el nivel de intensidad a la distancia r' que buscamos has de ser β' = 24,5 dB. Podríamos proceder en sentido inverso al apartado anterior, hallando I' de

$$\beta' = \frac{\beta}{2} = 24{,}5\ dB = 10\log\frac{I'}{I_0} \quad\Rightarrow\quad \log\frac{I'}{10^{-12}} = 2{,}45 \quad\Rightarrow\quad I' = 10^{2{,}45}.10^{-12} = 2{,}82.10^{-10}\ Wm^{-2}$$

y de ahí, recordando la potencia de la fuente, la distancia pedida:

$$I' = \frac{P}{4\pi r'^2} \quad\Rightarrow\quad 2{,}82.10^{-10} = \frac{10^{-6}}{4\pi r'^2} \quad\Rightarrow\quad r' = \sqrt{\frac{10^{-6}}{4\pi.2{,}82.10^{-10}}} = \mathbf{16{,}80\ m}$$

SEPTIEMBRE 02

CUESTIÓN 1.— Se tiene una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa. Si se reduce a la mitad su frecuencia, razone qué ocurre con:

a) el periodo; b) la velocidad de propagación; c) la longitud de onda; d) la amplitud.

a) Frecuencia y periodo son magnitudes inversas. Si la frecuencia se divide por dos, **el periodo se hará doble.**

b) La velocidad de propagación de una onda en una cuerda tensa depende de características físicas del medio: la tensión de la cuerda, T, y su densidad lineal, μ, pero **no depende de la frecuencia de la onda viajera**, de manera que todas las ondas, sea cual sea su frecuencia, viajan en la cuerda con la misma velocidad, $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

c) Recordemos la ecuación $v = \lambda\nu$. Puesto que v no cambia al cambiar la frecuencia, el producto $\lambda\nu$ no cambia: así, si la frecuencia se reduce a la mitad, **la longitud de onda se duplicará**.

d) La amplitud A de una onda es una **magnitud independiente de la frecuencia: no cambiará.** En términos sencillos de entender, la amplitud la determinamos nosotros de forma arbitraria (agitamos la cuerda con la amplitud que deseemos), así como la frecuencia (agitamos la cuerda tan rápido como deseemos), y ambas decisiones son independientes una de otra. Eso sí, ambas influyen de modo cuadrático en la cantidad de energía que transportará la onda.

SEPTIEMBRE 02

CUESTIÓN 4.— Una bolita de 0,1 g de masa cae desde una altura de 1 m, con velocidad inicial nula. Al llegar al suelo el 0,05% de su energía cinética se convierte en un sonido de duración 0,1 s.

a) **Halle la potencia sonora generada.**

b) **Admitiendo que la onda sonora generada puede aproximarse a una onda esférica, estime la distancia máxima a la que puede oírse la caída de la bolita si el ruido de fondo sólo permite oír intensidades mayores que 10^{-8} W/m^2**

a) Como sabemos, la energía cinética con que llegará la bolita al suelo es igual a la energía potencial gravitatoria que tiene cuando está a 1 m de altura, ya que parte de velocidad inicial nula y se trata de caída libre. Por tanto, esa energía vale

$$E_c^{suelo} = E_p^{arriba} = mgh = 10^{-4}.9{,}8.1 = 9{,}8.10^{-4}\ J$$

donde la masa m va medida en kg, se ha tomado $g \cong 10$ m/s^2 y la energía resultante se mide en J. De esta cantidad, un 0,05% se convierte en energía sonora, de manera que la energía total del sonido que se produce sería

$$E_{sonido} = \frac{0{,}05}{100}.9{,}8.10^{-4} = 4{,}9.10^{-7}\ J$$

y, como la duración del sonido es de 0,1 s, la potencia sonora (energía emitida por unidad de tiempo) es una sencilla división entre energía total emitida, E_{sonido}, y duración del sonido, $\Delta t = 0{,}1$ s:

$$P = \frac{E_{sonido}}{\Delta t} = \frac{4,9.10^{-7}\ J}{0,1\ s} = \mathbf{4,9.10^{-6}\ W}$$

b) La potencia que acabamos de calcular expresa **cuánta energía produce la fuente de la onda en un segundo**. Esa energía se propaga en el medio en la medida en que lo va haciendo la onda sonora, de manera que si nos fijamos en un frente de onda cualquiera, supuesto esférico como dice el enunciado, la **cantidad de energía que debe cruzar el frente de onda en un segundo es la que sale de la fuente en un segundo**, es decir, la potencia con que emite la fuente. Como esa energía debe, además, repartirse entre toda la superficie del frente de onda, **la intensidad (energía que atraviesa el frente de onda por unidad de área y de tiempo) se obtendrá dividiendo la potencia de la fuente por la superficie del frente de onda:**

$$I = \frac{P}{S} = \frac{4,9.10^{-6}}{4\pi r^2}\ W/m^2$$

así que la distancia máxima a la que podrá oírse la caída de la bolita será aquella a la que esta intensidad haya bajado hasta los 10^{-8} W m^{-2} que nos proponen como cantidad mínima audible. Igualando, entonces, obtendremos r:

$$I = \frac{4,9.10^{-6}}{4\pi r^2} = 10^{-8}\ W/m^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{\frac{4,9.10^{-6}}{4\pi.10^{-8}}} = \mathbf{6,24\ m}$$

que marca el límite pedido: por debajo de esa distancia, se oirá la caída de la bolita; a esa distancia o más lejos del punto de la caída, no se oirá.

MODELO 03

PROBLEMA B1.– Una onda armónica transversal de frecuencia 80 Hz y amplitud 25 cm se propaga a lo largo de una cuerda tensa de gran longitud, orientada según el eje X, con una velocidad de 12 m/s en su sentido positivo. Sabiendo que en el instante t = 0 el punto de la cuerda de abcisa x = 0 tiene una elongación y = 0 y su velocidad de oscilación es positiva, determine:

a) **La expresión matemática que representa dicha onda.**
b) **La expresión matemática que representa la velocidad de oscilación en función del tiempo del punto de la cuerda de abcisa x = 75 cm.**
c) **Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de oscilación de los puntos de la cuerda.**
d) **La diferencia de fase de oscilación en un mismo instante entre dos puntos de la cuerda separados 37,5 cm.**

El enunciado describe una onda sin fase inicial, ya que al tiempo t = 0 el foco de la onda, x = 0, está en la posición de equilibrio y con velocidad máxima positiva. De este modo, la ecuación de propagación de esta onda ha de responder al modelo

$$y(x;t) = A\ \text{sen}(\omega t - kx) \qquad \text{en las unidades apropiadas}$$

a) Sabemos $A = 0,25$ m, del enunciado,

y también que $\omega = 2\pi\nu = 2\pi.80 = 160\pi$ rad/s,

y además $v = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{160\pi}{12} = \frac{40}{3}\pi\ m^{-1}$

así que podemos escribir $\mathbf{y(x;t) = 0,25\ sen(160\pi t - \frac{40\pi}{3} x)}$ $\quad x, y <> m;\ t <> s$

b) Entrando en la ecuación de propagación con el valor x = 0,75 m tendremos la ecuación de las elongaciones de ese punto como función del tiempo, es decir, la ley del MAS que describe el movimiento de ese punto de la cuerda. Nos quedará:

$$y(t) = 0,25\ \text{sen}(160\pi t - \frac{40\pi}{3} 0,75) = 0,25\ \text{sen}(160\pi t - 10\pi) \qquad y <> m;\ t <> s$$

y, a la vista del resultado, parece que este punto oscila en fase con el foco x = 0, aunque con un retraso de cinco oscilaciones completas, que corresponden a una diferencia de fase de 10π rad. Además, esto nos dice también que en 0,75 m hay cinco longitudes de onda, de modo que tendrá que ser λ = 0,15 m. Disgresiones aparte, como nos piden la velocidad de oscilación de este punto, hemos de derivar la elongación:

$$\mathbf{v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 40\pi\ cos(160\pi t - 10\pi);} \qquad v <> m/s;\ t <> s$$

c) Los valores máximos de velocidad y aceleración son los mismos para todos los puntos de la cuerda, los correspondientes a un MAS de amplitud A = 0,25 m y frecuencia angular ω = 160π rad/s. Se trata de

$v_{max} = \pm A\omega = \pm\ 0,25.160\pi = \mathbf{\pm 40\pi\ m/s}$

y $a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm\ 0,25.(160\pi)^2 = \mathbf{\pm 6400\pi^2\ m/s^2}$

d) Por último, la diferencia de fase entre dos puntos de la cuerda separados 37,5 cm (nosotros sabemos que eso serían 2,5 λ, así que debería tratarse de 5π rad, pero hemos de hacer los cálculos). Recordemos que la diferencia de fase entre dos puntos del medio es

$$\delta\varphi = k.d = \delta\varphi = k.d = \frac{40\pi}{3}.0,375 = \mathbf{5\pi\ rad}$$

como habíamos adelantado.

JUNIO 03

CUESTIÓN 2.— El periodo de una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa es de 2.10^{-3} s. Sabiendo, además, que dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase vale $\pi/2$ rad están separados una distancia de 10 cm, calcule:

- **a) la longitud de onda**
- **b) la velocidad de propagación.**

a) El dato relevante para hallar λ es el hecho de que dos puntos consecutivos con diferencia de fase de π/2 rad disten 10 cm. Sabemos que una diferencia de fase como esa corresponde a dos puntos separados por **un cuarto de longitud de onda**, de modo que podríamos concluir inmediatamente que λ = **40 cm**. De un modo más formal, recordando

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda}d$$

con d = 10 cm y $\Delta\varphi = \pi/2$, podemos despejar λ: $\lambda = \frac{2\pi d}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi.10}{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{40\ cm}$

como habíamos visto ya.

b) Ahora conocemos el periodo, $T = 2.10^{-3}$ s, y la longitud de onda, λ = 40 cm: la velocidad de propagación es inmediata, ya que

$$\lambda = vT \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{40}{2.10^{-3}} = 20000\ cm/s = \mathbf{20\ m/s}$$

SEPTIEMBRE 03

CUESTIÓN 2.— La expresión matemática de una onda armónica es y(x,t) = 3 sen (200πt − 5x + π), estando todas las magnitudes en unidades del SI. Determine:

- **a) La frecuencia y la longitud de onda.**
- **b) La amplitud y la velocidad de propagación de la onda.**

a) La lectura directa de la ecuación de propagación de ondas que nos proponen contiene las respuestas. En efecto, observamos que

$$\omega = 100\pi\ rad/s \qquad \Rightarrow \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \mathbf{50\ Hz}$$

del mismo modo que $k = 5\ m^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0,4\pi\ m = \mathbf{1,26\ m}$

b) La amplitud, leída directamente en la ecuación de propagación, es A = **3 m**

y la velocidad de propagación es también inmediata, $v = \frac{\omega}{k} = \frac{100\pi}{5} = 20\pi = \mathbf{62,83\ m/s}$

JUNIO 04

PROBLEMA A1.— Una onda transversal se propaga a lo largo de una cuerda horizontal, en el sentido negativo del eje de abcisas, siendo 10 cm la distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase. Sabiendo que la onda está generada por un foco emisor que vibra con un movimiento armónico simple de 50 Hz y una amplitud de 4 cm, determine:

- **a) La velocidad de propagación de la onda.**
- **b) La expresión matemática de la onda, si el foco emisor se encuentra en el origen de coordenadas, y en t = 0 la elongación es nula.**
- **c) La velocidad máxima de oscilación de una partícula de la cuerda.**
- **d) La aceleración máxima de oscilación en un punto cualquiera de la cuerda.**

a) Como sabemos, la expresión "distancia mínima entre dos puntos que oscilan en fase" alude a la **longitud de onda**, que sería, por tanto, λ = 10 cm (en realidad, como también sabemos, la diferencia de fase entre los dos puntos en cuestión es de 2π rad).

Por otro lado, el foco emite ondas de frecuencia 50 Hz, tal como señala el enunciado. Podemos escribir inmediatamente la velocidad de propagación, que sería

$$v = \lambda\nu = 10 \text{ cm. } 50 \text{ Hz} = \mathbf{500\ cm/s} = \mathbf{5\ m/s}$$

b) Tal como se describe la situación en t = 0, parece claro que no hay fase inicial (en rigor, si todo lo que sabemos es que la elongación es nula podría ser $\varphi_0 = \pi$ rad, pero supondremos que se quiere dar a entender $\varphi_0 = 0$ rad). Así, la ecuación de propagación de ondas que nos piden es, recordando que se propaga en sentido negativo, como

$$y(x;t) = A \operatorname{sen}(\omega t + kx)$$

donde $\omega = 2\pi\nu = 100\pi$ rad/s y $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}2\pi \ \text{cm}^{-1}$

de manera que podemos escribir $y(x;t) = \mathbf{4\ sen(100\pi t + 0{,}2\pi x)}$ x <> cm; t <> s; y <> cm

c) Cualquier partícula de la cuerda lleva a cabo un MAS de frecuencia 50 Hz y amplitud 4 cm. Como sabemos, su velocidad máxima se alcanzará al pasar por el centro de las oscilaciones, y su valor será

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm\ 4.100\pi = \pm\ 1256{,}64 \text{ cm/s} = \mathbf{\pm 12{,}57\ m/s}$$

d) Y la aceleración máxima de las oscilaciones de un punto cualquiera se alcanzará cuando el punto en cuestión se encuentre en la situación de elongación máxima, en los extremos de su oscilación. Su valor será

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm\ 0{,}04.(100\pi)^2 = \mathbf{\pm 3947{,}84\ m/s^2}$$

SEPTIEMBRE 04

CUESTIÓN 2.— Una partícula oscila con movimiento armónico simple según el eje Y en torno al origen de coordenadas, originando una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 20 m.s^{-1}, una amplitud de 0,02 m y una frecuencia de 10 Hz. Determine:

a) El periodo y la longitud de onda.
b) La expresión matemática de la onda, si en t = 0 la partícula situada en el origen de coordenadas está en la posición de máxima elongación positiva.

a) Conocido la frecuencia, conocido el periodo $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{10} = \mathbf{0{,}1\ s}$

y la longitud de onda, con la velocidad de propagación y la frecuencia, $v = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{20 \text{ m/s}}{10 \text{ Hz}} = \mathbf{2\ m}$

b) Si la partícula en x = 0 está en la máxima elongación positiva al tiempo t = 0, concluimos que existe una fase inicial de su oscilación de valor π/2 rad, que debemos trasladar a la ecuación de propagación de la onda, a partir de ese punto, a lo largo del eje X. Con los datos disponibles, es inmediato escribir

$$y(x;t) = \mathbf{0{,}02\ sen(20\pi t - \pi x + \frac{\pi}{2})} \qquad \text{(SI)}$$

donde se ha empleado, como es fácil de ver, $\omega = 2\pi\nu = 20\pi$ rad/s y $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ m}^{-1}$

JUNIO 05

CUESTIÓN 1.– El nivel de intensidad sonora de la sirena de un barco es de 60 dB a 10 m de distancia. Suponiendo que la sirena es un foco emisor puntual, calcule:

a) El nivel de intensidad sonora a 1 km de distancia.
b) La distancia a la que la sirena deja de ser audible.

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

a) Como sabemos, la intensidad de una onda esférica emitida por un foco puntual decae con el cuadrado de la distancia al foco, según

$$I \sim \frac{1}{r^2}$$

así que, siendo r_1 = 10 m y r_2 = 1 km = 1000 m, y siendo I_1 e I_2 las correspondientes intensidades de la onda a esas distancias del foco, se puede escribir

$$I_1\, r_1^2 = I_2\, r_2^2 \qquad (1)$$

donde conoceríamos r_1, r_2 e I_1 ya que, recordando que el nivel de intensidad sonora es de 60 dB a la distancia r_1 = 10 m, es fácil obtener I_1

$$60 \text{ dB} = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{I_1}{10^{-12}} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{10^{-12}} = 10^6 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

de modo que, volviendo a la ecuación (1), despejamos

$$I_1\, r_1^2 = I_2\, r_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = \frac{I_1\, r_1^2}{r_2^2} = \frac{10^{-6}\,10^2}{1000^2} = 10^{-10}\ \mathrm{W/m^2}$$

y el nivel de intensidad sonora a la distancia de 1 km queda $\beta_2 = 10 \log \dfrac{I_2}{10^{-12}} = 10 \log \dfrac{10^{-10}}{10^{-12}} = \mathbf{20\ dB}$

¿Podríamos haber obtenido este resultado más rápidamente? Sin duda: bastaría fijarnos en que hemos incrementado la distancia a la fuente por un factor 100 (de 10 m a 1000 m), así que habremos decrementado la intensidad por un factor 10^4 (recordemos la dependencia inversa y **cuadrática)**. Por otro lado, debemos saber que, si se divide la intensidad I por 10, la sonoridad ß (o nivel de intensidad sonora, como usa el enunciado) pierde 10 dB; si se divide por 100, la sonoridad pierde 20 dB; etc.: **si disminuye la intensidad I por un factor 10000, entonces la sonoridad ß perderá 40 dB**, así que restarán 20 dB de los 60 dB iniciales.

b) Comenzando por razonar según el último párrafo, deberíamos ser capaces de responder de modo inmediato: a 10 km del foco emisor. Obviamente, habría que justificarlo: para perder los 20 dB a la distancia de 1 km, la intensidad debería dividirse, a partir de ese punto, por 100 (pasando de 10^{-10} a 10^{-12} W/m^2, límite de lo audible). Y si la intensidad se ha dividido por 100, la distancia al foco debe haberse **multiplicado** por 10: habríamos pasado de 1 km a 10 km del foco.

Probablemente nos sentiríamos más cómodos resolviendo esto a golpe de ecuación. En tal caso, responderíamos como sigue: la distancia a la que la sirena deja de ser audible es aquella en que la intensidad de onda se reduzca a $I = I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Llamando R a esa distancia, empleamos (1) para hallarla fácilmente:

$$I_1\, r_1^2 = I_0\, R_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad R = \sqrt{\frac{10^{-6}\,10^2}{10^{-12}}} = \sqrt{10^8} = 10000\ \mathrm{m} = \mathbf{10\ km}$$

JUNIO 05

PROBLEMA B1.— Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda tensa de gran longitud y, por ello, una partícula de la misma realiza un movimiento armónico simple en la dirección perpendicular a la cuerda. El periodo de dicho movimiento es de 3 s y la distancia que recorre la partícula entre posiciones extremas es de 20 cm.

a) ¿Cuáles son los valores de la velocidad máxima y de la aceleración máxima de oscilación de la partícula?

b) Si la distancia mínima que separa dos partículas de la cuerda que oscilan en fase es de 60 cm, ¿cuál es la velocidad de propagación de la onda? ¿cuál es el número de onda?

a) Si la distancia que recorre la partícula entre posiciones extremas es de 20 cm (desde +A hasta —A), parece claro que la amplitud de la onda es A = 10 cm. De otra parte, conocemos el periodo, T = 3 s, así que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}\ \mathrm{rad/s}$$

y esto nos permite escribir la velocidad máxima y la aceleración máxima de la oscilación de la partícula:

$$v_{max} = \pm A\,\omega = \pm 10 \cdot \frac{2\pi}{3} = \mathbf{\pm 20{,}94\ cm/s}$$

$$a_{max} = \pm A\,\omega^2 = \pm 10 \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \mathbf{\pm 43{,}86\ cm/s^2}$$

b) Una vez más, se refieren a dos puntos separados por una longitud de onda, λ = 60 cm (y, una vez más, hubiese sido más correcto decir que la diferencia de fase entre ambos es de 2π rad). Podemos hallar muy fácilmente lo que nos piden:

La velocidad de propagación $v = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{60\ \mathrm{cm}}{3\ \mathrm{s}} = \mathbf{20\ cm/s}$

y el número de onda $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{60} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{30}}\ \mathrm{cm^{-1}} = \mathbf{0{,}10\ cm^{-1}}$

SEPTIEMBRE 05

PROBLEMA B1.– Dada la expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa de gran longitud:

$y = 0{,}03$ sen $(2\pi t - \pi x)$ donde x e y están expresados en metros y t en segundos.

a) **¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda?**
b) **¿Cuál es la expresión de la velocidad de oscilación de las partículas de la cuerda? ¿cuál es la velocidad máxima de oscilación?**
c) **Para t = 0, ¿cuál es el valor de desplazamiento de los puntos de la cuerda cuando x = 0,5 m y x = 1 m?**
d) **Para x = 1 m, ¿cuál es el desplazamiento cuando t = 0,5 s?**

a) La velocidad de propagación de la onda se obtiene de forma inmediata de la ecuación de propagación, donde puede leerse $k = \pi\ m^{-1}$ y $\omega = 2\pi$ rad/s; de manera que

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = \mathbf{2\ m/s}$$

b) La expresión $y(x;t) = 0{,}03$ sen $(2\pi t - \pi x)$ es, como sabemos, una función que proporciona la **elongación** de las partículas de la cuerda. Tiene dos variables, posición x del punto de la cuerda que interese, e instante de tiempo t que se desee. Esta función puede **derivarse respecto al tiempo t**, obteniéndose así la función velocidad

$$v(x;t) = \frac{\partial y(x;t)}{\partial t} = 0{,}03.2\pi\cos(2\pi t - \pi x) = \mathbf{0{,}06\pi\cos(2\pi t - \pi x)\ m/s}$$

de las partículas de la cuerda. Nótese que se trata de una función de las variables x y t, de modo que nos permite conocer el estado de velocidad instantánea de cualquier partícula de la cuerda (dando a la variable x la posición de la partícula que deseemos), en cualquier momento (danto a la variable t el valor que interese). Obsérvese, además, que hemos calculado la **derivada parcial** de la función y(x;t) respecto a t; esto debe entenderse al tener presente que y es **función de dos variables**, de modo que puede derivarse también respecto a la variable x.

Por lo demás, la velocidad máxima de cualquier partícula puede leerse directamente en la función que acabamos de obtener:

$$v_{max} = \pm\ \mathbf{0{,}06\pi\ m/s}$$

c) Bastará recurrir a la ecuación de propagación de ondas, $y(x;t) = 0{,}03$ sen $(2\pi t - \pi x)$, dando a t el valor t = 0 s y a la variable de posición x los valores que se indican

$$y(0{,}5;\ 0) = 0{,}03 \text{ sen } \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{-0{,}03\ m}$$

$$y(1;\ 0) = 0{,}03 \text{ sen } (-\pi) = \mathbf{0\ m} \qquad \text{(bajando)}$$

Una observación sería ahora pertinente: la ecuación de propagación de una onda en el eje x, del tipo $y(x;t) = A$ sen $(\omega t - kx)$, no implica necesariamente que la onda comience en x = 0, ni que lo haga al tiempo t = 0. Hablando de modo genérico, empleamos esa ecuación para referirnos a una onda viajera en el sentido positivo del eje. Por eso, podemos hacer los cálculos de posición de puntos cualesquiera de la cuerda, en cualquier momento, como acabamos de ver.

Ahora bien, si hacemos una interpretación estricta y aceptamos que la onda de la que hablamos tiene su origen en x = 0, al tiempo t = 0, entonces las elongaciones que acabamos de calcular tendrían otro valor:

$$y(0{,}5;\ 0) = \mathbf{0\ m} \quad ; \quad y(1;\ 0) = \mathbf{0\ m}$$

ya que la onda, al tiempo t = 0, **no habrá llegado a ninguno de esos puntos** (tarda 0,25 s en llegar al primero, 0,5 s en llegar al segundo), de modo que aún estarán en reposo.

d) En todo caso, la onda llega a x = 1 m precisamente al tiempo t = 0,5 s, de modo que ese punto debería estar justo empezando a oscilar:

$$y(1;\ 0{,}5) = 0{,}03 \text{ sen } (\pi - \pi) = \mathbf{0\ m} \qquad \text{(subiendo)}$$

tal como esperábamos.

SEPTIEMBRE 06

PROBLEMA B1.– Una onda armónica transversal se desplaza en la dirección del eje X en sentido positivo y tiene una amplitud de 2 cm, una longitud de onda de 4 cm y una frecuencia de 8 Hz. Determine:

a) **La velocidad de propagación de la onda.**
b) **La fase inicial, sabiendo que para x = 0 y t = 0 la elongación es y = –2 cm.**
c) **La expresión matemática que representa la onda.**
d) **La distancia mínima de separación entre dos partículas del eje X que oscilan desfasadas π/3 rad.**

a) La velocidad de propagación es $v = \lambda\nu = 4$ cm . 8 Hz = **32 cm/s**

b) La ecuación de propagación, tomando en consideración la existencia de una posible fase inicial, es

$$y(x;t) = 2 \text{ sen } (16\pi t - 0{,}5\pi x + \varphi_0) \qquad \text{x e y en cm, t en s}$$

de modo que, si la elongación para x = 0, al tiempo t = 0, es y = −2 cm, tendría que ser

$$y = -2\text{ cm} = 2 \text{ sen } \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } \varphi_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \boldsymbol{\pi}\ \mathbf{rad}$$

c) Así que la ecuación matemática de propagación de la onda quedaría

$$y(x;t) = \mathbf{2\ sen\ (16\pi t - 0{,}5\pi x + \pi)} \qquad x \text{ e } y \text{ en cm, } t \text{ en s}$$

d) Por último, la distancia entre dos puntos desfasados en π/3 rad. Como sabemos, el desfase entre dos puntos separados una distancia d es

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda}d \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}d \quad \Rightarrow \quad d = \mathbf{0{,}67\ cm}$$

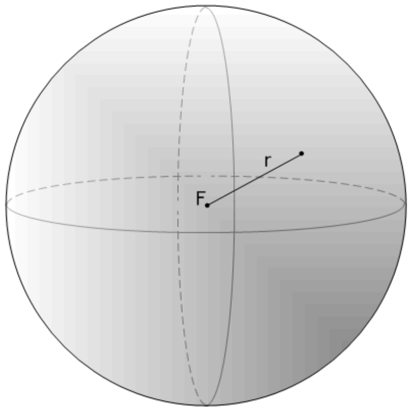
MODELO 07

CUESTIÓN 2.– Una fuente sonora puntual emite con una potencia de 80 W. Calcule:

a) La intensidad sonora en los puntos distantes 10 m de la fuente.

b) ¿A qué distancia de la fuente el nivel de intensidad sonora es de 130 dB?

Dato: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}



a) Una vez más, tenemos un foco emisor puntual F, emitiendo con una potencia de 80 J/s. La energía emitida se propaga con la onda esférica en todas direcciones, formando frentes de onda esféricos como el que puede verse en la figura. La intensidad en todos los puntos de este frente de onda de radio 10 m se obtiene de dividir **la potencia** emisora de la fuente puntual **por la superficie del frente de onda**:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{80}{4\pi . 10^2} = \mathbf{0{,}064\ W / m^2}$$

b) Si el nivel de intensidad sonora es de 130 dB, la intensidad de la onda será

$$\beta = 130 = 10 \log \frac{I'}{I_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{I'}{I_0} = 10^{13} \quad \Rightarrow \quad I' = 10\ W/m^2$$

de modo que la distancia a la fuente habrá sido tal que

$$I' = \frac{P}{4\pi r'^2} = \frac{80}{4\pi r'^2} = 10 \quad \Rightarrow \quad r'^2 = \frac{8}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad r' = \mathbf{0{,}80\ m}$$

Naturalmente, podríamos haber resuelto este apartado recordando que la intensidad decae con el cuadrado de la distancia al foco puntual, es decir,

$$I.r^2 = I'.r'^2 \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{\frac{I}{I'}r^2} = \sqrt{\frac{0{,}064}{10}100} = \sqrt{0{,}64} = \mathbf{0{,}80\ m}$$

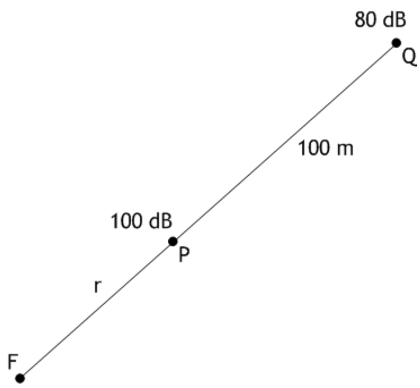
JUNIO 08

PROBLEMA 2.– Se realizan dos mediciones del nivel de intensidad sonora en las proximidades de un foco sonoro puntual, siendo la primera de 100 dB a una distancia x del foco, y la segunda de 80 dB al alejarse en la misma dirección 100 m más.

a) Obtenga las distancias al foco desde donde se efectúan las mediciones.

b) Determine la potencia sonora del foco.

Datos: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2



a) La figura muestra la situación que describe el enunciado: en el punto P, a una distancia r de la fuente F, el nivel de intensidad sonora es 100 dB; en el punto Q, a una distancia de 100 m de P (por tanto, 100+r de la fuente), el nivel de intensidad sonora es 80 dB.

Sea I_P la intensidad de la onda en P, e I_Q la intensidad en Q. Ya que hay un descenso de 20 dB al pasar de P a Q, podemos saber que I_P es 100 veces mayor que I_Q,

$$I_P = 100\ I_Q \qquad (1)$$

porque recordamos que, por cada factor 10 que **divide** a la intensidad, el nivel de intensidad sonora **cae** 10 dB: ya que se pierden 20 dB, la intensidad se ha dividido por 10.10 = 100 veces.

Recordemos, además, que la intensidad de una onda esférica es **inversamente proporcional a la distancia a la fuente**, de manera que podemos escribir

$$I_P r_P^2 = I_Q r_Q^2 \qquad (2)$$

donde $r_P = r$ y $r_Q = r + 100$, como muestra la figura. Llevando esto a (2), y empleando (1) a la vez, tenemos

$$100\ I_Q\ r^2 = I_Q\ (r + 100)^2 \qquad \Rightarrow \qquad 100\ r^2 = (r + 100)^2$$

de donde se obtiene fácilmente

$$r = \mathbf{11{,}11\ m}; \qquad r + 100 = \mathbf{111{,}11\ m}$$

b) Ahora estamos en condiciones de hallar la intensidad en cualquiera de los puntos P o Q. Trabajamos con P, recordando la definición de nivel de intensidad sonora

$$\beta_P = 100\ dB = 10 \log \frac{I_P}{10^{-12}} \qquad \Rightarrow \qquad I_P = 10^{-2}\ W/m^2$$

que sería, como hemos dicho, la intensidad en el punto P, a la distancia r = 11,11 m de la fuente F. Esto implica que la fuente debe emitir con una potencia P tal que

$$I_P = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad \Rightarrow \qquad 10^{-2} = \frac{P}{4\pi . 11{,}11^2} \qquad \Rightarrow \qquad P = 4\pi . 11{,}11^2 . 10^{-2} = \mathbf{15{,}51\ W}$$

JUNIO 96

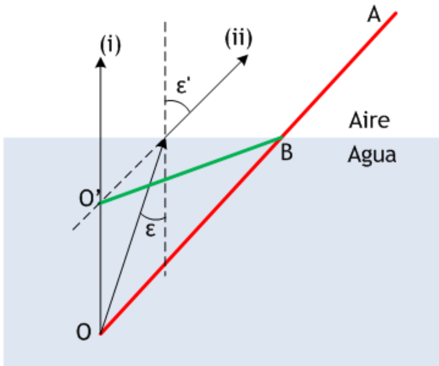
C3.— Explica por qué cuando se observa desde el aire un remo sumergido parcialmente en el agua parece estar doblado. Ayúdate de construcciones geométricas en la explicación.

El remo ABO tiene el trozo BO sumergido en el agua. La imagen del punto O puede construirse empleando dos rayos:

(i) en dirección perpendicular a la superficie; no se desvía al pasar al aire.

(ii) un rayo cualquiera, que incide sobre la superficie formando ángulo ε con la normal en el punto de incidencia. Al refractarse, se alejará de la normal, formando un ángulo ε' > ε.

La imagen de O, entonces, será virtual, ya que los rayos (i) y (ii) divergen después de refractarse, y estará en O'. Por tanto, el remo se verá según ABO', doblado en el tramo sumergido en el agua.



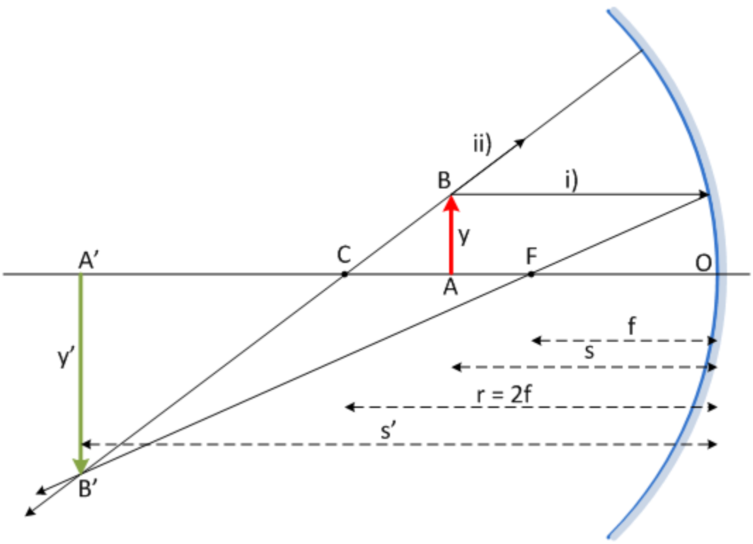
JUNIO 96

A2.— Un espejo esférico, cóncavo, ha de formar una imagen invertida de un objeto en forma de flecha, sobre una pantalla situada a una distancia de 420 cm delante del espejo. El objeto mide 5 mm y la imagen ha de tener una altura de 30 cm. Determinar:

a) A qué distancia del espejo debe colocarse el objeto.

b) El radio de curvatura del espejo.

Efectuar la construcción geométrica de la citada imagen.



Como se sabe, la fórmula para imágenes en un espejo esférico es

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad (1) \qquad \begin{array}{l} s = \text{distancia objeto} \\ s' = \text{distancia imagen} \\ f = \text{distancia focal} \end{array}$$

y la relación de tamaños objeto – imagen es

$$\frac{y}{y'}=-\frac{s}{s'} \qquad (2) \qquad \begin{array}{l} y = \text{altura objeto} \\ y' = \text{altura imagen} \end{array}$$

de manera que, con los datos

$s' = -420$ cm ; $y = 5$ mm ; $y' = -30$ cm (¡y' invertida!) es fácil usar (2) y obtener la distancia del objeto al espejo:

$$\frac{0{,}5}{-30}=\frac{-s}{-420} \quad \Rightarrow \quad s = \mathbf{-7\ cm}$$

y, llevando los datos s y s' a (1), obtener la distancia focal:

$$\frac{1}{-7}+\frac{1}{-420}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f = -6{,}89 \text{ cm}$$

así como el radio de curvatura del espejo:

$$r = 2f = \mathbf{-13{,}77\ cm}$$

SEPTIEMBRE 96

B1.— Un rayo de luz amarilla, emitido por una lámpara de sodio, tiene una longitud de onda en el vacío de 589.10^{-9} m. Determinar:

a) Su frecuencia.

b) Su velocidad de propagación y su longitud de onda en una fibra de cuarzo, cuyo índice de refracción es n = 1,458.

c) El ángulo de incidencia mínimo para el rayo de luz que, propagándose por el interior de la fibra de cuarzo, encuentra la superficie de discontinuidad entre el cuarzo y el aire y experimenta reflexión total.

Datos: Velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \,.\, 10^8$ m s^{-1}

a) En el vacío, la ecuación $c = \lambda\nu$ ($c = 3.10^8$ m/s) es válida para cualquier longitud de onda. En particular, para la luz amarilla que nos ocupa

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{589.10^{-9} \text{ m}} = \mathbf{5{,}09.10^{14}\ Hz}$$

b) En el cuarzo, la frecuencia de la luz amarilla es la misma, pero cambia su velocidad de propagación y, consiguientemente, también su longitud de onda. Ahora será:

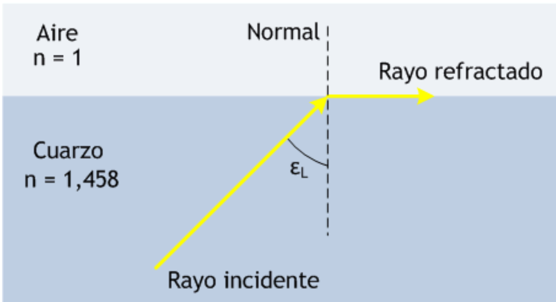
$$v = \lambda\nu$$

donde ν es conocida, del apartado anterior, y v puede obtenerse a partir del índice de refracción de la luz amarilla en el cuarzo:

$$n = \frac{c}{v} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{c}{n} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{1{,}458} = \mathbf{2{,}06.10^8\ m/s}$$

de manera que la longitud de onda habrá cambiado hasta

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \mathbf{404.10^{-9}\ m}$$



c) El ángulo de incidencia, ε_L en la figura, es el ángulo límite para que el rayo refractado forme ángulo de 90º con la normal (si $\varepsilon > \varepsilon_L$, entonces no hay refracción y se produce la reflexión total). Por tanto, de acuerdo a la ley de Snell:

$$n \operatorname{sen}\varepsilon_L = n' \operatorname{sen}\varepsilon' \quad \Rightarrow \quad 1{,}458 \operatorname{sen}\varepsilon_L = 1.\operatorname{sen}90° \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varepsilon_L = \frac{1}{1{,}458}$$

de donde $\varepsilon_L = \mathbf{43°\ 18'\ 15''}$

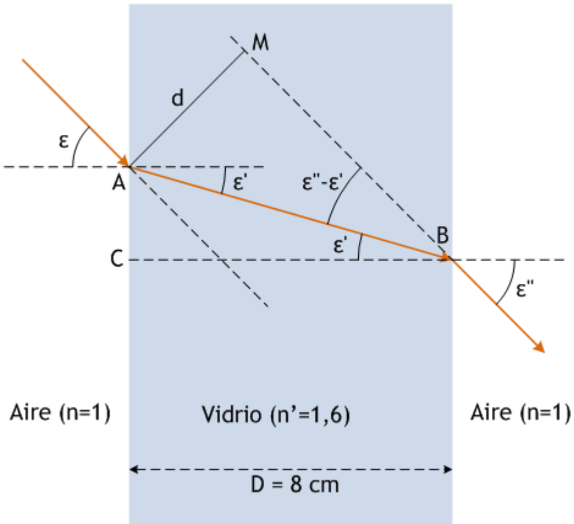
JUNIO 97

A2.— Una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, situada en el aire, tiene un espesor de 8 cm y un índice de refracción n = 1,6. Calcular para un rayo de luz monocromática que incide en la cara superior de la lámina con un ángulo de 45°:

a) Los valores del ángulo de refracción en el interior de la lámina y del ángulo de emergencia correspondientes.

b) El desplazamiento lateral experimentado por el citado rayo al atravesar la lámina.

Dibujar la marcha geométrica del rayo.



a) El ángulo de incidencia de la luz sobre la lámina es

$$\varepsilon = 45°$$

de modo que, aplicando la ley de Snell en la cara izquierda de la lámina, tenemos

$$n \operatorname{sen}\varepsilon = n' \operatorname{sen}\varepsilon' \qquad (1)$$

donde n =1; ε = 45° y n' = 1,6, de forma que

$$\operatorname{sen}\varepsilon' = \frac{n \operatorname{sen}\varepsilon}{n'} = \frac{1.\sqrt{2}/2}{1,6} = 0,442$$

es decir, $\varepsilon' =$ **26° 13' 40"**

Por otro lado, como es bien sabido, el ángulo de emergencia ε" es igual que el de incidencia, lo que puede probarse fácilmente: en efecto, aplicando de nuevo Snell a la refracción en la segunda cara de la lámina,

$$n' \operatorname{sen}\varepsilon' = n \operatorname{sen}\varepsilon" \qquad (2)$$

donde ahora, como puede verse claramente en la figura, el ángulo de incidencia ε' es igual al de refracción en la primera cara de la lámina (¡eso es la clave!). Por ello, comparando (1) y (2)

$$\left.\begin{array}{r} n \operatorname{sen}\varepsilon = n' \operatorname{sen}\varepsilon' \\ n' \operatorname{sen}\varepsilon' = n \operatorname{sen}\varepsilon" \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen}\varepsilon = \operatorname{sen}\varepsilon" \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon" = \mathbf{45°}$$

b) El desplazamiento lateral es d = AM. Obtenerlo es sencillo, trabajando con los triángulos AMB y ACB de la figura. Empezamos en AMB, rectángulo en M, y cuyo ángulo en B es ε" - ε', como es fácil de comprobar. El seno de este ángulo sería

$$\operatorname{sen}(\varepsilon" - \varepsilon') = \frac{d}{AB}$$

donde AB, la hipotenusa del triángulo, es el recorrido del rayo en el interior de la lámina. Por otro lado, en el triángulo ACB, rectángulo en C, podemos escribir

$$\cos\varepsilon' = \frac{CB}{AB}$$

donde el cateto CB es la anchura D de la lámina. Eliminando AB entre estas dos expresiones:

$$\left.\begin{array}{r} AB = \dfrac{d}{\operatorname{sen}(\varepsilon" - \varepsilon')} \\ AB = \dfrac{D}{\cos\varepsilon'} \end{array}\right\} \Rightarrow d = D\,\frac{\operatorname{sen}(\varepsilon" - \varepsilon')}{\cos\varepsilon'}$$

donde solo queda entrar con D = 8 cm; ε" = 45° y ε' = 26°13'40" para tener d = **2,87 cm**

SEPTIEMBRE 97

A1.— Una lente esférica delgada biconvexa, cuyas caras tienen radios iguales a 5 cm y un índice de refracción n = 1,5, forma de un objeto real una imagen también real reducida a la mitad. Determinar:

a) La potencia y la distancia focal de la lente.

b) Las posiciones del objeto y de la imagen.

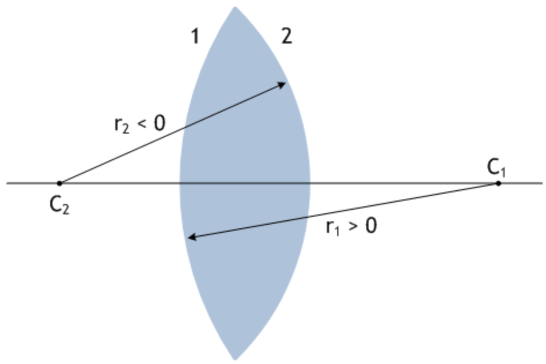
c) Si esta lente se utiliza como lupa, el aumento de la lupa cuando observa un ojo normal sin acomodación.

Datos: Distancia mínima de visión neta para el ojo d = 25 cm. El medio exterior es el aire.

a) Si se trata de una lente biconvexa, convergente, podemos hallar fácilmente su distancia focal a partir de la ecuación del constructor de lentes:

$$P = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

donde P es la potencia de la lente; $n = 1{,}5$; $r_1 = 5$ cm y $r_2 = -5$ cm (ojo al detalle de los signos, que está justificado en la figura adjunta, y cuidado también con las unidades: los radios van en metros). Esto queda como:



$$P = \frac{1}{f'} = (1{,}5-1)\left(\frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{0{,}05}\right) = 0{,}5 . \frac{2}{0{,}05} = \textbf{20 dioptrías}$$

$$f' = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ m} = \textbf{5 cm}$$

b) Si la imagen es real será también, como sabemos, invertida. Ya que su tamaño ha de ser la mitad, podemos emplear

$$\frac{y}{y'} = \frac{s}{s'} \quad \Rightarrow \quad -2 = \frac{s}{s'} \quad \Rightarrow \quad s = -2s'$$

para tener una relación entre las distancias objeto, s, e imagen, s'. Ahora, la ecuación de las lentes

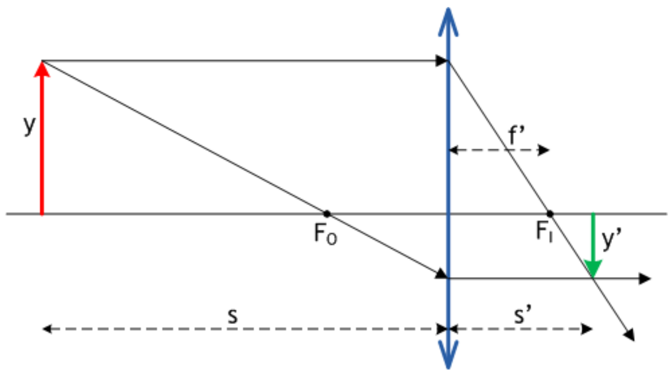
$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{-2s'} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2s'} = \frac{1}{f'}$$

es decir $\qquad s' = \dfrac{3}{2} f' = \mathbf{7{,}5\ cm}$

y la imagen se habrá formado a 7,5 cm a la derecha de la lente. En cuanto al objeto,

$$s = -2s' = \mathbf{-15\ cm}$$

se encuentra a 15 cm a la izquierda. La figura al lado muestra cómo sería la formación de la imagen, empleando rayos procedentes del objeto paralelos al eje y que pasan por el foco objeto.



c) Si la lente se emplea como lupa, habrá que disponer el objeto entre el foco y la lente, a una distancia de la lente menor que 5 cm. Por otro lado, la imagen (que servirá de objeto para el ojo) debería formarse en el "punto próximo", a 25 cm de la lente, y será virtual. El aumento de la imagen, recogido en la siguiente figura, es

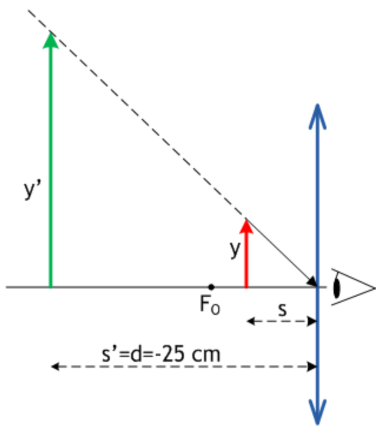
$$A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = 1 - \frac{s'}{f'} = 1 - \frac{d}{f'} = 1 - \frac{-0{,}25}{0{,}05} = 1 + 5 = \mathbf{6}$$

Como se ha dicho, la imagen será virtual; además, derecha y de mayor tamaño. Nótese que basta el rayo que pasa por el centro de la lente para poder dibujar la imagen. Las expresiones

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \qquad ; \qquad \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

combinadas, junto con s' = d (distancia del "punto próximo", de 25 cm), permiten obtener con facilidad

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{s'}{s} = A = \frac{y'}{y} = 1 - \frac{s'}{f'} = 1 - \frac{d}{f'}$$

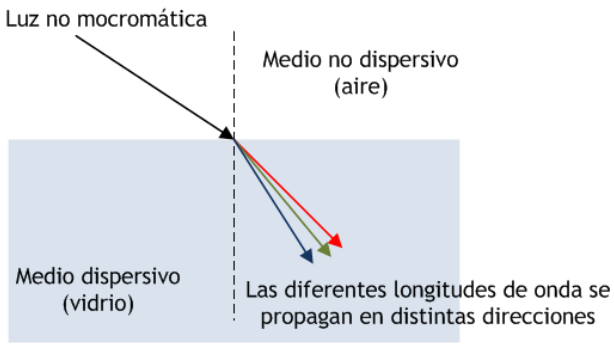


que es la fórmula empleada para resolver el problema: es de este modo que funciona una lupa.

JUNIO 98

C3.—a) Indique las diferencias que a su juicio existen entre los fenómenos de refracción y de dispersión de la luz. ¿Puede un rayo de luz monocromática sufrir ambos fenómenos?

b) ¿Por qué no se observa dispersión cuando la luz blanca atraviesa una lámina de vidrio de caras plano-paralelas?



a) La refracción es el fenómeno de cambio en la dirección de propagación de la luz cuando pasa de un medio a otro. En última instancia, es un fenómeno debido al cambio de velocidad de la luz de un medio a otro.

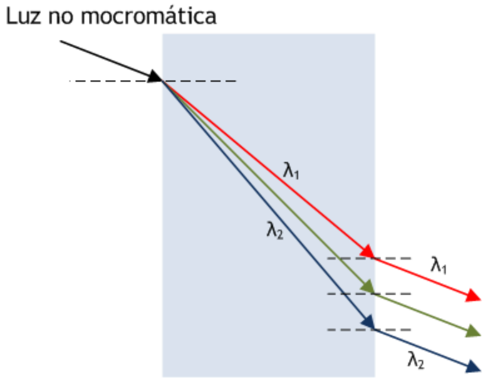
Imaginemos un rayo de luz no monocromática, digamos luz blanca, propagándose en una determinada dirección en el aire, un medio no dispersivo. La luz blanca contiene todas las frecuencias del visible, desde el rojo hasta el violeta. En el aire, como en el vacío, la velocidad de la luz es la misma para todas las frecuencias: eso es lo que quiere decir que es un medio no dispersivo.

Cuando la luz incide con un cierto ángulo sobre una superficie de separación con un medio dispersivo, como el vidrio o el agua, la dirección de propagación se desvía: eso es **refracción**. Pero, además, sucede que la luz de una cierta frecuencia, digamos de color rojo, se mueve en el vidrio con diferente velocidad que la luz de otra frecuencia, digamos de color azul. Ya que el ángulo de refracción depende del índice de refracción de ambos medios, de acuerdo a la ley de Snell,

$$n \text{ sen } i = n' \text{ sen } r$$

y el índice de refracción resulta diferente para la luz de diferentes frecuencias, puede ocurrir que un rayo de luz **no monocromática**, al pasar a un medio dispersivo difracte cada frecuencia según un ángulo ε' diferente, lo que daría base a la **dispersión** del rayo incidente.

Obviamente, el fenómeno de dispersión no podría suceder si la luz incidente es monocromática: se requiere la presencia de diferentes longitudes de onda.



b) Como se sabe, cuando la luz atraviesa una lámina de caras plano-paralelas el rayo emergente es paralelo al incidente (aunque sufre un desplazamiento). Por tanto, todas las λ presentes en el rayo incidente atravesarían la lámina y emergerían según rayos paralelos al incidente, como se muestra en la figura para un supuesto de dos longitudes de onda λ_1 y λ_2 diferentes. No habría pues, dispersión, ya que las direcciones de los rayos emergentes no son distintas, aunque sí se podría observar un desplazamiento distinto para λ_1 y λ_2.

JUNIO 98

A2.— Un objeto luminoso de 2 mm de altura está situado a 4 m de distancia de una pantalla. Entre el objeto y la pantalla se coloca una lente esférica delgada L, de distancia focal desconocida, que produce sobre la pantalla una imagen tres veces mayor que el objeto.

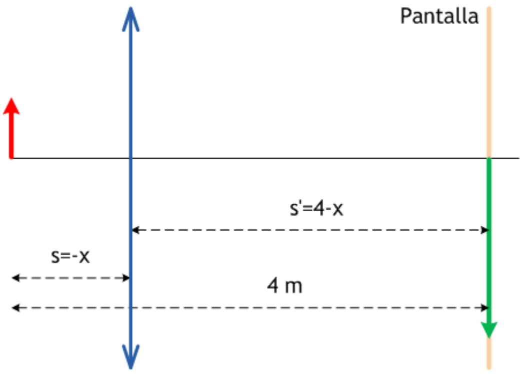
a) Determine la naturaleza de la lente L, así como su posición respecto del objeto y de la pantalla.

b) Calcule la distancia focal, la potencia de la lente L y efectúe la construcción geométrica de la imagen.

a) Tiene que ser una lente convergente, capaz de formar una imagen real sobre una pantalla. Sabemos que una lente de este tipo forma imágenes **reales e invertidas** (salvo cuando actúa como una lupa), de modo que los datos del enunciado pueden leerse como

$y = 2$ mm; $y' = -6$ mm (tres veces mayor que el objeto, invertida)

Por otro lado, la distancia entre objeto y pantalla, es decir, la imagen, es de 4 m; la lente se coloca en algún punto intermedio. Podemos dividir esa distancia de 4 m en dos trozos: x m de la lente al objeto, y 4–x m de la lente a la pantalla. Nótese que la distancia objeto s debe tener signo negativo, de modo que $s = -x$ (x es una cantidad positiva), mientras que $s' = 4-x$ (s' es positiva). Solo hay que usar las conocidas expresiones



$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \qquad (1)$$

$$\frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \qquad (2)$$

la primera de las cuales quedaría como $-\frac{1}{-x}+\frac{1}{4-x}=\frac{1}{f'}$

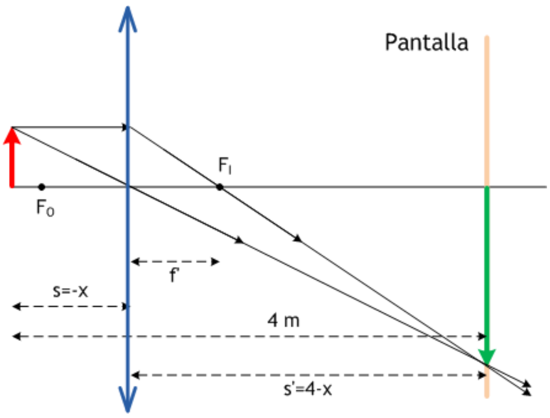
y la segunda nos daría el valor de *x* de forma inmediata:

$$\frac{2}{-6}=\frac{-x}{4-x} \quad \Rightarrow \quad 6x = 8-2x \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = \mathbf{1\ m} & \textbf{(al objeto)} \\ 4-x = \mathbf{3\ m} & \textbf{(a la pantalla)} \end{matrix}$$

y después, volviendo a (1) con esos valores, tendríamos la distancia focal de la lente:

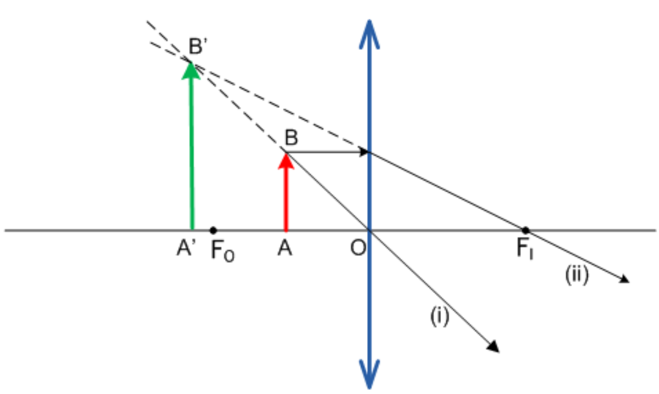
$$-\frac{1}{-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{f'} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{f' = \frac{3}{4}\ m}$$

Finalmente, podemos construir la imagen, empleando dos rayos: uno discurre paralelo al eje y se refracta para pasar por el foco imagen, F_I; el otro se dirige hacia el centro de la lente y no se desvía.



SEPTIEMBRE 98

C3.— ¿En qué posición debe colocarse un objeto delante de una lente esférica convergente para producir una imagen virtual? Obtenga gráficamente la imagen.



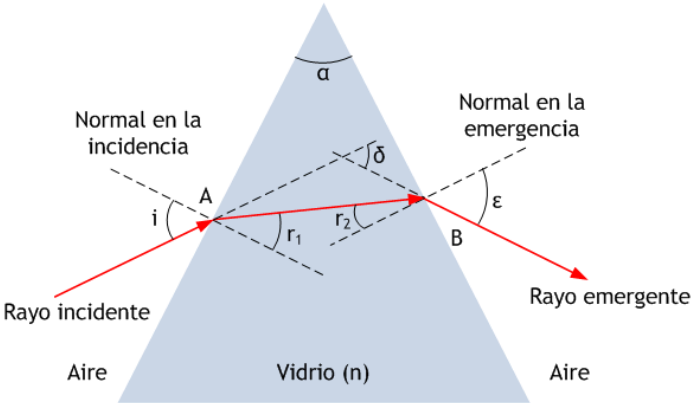
El objeto debe colocarse dentro de la distancia focal objeto de la lente, entre el foco objeto F_O y el centro O de la misma. El rayo (i) que pasa por el centro de la lente no sufre desviación al atravesarla; el rayo (ii), que incide paralelamente al eje de la lente, se refracta para pasar por el foco imagen, F_I. Como puede verse, se trata de rayos divergentes, cuyas prolongaciones determinan la posición B' de la imagen del punto B, extremo del objeto. La imagen de AB resulta A'B', **virtual, derecha y de mayor tamaño.**

SEPTIEMBRE 98

A1.— El ángulo de desviación mínima en un prisma óptico es de 30º. Si el ángulo del prisma es de 50º y éste está situado en el aire, determine:

a) **El ángulo de incidencia para que se produzca la desviación mínima del rayo.**

b) **El índice de refracción del prisma.**



Las relaciones matemáticas pertinentes, cuando un rayo incide en una cara del prisma, se refracta en ella e incide en su interior sobre la otra cara, para emerger finalmente fuera del prisma, serían

1\. sen i = n. sen r_1 (1) Snell, incidencia

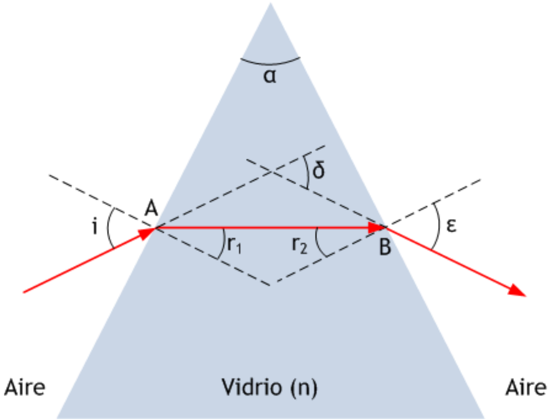
n. sen r_2 = 1. sen ε (2) Snell, emergencia

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = r_1 + r_2 & (3) \\ \text{Ángulo de desviación} \quad \delta = i + \varepsilon - \alpha & (4) \end{array}\right\}$$

por consideraciones geométricas.

Pues bien, el ángulo de desviación δ mínimo se consigue cuando el rayo se mueve dentro del prisma según una trayectoria paralela a la base del prisma, como se recoge en la figura que tenemos abajo. Es fácil entender que la simetría dentro del prisma requiere que $r_1 = r_2$, de forma que, según (3) y puesto que α = 50º, sería

$$50º = r_1 + r_2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 25º$$



y, de (1) y (2), si $r_1 = r_2$, se sigue que

$$1.\text{sen } i = 1.\text{sen } \varepsilon \quad \Rightarrow \quad i = \varepsilon$$

es decir, el rayo emerge con un ángulo igual al de incidencia. Así, si se emplea (4),

$$30º = i + \varepsilon - 50º \quad \Rightarrow \quad i = \varepsilon = \mathbf{40º}$$

y, de (1), finalmente

$$1.\text{sen}\,40º = n.\text{sen}\,25º \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\text{sen}\,40º}{\text{sen}\,25º} = \mathbf{1,52}$$

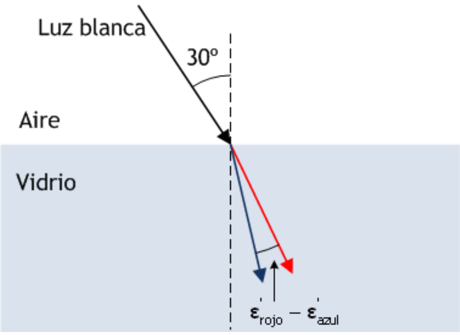
JUNIO 99

A2.— Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30º.

a) ¿Qué ángulo formarán entre sí en el interior del vidrio los rayos rojo y azul, componentes de la luz blanca, si los valores de los índices de refracción del vidrio para estos colores son, respectivamente, n_{rojo}= 1,612 y n_{azul}= 1,671?

b) ¿Cuáles serán los valores de la frecuencia y de la longitud de onda correspondientes a cada una de estas radiaciones en el vidrio, si las longitudes de onda en el vacío son, respectivamente, λ_{rojo}= 656,3 nm y λ_{azul}= 486,1 nm?

Datos: Velocidad de la luz en el vacío c = 3 . 10^8 m s^{-1}



a) La ley de Snell para la refracción se aplica, tomando en cuenta que el medio inicial es el aire, según

$$1.\text{sen}\,\varepsilon = n.\text{sen}\,\varepsilon' \qquad (1)$$

donde n es diferente para la luz roja y azul, de modo que también lo será ε'. Los valores de índice de refracción n_{rojo} = 1,612 y n_{azul} = 1,671, llevados a (1), nos dan

$$1\,.\,\text{sen}\,30^\circ = n_{rojo}\,\text{sen}\,\varepsilon'_{rojo} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\varepsilon'_{rojo} = \frac{\text{sen}\,30^\circ}{n_{rojo}} = \frac{0,5}{1,612} = 0,31$$

$$\varepsilon'_{rojo} = 18^\circ 4' 11''$$

para el ángulo de refracción de la luz roja, mientras que para el azul es

$$1\,.\,\text{sen}\,30^\circ = n_{azul}\,\text{sen}\,\varepsilon'_{azul} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\varepsilon'_{azul} = \frac{\text{sen}\,30^\circ}{n_{azul}} = \frac{0,5}{1,671} = 0,299$$

$$\varepsilon'_{azul} = 17^\circ 24' 39''$$

así que el ángulo que forman entre sí los rayos rojo y azul, en el vidrio — véase la figura — es

$$\varepsilon'_{rojo} - \varepsilon'_{azul} = \mathbf{39'32''}$$

algo más de medio grado.

b) Con las longitudes de onda en el vacío podemos calcular las frecuencias de la luz roja y azul. En efecto, en el vacío tenemos c = λν, con c = 3.10^8 m/s, de modo que

$$\nu_{rojo} = \frac{c}{\lambda_{rojo}} = \frac{3.10^8\ m/s}{656,3.10^{-9}\ m} = 4,57.10^{14}\ Hz$$

$$\nu_{azul} = \frac{c}{\lambda_{azul}} = \frac{3.10^8\ m/s}{486,1.10^{-9}\ m} = 6,17.10^{14}\ Hz$$

Cuando la luz cambia de medio, penetrando en el vidrio, las frecuencias de la luz roja o azul no varían, manteniendo los valores que acabamos de obtener. Sí cambian, sin embargo, las longitudes de onda, de acuerdo a

$$v_{rojo} = \nu_{rojo}\,\lambda_{rojo} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{rojo} = \frac{v_{rojo}}{\nu_{rojo}} = \frac{c/n_{rojo}}{\nu_{rojo}} = \frac{c}{n_{rojo}\,\nu_{rojo}}$$

es decir, $$\lambda_{rojo} = \frac{3.10^8\ m/s}{1,612.4,57.10^{14}\ Hz} = \mathbf{407,2\ nm}$$

y, de modo análogo, $$\lambda_{azul} = \frac{3.10^8\ m/s}{1,671.6,17.10^{14}\ Hz} = \mathbf{291,0\ nm}$$

SEPTIEMBRE 99

C3.— Calcule a qué distancia debe colocarse un objeto a la izquierda del vértice de un espejo cóncavo cuyo radio de curvatura es de 12 cm para que su imagen sea tres veces mayor que el objeto. Interprete los posibles resultados y efectúe las construcciones geométricas correspondientes.

Como se sabe, las expresiones que controlan la formación de imágenes en espejos esféricos son

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad (1)$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s}{s'} \qquad (2)$$

s ≡ distancia objeto; s' = distancia imagen; y = tamaño objeto; y' = tamaño imagen; f = distancia focal = r/2 = –6 cm

De acuerdo con (2), si la imagen ha de ser 3 veces mayor que el objeto, entonces ha de suceder una de dos cosas:

a) $\frac{y}{y'}=\frac{1}{3}=-\frac{s}{s'}$ (imagen tres veces mayor y derecha) ; b) $\frac{y}{y'}=-\frac{1}{3}=\frac{s}{s'}$ (imagen tres veces mayor e invertida)

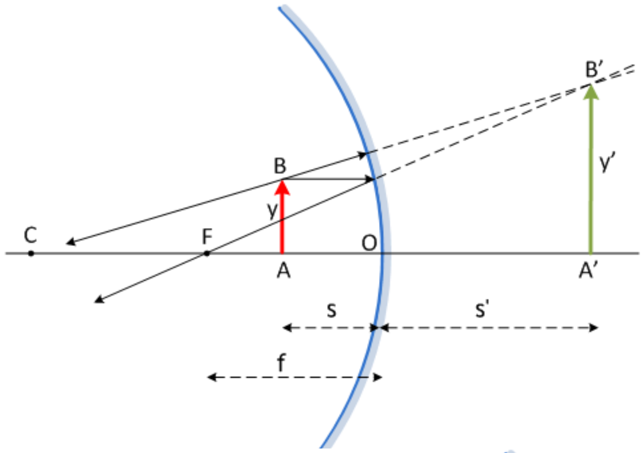
En el supuesto a), tendríamos

$$s'=-3s$$

y, como s es negativo, eso supone que s' será positivo, de modo que la imagen se forma a la derecha, detrás del espejo. Llevando esta igualdad a (1), con f = - 6 cm, tendremos

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{-3s}=\frac{1}{-6} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}s=-\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad s=-\frac{1}{4}\ \text{cm}$$

y $$s'=-3s=\mathbf{\frac{3}{4}\ cm}$$



Se trataría, como se recoge en la figura, de una imagen **virtual**, **derecha** y **tres veces mayor** que el objeto. Nótese que el objeto está colocado dentro de la distancia focal.

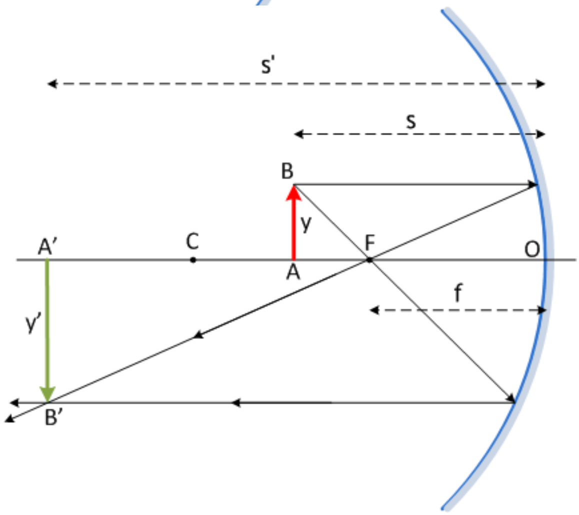
En el caso b), sería

$$s'=3s$$

que, llevado a (1), produce

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{3s}=-\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{3s}=-\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad s=-8\ \text{cm}$$

y $$s'=3s=\mathbf{-24\ cm}$$



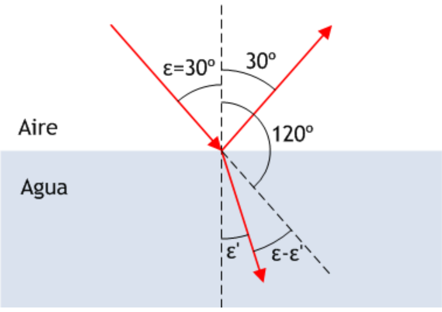
Esta vez, como intentamos mostrar en la figura, la imagen es **real**, **invertida** y **tres veces mayor** que el objeto. Nótese que el objeto está entre el foco y el centro de curvatura del espejo.

JUNIO 00

C4.— a) Un rayo luminoso que se propaga en el aire incide sobre el agua de un estanque con un ángulo de 30°. ¿Qué ángulo forman entre sí los rayos reflejado y refractado?

b) Si el rayo luminoso se propagase desde el agua hacia el aire, ¿a partir de qué valor del ángulo de incidencia se presentará el fenómeno de reflexión total?

Dato: índice de refracción del agua = 4/3



a) La ley de Snell aplicada al caso sería

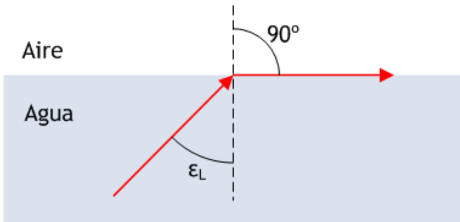
$$1.\operatorname{sen}30° = \frac{4}{3}\operatorname{sen}\varepsilon'$$

de modo que $\operatorname{sen}\varepsilon' = \frac{3}{4}\operatorname{sen}30° = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon' = 22°1'28''$

sería el ángulo de refracción.

El rayo reflejado, como sabemos, lo hará con un ángulo de 30°, igual al de incidencia. De este modo, el ángulo entre los rayos reflejado y refractado podría conseguirse — véase la figura — sumando

$$120° + \varepsilon - \varepsilon' = 120° + 30° - 22°1'28'' = \mathbf{127°58'32''}$$



b) Cuando el rayo procede del agua y se propaga hacia el aire puede suceder la reflexión total. El ángulo de incidencia a partir del que sucederá la reflexión total es el ángulo límite, cuando el rayo refractado sigue la dirección de la superficie de separación entre los medios (es decir, ε' = 90°). Sería, por tanto

$$n.\operatorname{sen}\varepsilon_L = 1.\operatorname{sen}\varepsilon' = 1.1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\operatorname{sen}\varepsilon_L = 1$$

es decir, $\operatorname{sen}\varepsilon_L = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_L = \mathbf{48°35'25''}$

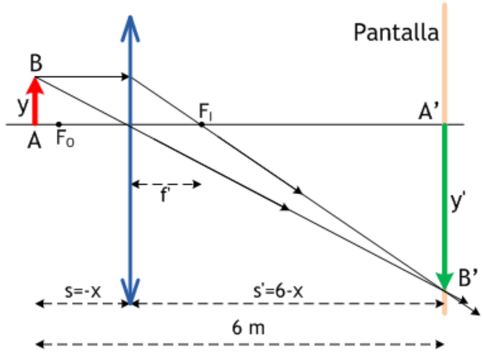
JUNIO 00

B1.— Un objeto luminoso está situado a 6 m de una pantalla. Una lente, cuya distancia focal es desconocida, forma sobre la pantalla una imagen real, invertida y cuatro veces mayor que el objeto.

a) ¿Cuál es la naturaleza y la posición de la lente? ¿Cuál es el valor de la distancia focal de la lente?

b) Se desplaza la lente de manera que se obtenga sobre la misma pantalla una imagen nítida, pero de tamaño diferente al obtenido anteriormente. ¿Cuál es la nueva posición de la lente y el nuevo valor de aumento?

Ya que la imagen del objeto se forma sobre una pantalla, debe ser real. La lente, por tanto, ha de ser **convergente**, y la imagen estará invertida, como sabemos. La situación, sin entrar en detalles, debería ser como recoge la figura, en la que la distancia entre objeto y pantalla (imagen) es 6 m, que se dividen en dos tramos x y 6 − x, a la izquierda y derecha de la lente, respectivamente. Nótese que x es una cantidad positiva, y que 6 − x lo es también: de ahí que escribamos



$$s = -x \quad ; \quad s' = 6 - x$$

como distancias objeto e imagen. Además, la relación de tamaños sería

$$\frac{y}{y'} = \frac{s}{s'} = -\frac{1}{4} \quad \text{(imagen invertida y cuatro veces mayor)}$$

de forma que s' = - 4s; es decir

$$6 - x = -4(-x) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \frac{6}{5} = 1,2\ \text{m} \\ 6 - x = 4,8\ \text{m} \end{array}$$

así que la lente **estaría a 1,2 m del objeto y a 4,8 m de la pantalla**. La distancia focal de la lente es inmediata, según la ecuación de las lentes

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{-1,2} + \frac{1}{4,8} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{4,8}{5} = \mathbf{0,96\ m}$$

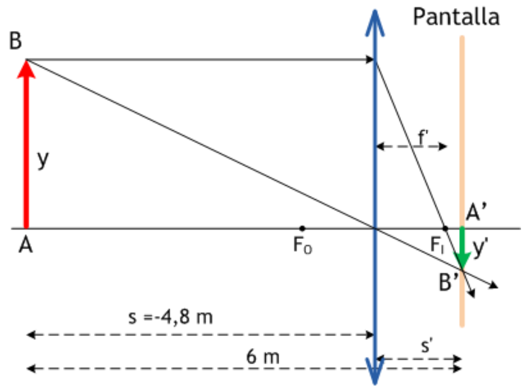
b) Si ahora se mueve la lente (lo que significa que la distancia objeto − imagen sigue siendo de 6 m), lo que variará será el valor de x. Se formará otra imagen cuando se cumpla de nuevo la ecuación de las lentes

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{-x} + \frac{1}{6 - x} = \frac{1}{0,96}$$

de donde se sigue una ecuación de 2º grado:

$$x^2 - 6x - 5,76 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 4,8\ \text{m} \\ x = 1,2\ \text{m} \end{array}$$

La segunda de estas soluciones es la posición anterior. La primera solución, con **la lente a 4,8 m del objeto** y a 1,2 m de la pantalla, es la que buscamos. Se trata de la conjugada de la primera, ya que la marcha de los rayos es en realidad la inversa que en el primer caso. Naturalmente, la imagen sería ahora 4 veces menor que el objeto.

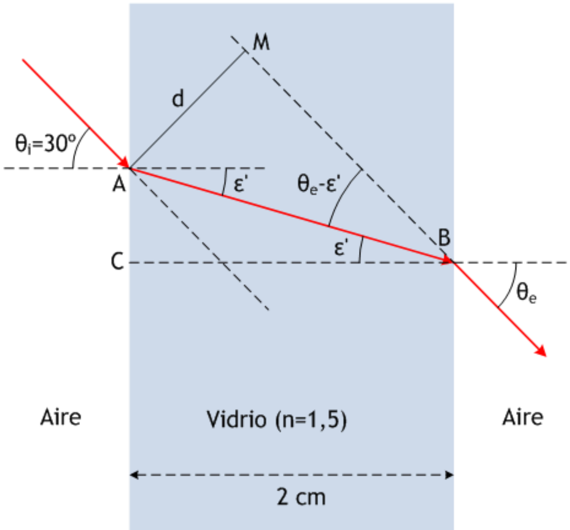


SEPTIEMBRE 00

C4.— Sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, de espesor 2 cm e índice de refracción n = 3/2, situada en el aire, incide un rayo de luz monocromática con un ángulo θ_i = 30º.

a) Compruebe que el ángulo de emergencia es el mismo que el ángulo de incidencia.

b) Determine la distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina y el desplazamiento lateral del rayo emergente.



a) La figura recoge la marcha del rayo dentro de la lámina de caras planas, y debe ser estudiada con atención antes de leer las ecuaciones que siguen. Aplicando la ley de Snell a la refracción en la primera cara de la lámina tenemos

$$1.\text{sen}\,\theta_i = n.\text{sen}\,\varepsilon' \qquad (1)$$

y, en la segunda cara de la lámina, después del recorrido AB dentro de la misma, la ley de Snell se escribe

$$n.\text{sen}\,\varepsilon' = 1.\text{sen}\,\theta_e \qquad (2)$$

puesto que, por evidente observación de la figura, el ángulo de refracción en la primera cara y el de incidencia en la segunda son iguales. De (1) y (2) es obvio que

$$1.\text{sen}\,\theta_i = 1.\text{sen}\,\theta_e \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta_i = \theta_e}$$

b) Ahora, véase el triángulo ABC, rectángulo en C. En este triángulo

$$\cos\varepsilon' = \frac{CB}{AB} \qquad (3)$$

donde CB = anchura de la lámina = 2 cm; y ε' puede obtenerse de (1), conocidos el ángulo de incidencia θ_i = 30º y el índice de refracción n = 3/2 del vidrio:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{3}{2}\,\text{sen}\,\varepsilon' \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\varepsilon' = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon' = 19^\circ 28' 17''$$

de modo que, de (3), sería

$$AB = \frac{CB}{\cos\varepsilon'} = \frac{2\text{ cm}}{\cos 19^\circ 28' 17''} = \mathbf{2{,}12\ cm}$$

Por otro lado, el triángulo AMB es rectángulo en M. Es fácil comprender que el ángulo en B es

$$\theta_e - \varepsilon' = 30^\circ - 19^\circ 28' 17'' = 10^\circ 31' 44''$$

y, en ese triángulo

$$\text{sen}(\theta_e - \varepsilon') = \frac{d}{AB} \quad \Rightarrow \quad d = AB\,\text{sen}(\theta_e - \varepsilon') = 2{,}12.\text{sen}\,10^\circ 31' 44'' = \mathbf{0{,}39\ cm}$$

que es el desplazamiento del rayo al atravesar la lámina.

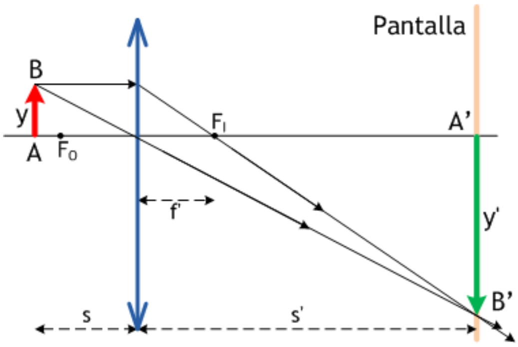
SEPTIEMBRE 00

B2.— Una lente convergente con radios de curvatura de sus caras iguales, y que suponemos delgada, tiene una distancia focal de 50 cm. Proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto de tamaño 5 cm.

a) Calcule la distancia de la pantalla a la lente para que la imagen sea de tamaño 40 cm.

b) Si el índice de refracción de la lente es igual a 1,5 ¿qué valor tienen los radios de la lente y cuál es la potencia de la misma?

a) La ecuación de las lentes resuelve ejercicios sencillos sin necesidad de realizar el trazado de los rayos, aunque sin duda los dibujos ayudan a entender los resultados y frecuentemente también a llegar a ellos; la figura al lado muestra la resolución gráfica del problema.



Si la imagen se proyecta sobre una pantalla, será **real**. También, de acuerdo con la teoría, será **invertida**, de suerte que la relación de tamaños objeto–imagen se escribiría como

$$\frac{y}{y'} = \frac{5\text{ cm}}{-40\text{ cm}} = \frac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad s' = -8s$$

y la ecuación de las lentes $\quad -\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \qquad (f' = +50\text{ cm})$

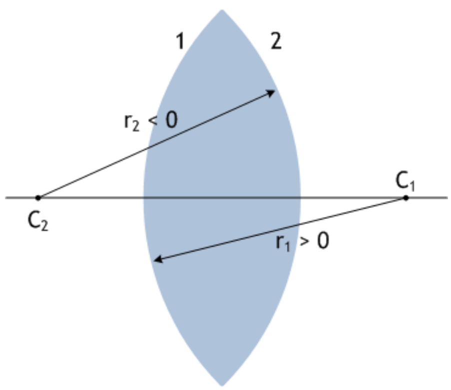
resuelve la cuestión $\quad -\frac{1}{s} + \frac{1}{-8s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{9}{8s} = \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{450}{8} = -56,25\text{ cm}$

$$s' = -8s = 450\text{ cm} = \mathbf{4,5\ m}$$

e informa de que la pantalla debería estar a 4,5 m de la lente, a la derecha de la misma.

b) La ecuación del constructor de lentes resuelve esta pregunta:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



donde $r_1 > 0$; $r_2 < 0$ y $|r_1| = |r_2|$ (los radios de las caras de la lente son iguales, pero de signos opuestos), de forma que

$$\frac{1}{0,5} = (1,5-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right) = 0,5\ .\ \frac{2}{r_1} \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = 0,5\ .\ 0,5\ .\ 2 = \mathbf{0,5\ m}$$

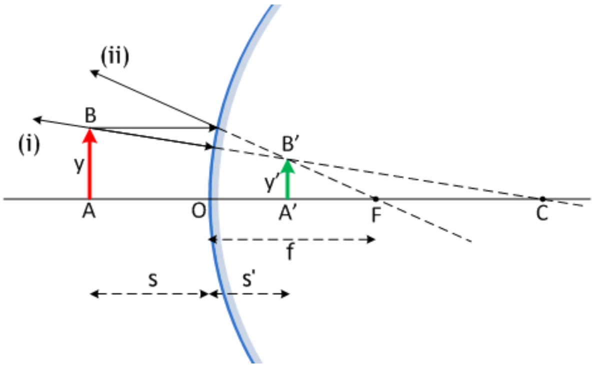
y la potencia de la lente $\quad P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,5} = \mathbf{+\,2\ dioptrías}$

donde deben tenerse muy presente las unidades de f', en metros.

C3.— ¿Qué tipo de imagen se obtiene con un espejo esférico convexo? ¿y con una lente esférica divergente? Efectúe las construcciones geométricas adecuadas para justificar las respuestas. El objeto se supone real en ambos casos.

En la figura recogemos la formación de la imagen en un espejo esférico convexo. Como puede verse, empleamos esencialmente dos rayos:

(i), que sale de B en dirección al centro de curvatura del espejo y se refleja sin desviarse. Su prolongación pasa por C.
(ii), que sale de B en dirección paralela al eje del espejo y se refleja de modo que su proyección pasa por el foco F.



La imagen del punto B es B', donde se cortan las prolongaciones de los rayos (i) y (ii). La imagen del objeto AB es **siempre virtual, derecha y de menor tamaño**. Además, como puede apreciarse

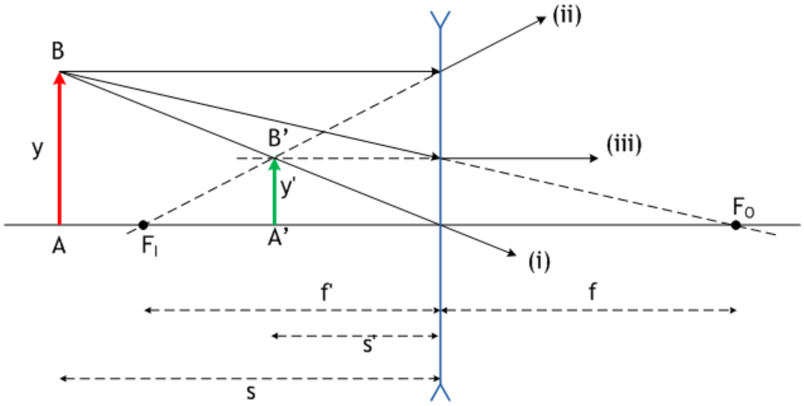
$$s < 0; \quad s' > 0; \quad f > 0; \quad r > 0; \quad \frac{y}{y'} > 0$$

En cuanto a una lente divergente, la situación se resuelve en la figura. Para ello, empleamos tres rayos:

(i), que sale de B y pasa por el centro de la lente, O. No se desvía.

(ii), que sale de B y discurre paralelo al eje de la lente; se desvía para que su prolongación pase por el foco imagen, F_I, situado a la izquierda de la lente (f' < 0).

(iii), que sale de B y apunta en dirección al foco objeto F_O, situado a la derecha de la lente (f=−f' > 0). Al pasar por la lente, se desvía para orientarse paralelamente al eje de la lente.



Como puede verse, a la salida de la lente los tres rayos (i), (ii) y (iii) divergen, de forma que la imagen se construye con sus prolongaciones: B' es la imagen de B. Así, la imagen del objeto AB es A'B', **virtual, derecha y de menor tamaño**. Si el objeto se aleja de la lente, la imagen se hace cada vez más pequeña. En la figura puede comprobarse que

$$s < 0; \quad s' < 0; \quad f' < 0; \quad f = -f' \ \ (f > 0); \quad \frac{y}{y'} > 0$$

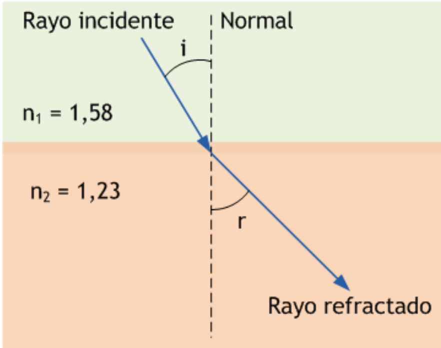
JUNIO 01

C4.— Un rayo de luz monocromática que se propaga en un medio de índice de refracción 1,58 penetra en otro medio de índice de refracción 1,23 formando un ángulo de incidencia de 15° (respecto a la normal) en la superficie de discontinuidad entre ambos medios.

a) Calcule el valor del ángulo de refracción correspondiente al ángulo de incidencia anterior. Haga un dibujo esquemático.

b) Defina ángulo límite y calcule su valor para este par de medios.

Un sencillo caso de refracción desde un medio más a otro menos refringente: siempre que estamos en este supuesto, pasando de medio con índice n_1 a medio con índice n_2 más pequeño, el rayo refractado se **aleja de la normal**, tal como muestra la figura. Esto permite que se pueda plantear la posibilidad de llegar a una incidencia con ángulo límite i_L, más allá del cual no exista refracción y, por consiguiente, el rayo no llegue a penetrar en el medio 2, produciéndose **reflexión total**.



a) Una simple aplicación de la ley de Snell:

$$n_1.\text{sen } I = n_2.\text{sen } r \quad \Rightarrow \quad 1{,}58.\text{sen } 15° = 1{,}23.\text{sen } r$$

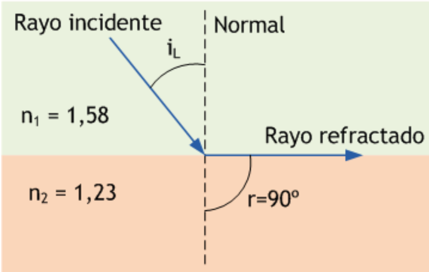
$$\text{sen } r = \frac{1,58}{1,23}\ .\ \text{sen } 15° = 0,3324 \quad \Rightarrow \quad r = \mathbf{19{,}42° = 0{,}34\ rad}$$

b) El ángulo límite i_L es el ángulo de **incidencia** que provoca un rayo refractado con ángulo de 90º. Si el ángulo de incidencia es mayor que i_L **no hay refracción** y se tiene **reflexión total**, como se ha dicho más arriba. La figura muestra cómo sería la situación para el ángulo límite. La ley de Snell aplicada al caso daría

$$n_1.\text{sen } I = n_2.\text{sen } r \quad \Rightarrow \quad 1{,}58.\text{sen } i_L = 1{,}23.\text{sen } 90°$$

de manera que el ángulo límite valdrá

$$\text{sen } i_L = \frac{1,23}{1,58}\ \text{sen} 90° = \frac{1,23}{1,58} = 0{,}7785 \quad \Rightarrow \quad i_L = \mathbf{51{,}12° = 0{,}89\ rad}$$



JUNIO 01

B1.— Un objeto luminoso de 3 cm de altura está situado a 20 cm de una lente divergente de potencia -10 dioptrías. Determine:

a) La distancia focal de la lente.

b) La posición de la imagen.

c) La naturaleza y el tamaño de la imagen.

d) La construcción geométrica de la imagen.

a) La distancia focal de la lente es inmediata, pues $P = -10 \text{ dioptrías} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = -\frac{1}{10} = -0{,}1\text{ m} = \mathbf{-10\ cm}$

b) La posición de la imagen se obtiene de la ecuación de las lentes, $-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$ $\quad (f' = -10 \text{ cm})$

de modo que, con s = −20 cm y f' = −10 cm, se tiene $-\frac{1}{-20} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{-10} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = -\frac{3}{20} \quad \Rightarrow \quad s' = \mathbf{-\frac{20}{3}\ cm}$

c) Una lente divergente produce imágenes virtuales. En cuanto al tamaño, podemos deducirlo con facilidad:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{3\text{ cm}} = \frac{-\frac{20}{3}\text{ cm}}{-20\text{ cm}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y' = \mathbf{1\ cm}$$

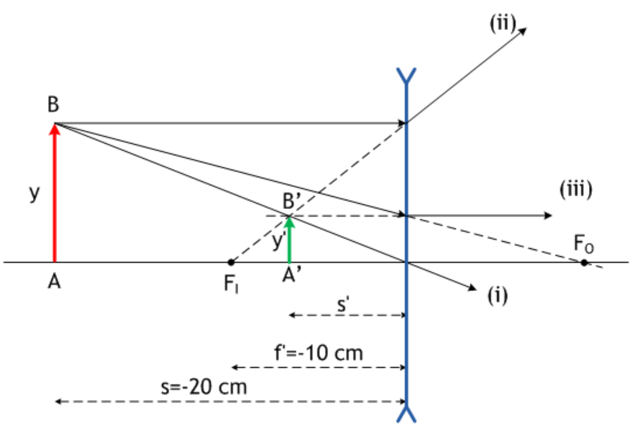
d) Los rayos empleados para conseguir la imagen son:

(i) rayo que pasa por el centro de la lente; no se desvía;

(ii) rayo paralelo al eje; se difracta de modo que su prolongación pasa por el foco imagen F_I;

(iii) rayo que pasa por el foco objeto F_O; se difracta horizontalmente al atravesar la lente.

Los tres rayos divergen tras atravesar la lente: la imagen debe construirse con sus prolongaciones, y resulta **virtual**, **derecha** y de **menor tamaño**, coincidiendo con lo esperado. Además, aparece dentro de la distancia focal de la lente, de acuerdo con los resultados numéricos de los apartados anteriores.



Septiembre 01

C4.— a) Defina para una lente delgada los siguientes conceptos: foco objeto, foco imagen, distancia focal objeto y distancia focal imagen.

b) Dibuje para los casos de lente convergente y lente divergente la marcha de un rayo que pasa (él o su prolongación) por b1) el foco objeto; b2) el foco imagen.

Véase la teoría.

Septiembre 01

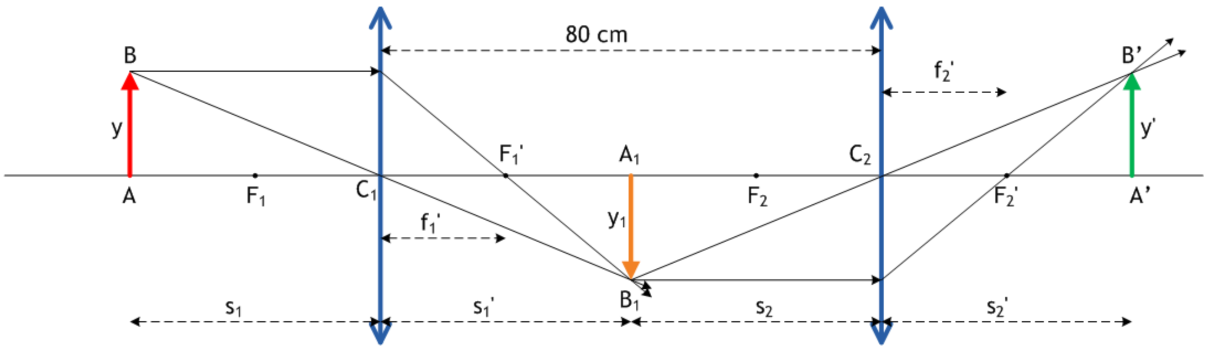
B1.— Sea un sistema óptico formado por dos lentes delgadas convergentes de la misma distancia focal (f’ = 20 cm), situadas con el eje óptico común a una distancia entre sí de 80 cm. Un objeto luminoso lineal perpendicular al eje óptico, de tamaño y = 2 cm, está situado a la izquierda de la primera lente y dista de ella 40 cm.

a) Determine la posición de la imagen final que forma el sistema óptico y efectúe su construcción geométrica.

b) ¿Cuál es la naturaleza y el tamaño de esta imagen?

El sistema se resuelve buscando la imagen del objeto en la primera lente, que servirá después como objeto en la segunda lente, obteniéndose finalmente la imagen en esta segunda lente. Nótese, además, que el objeto está colocado inicialmente a una distancia de la lente igual al doble de su distancia focal objeto; es decir, $s_1 = -40$ cm y $f_1 = -20$ cm. Sabemos que, en tales circunstancias, la imagen en la primera lente será real, invertida y del mismo tamaño que el objeto: todo ello aparece reflejado en la construcción geométrica que se nos pide. Además, sabemos también que la imagen se formará a la misma distancia que el objeto, $s_1' = 40$ cm.

Esta imagen obtenida en la primera lente sirve como objeto para la segunda lente. Nótese que ahora la distancia objeto es de nuevo $s_2 = -40$ cm, otra vez doble que la distancia focal de la segunda lente. Por tanto, la imagen vuelve a invertirse, quedando finalmente derecha, y acaba teniendo el mismo tamaño que el objeto inicial; naturalmente, es una imagen real. Todo ello puede resolverse de manera gráfica, tal como puede verse en la siguiente construcción:



que emplea rayos paralelos al eje del sistema, que se refractan para pasar por los respectivos focos imagen de una y otra lente, y rayos dirigidos a los centros C_1 y C_2 de las lentes, que no se desvían al atravesarlas.

Como acabamos de ver, se puede resolver el ejercicio de forma estrictamente gráfica, ya que las condiciones son singularmente simétricas. No obstante, en general resulta necesario acudir a las ecuaciones de las lentes:

En la primera lente: $$-\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1'} \Rightarrow -\frac{1}{-40}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{s_1'}=\frac{1}{20}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40} \Rightarrow s_1'=40\text{ cm}$$

$$\frac{y_1}{y}=\frac{s_1'}{s_1} \Rightarrow \frac{y_1}{2}=\frac{-40}{40} \Rightarrow y_1=-2\text{ cm}$$

En la segunda lente: $$-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2'} \Rightarrow -\frac{1}{-40}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{s_2'}=\frac{1}{20}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40} \Rightarrow s_2'=40\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{y_1}=\frac{s_2'}{s_2} \Rightarrow \frac{y'}{-2}=\frac{-40}{40} \Rightarrow y_1=2\text{ cm}$$

de modo que, como ya sabíamos, la imagen generada por el sistema está 40 cm a la derecha de la segunda lente, es **real**, **derecha** y del **mismo tamaño**, 2 cm, que el objeto inicial.

Modelo 02

C4.— Explique mediante construcciones geométricas qué posiciones debe ocupar un objeto, delante de una lente delgada convergente, para obtener:

a) Una imagen real de tamaño menor, igual o mayor que el objeto.

b) Una imagen virtual. ¿Cómo está orientada esta imagen y cuál es su tamaño en relación con el objeto?

Véase la teoría.

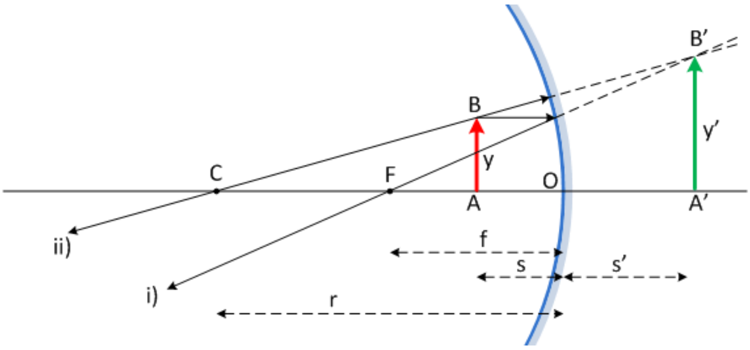
JUNIO 02

C4.− Un objeto luminoso se encuentra delante de un espejo esférico cóncavo. Efectúe la construcción geométrica de la imagen e indique su naturaleza si el objeto está situado a una distancia igual, en valor absoluto, a:

a) La mitad de la distancia focal del espejo.

b) El triple de la distancia focal del espejo.

a) Obsérvese la figura: el objeto AB está situado a una distancia objeto s = r/4 del espejo, mitad de la distancia focal, f = r/2, cuya posición conocemos bien: equidistante entre el centro de curvatura y el vértice del espejo.



Como siempre, debemos tener presente el criterio de signos, que establece, acerca de los datos del espejo y del objeto, lo siguiente:

$$r < 0; \quad f = \frac{r}{2} < 0; \quad s = \frac{f}{2} = \frac{r}{4} < 0; \quad y > 0$$

Ahora, la fórmula para la posición s' de la imagen, que es la conocida

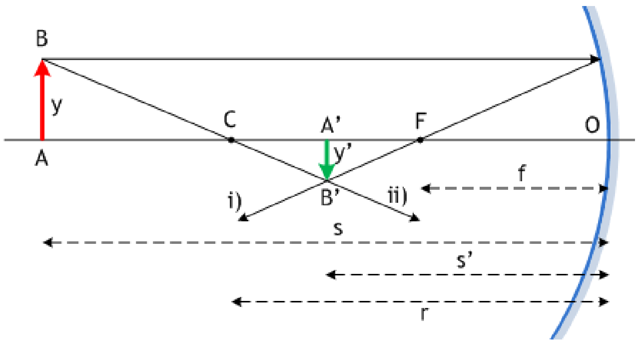
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{1}{r/2} - \frac{1}{r/4} = \frac{2}{r} - \frac{4}{r} = -\frac{2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad s' = -\frac{r}{2} > 0$$

Nótese que esto significa que la imagen se forma a la derecha del espejo, donde s' es positivo. Además, eso implica que ha de formarse con la prolongación de los rayos reflejados en el espejo, de modo que ha ser virtual. En cuanto al tamaño de la imagen, la fórmula es

$$\frac{y}{y'} = -\frac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y}{y'} = -\frac{r/4}{-r/2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y' = 2y > 0$$

es decir, la imagen es derecha y de tamaño doble que el objeto. En resumen, imagen **virtual, derecha y de doble tamaño.** La imagen, por lo demás, se ha construido en la figura empleando los rayos: i), paralelo al eje y que se refleja en el espejo para pasar por el foco; ii) pasando por el centro de curvatura, que se refleja sobre sí mismo. Los rayos son divergentes, y sus prolongaciones forman la imagen virtual, como ya se ha visto.

b) Ahora el objeto se ha distanciado del espejo hasta s = 3f = 3r/2. Los datos acerca del espejo y del objeto son



$$r < 0; \quad f = \frac{r}{2} < 0; \quad s = 3f = 3\,\frac{r}{2} < 0; \quad y > 0$$

y las cuentas, para la posición s' de la imagen, quedan

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{1}{r/2} - \frac{1}{3r/2} = \frac{2}{r} - \frac{2}{3r} = \frac{4}{3r}$$

Por tanto, $$s' = \frac{3r}{4} < 0$$

y el tamaño imagen resulta $$\frac{y}{y'} = -\frac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y}{y'} = -\frac{3r/2}{3r/4} = -\frac{4}{2} = -2 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{y}{2} < 0$$

De modo que la imagen es **real, invertida y de tamaño mitad que el objeto**. Aparece exactamente en el punto medio entre el centro de curvatura y el foco, y la figura emplea los mismos rayos i) y ii) que en el apartado anterior, aunque en esta ocasión convergen para dar una imagen real e invertida.

Junio 02

A2.– Un sistema óptico centrado está formado por dos lentes delgadas convergentes de igual distancia focal (f = 10 cm) separadas 40 cm. Un objeto lineal de altura 1 cm se coloca delante de la primera lente a una distancia de 15 cm. Determine:

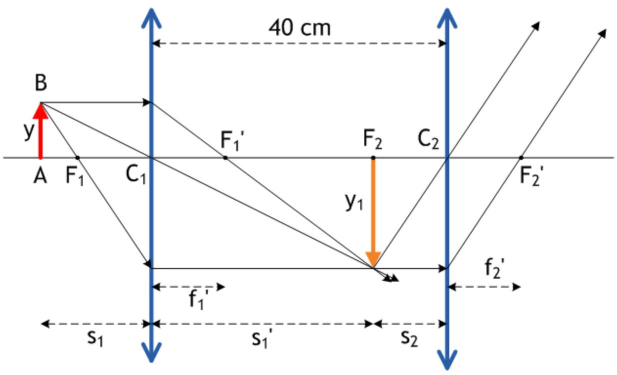
a) La posición, el tamaño y la naturaleza de la imagen formada por la primera lente.

b) La posición de la imagen final del sistema, efectuando su construcción geométrica.

a) La construcción gráfica de la imagen se muestra en la imagen. Los cálculos en la primera lente son sencillos:

$$-\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1'} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{-15}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{10} \quad\Rightarrow\quad s_1'=\mathbf{30\ cm}$$

$$\frac{y_1}{y}=\frac{s_1'}{s_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{y_1}{1}=\frac{30}{-15} \quad\Rightarrow\quad y_1=\mathbf{-2\ cm}$$



y responden a las preguntas: la imagen en la primera lente es **real**, **invertida**, de **tamaño doble** que el objeto, y está situada a 30 cm a la derecha de la primera lente, exactamente en el foco objeto de la segunda lente, como es fácil de ver.

b) Sabemos que un objeto dispuesto a la distancia focal de una lente convergente produce una imagen **real**, **invertida** y de tamaño **infinito**, que se forma a distancia infinita. La imagen muestra como los rayos que atraviesan la segunda lente resultan paralelos, de forma que se cortarán a distancia infinita.

Septiembre 02

C3.– Una superficie de discontinuidad plana separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2. Si un rayo incide desde el medio de índice n_1, razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $n_1 > n_2$ el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia.

b) Si $n_1 < n_2$ a partir de un cierto ángulo de incidencia se produce el fenómeno de reflexión total.

La ley de Snell es lo único que necesitamos saber. En la refracción desde el medio 1, con índice n_1, al medio 2, de índice n_2, la ley exige que

$$n_1.\text{sen } i = n_2.\text{sen } r$$

a) de modo que, si $n_1 > n_2$, se sigue que $\quad \text{sen } r > \text{sen } i \quad\Rightarrow\quad r > i$

y el apartado a) es, por tanto, **falso**: al pasar a un medio de refracción mayor, el rayo se aleja de la normal.

b) esta vez, puesto que $n_1 < n_2$, se sigue que $\quad \text{sen } i > \text{sen } r \quad\Rightarrow\quad i > r$

de modo que el rayo, en la refracción, se acerca a la normal. En consecuencia, este apartado es también **falso**: no puede producirse reflexión total, que requiere la condición previa r > i.

Septiembre 02

B2.– Una lente delgada convergente proporciona de un objeto situado delante de ella una imagen real, invertida y de doble tamaño que el objeto. Sabiendo que dicha imagen se forma a 30 cm de la lente, calcule:

a) La distancia focal de la lente.

b) La posición y naturaleza de la imagen que dicha lente formará de un objeto situado 5 cm delante de ella, efectuando su construcción geométrica.

Véanse problemas **Septiembre 97 A1**, **Junio 98 A2**, **Junio 00 B1**, **Septiembre 00 B2**, entre otros.
Sol.– a) 10 cm; b) s’ = −10 cm; virtual, derecha y de 10 cm.

Modelo 03

C3.– Un rayo de luz monocromática que se propaga en el aire penetra en el agua de un estanque:

a) ¿Qué fenómeno luminoso se origina al pasar la luz del aire al agua? Enuncie las leyes que se verifican en este fenómeno.

b) Explique si la velocidad, la frecuencia y la longitud de onda cambian al pasar la luz de un medio a otro.

Véase la teoría.
Sol.– a) refracción; b) cambian velocidad y longitud de onda; no cambia la frecuencia.

MODELO 03

B2.– Una lente convergente de 10 cm de distancia focal se utiliza para formar la imagen de un objeto luminoso lineal colocado perpendicularmente a su eje óptico y de tamaño y = 1 cm.

a) **¿Dónde hay que colocar el objeto para que su imagen se forme 14 cm por detrás de la lente? ¿Cuál es la naturaleza y el tamaño de esta imagen?**

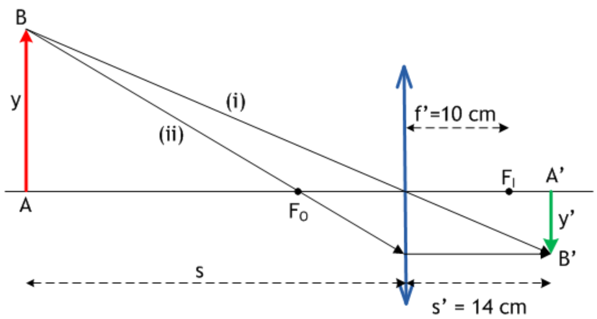
b) **¿Dónde hay que colocar el objeto para que su imagen se forme 8 cm por delante de la lente? ¿Cuál es la naturaleza y el tamaño de esta imagen?**

Efectúe la construcción geométrica en ambos casos.

Suponemos, como siempre, el objeto situado a la izquierda de la lente y la marcha de los rayos de izquierda a derecha, con todos los criterios de signos habituales.

a) Enfocaremos este primer apartado de un modo distinto al habitual: generalmente, lo más práctico es emplear las ecuaciones de las lentes y del aumento lateral para resolver numéricamente las cuestiones, y realizar después (o al mismo tiempo) las construcciones geométricas de las imágenes. Ya que esta vez nos dan la posición de la imagen, aprovecharemos para obtener inicialmente una solución gráfica del problema, y haremos las cuentas a continuación.

Sabemos que, si una lente convergente forma una imagen detrás de la lente, tiene que ser **real** e **invertida**: ese debe ser nuestro caso. Deberíamos dibujar la lente y colocar sus focos objeto e imagen a 10 cm de la misma, uno a cada lado. Después colocamos la imagen invertida y a la derecha de la lente, en la posición indicada en el enunciado.



Empleando el **principio de reversibilidad**, podemos dibujar la marcha de los rayos procedentes del objeto. Uniendo B' con el centro de la lente tenemos la dirección de uno de los rayos (i) que han de salir de B; imaginando un rayo que se desvió paralelo al eje tras atravesar la lente, tenemos el rayo (ii) que salió de B hacia el foco objeto F_O; la convergencia de ambas direcciones señala la posición del objeto. Podríamos emplear ahora una regla para medir s y responde a la cuestión. También podríamos medir y' y conocer el tamaño de la imagen.

Naturalmente, se espera que obtengamos esos resultados mediante los cálculos oportunos, que resultarían acordes con nuestra construcción geométrica. Tenemos f' = 10 cm y s' = 14 cm, de modo que será:

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{s}+\frac{1}{14}=\frac{1}{10} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s}=-\frac{1}{35} \quad\Rightarrow\quad s=\mathbf{-35\ cm}$$

y sabemos que es una imagen **real** e **invertida**. Su tamaño resulta

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{1}=\frac{14}{-35} \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{2}{5}=\mathbf{-0,4\ cm}$$

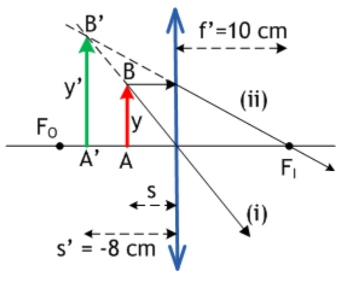
dos veces y media menor que el objeto.

b) Empecemos ahora con las ecuaciones. Sabemos que f' = 10 cm y s' = −8 cm, pues la imagen se ha formado a la izquierda de la lente, delante de la misma. Por tanto,

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{s}+\frac{1}{-8}=\frac{1}{10} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s}=-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=-\frac{9}{40} \quad\Rightarrow\quad s=\mathbf{-\frac{40}{9}\ cm=-4,44\ cm}$$

el objeto tuvo de colocarse a 4,44 cm delante de la lente, dentro de su distancia focal objeto. Como sabemos, es así como debe suceder para que la imagen aparezca a la izquierda de la lente. Además, también sabemos que es **virtual**, pues ha de formarse necesariamente con las prolongaciones de los rayos desviados por la lente. El tamaño resultará

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{1}=\frac{-8}{-\frac{40}{9}} \quad\Rightarrow\quad y'=\mathbf{\frac{9}{5}\ cm=1,8\ cm}$$



mayor que el objeto. Todo ello está de acuerdo con la construcción gráfica que se adjunta; en ella se muestran los rayos (i), que sale del objeto y pasa por el centro de la lente sin desviarse, y (ii), que sale del objeto paralelo al eje y se refracta para pasar por el foco imagen a la derecha de la lente. Las prolongaciones de estos rayos divergentes proporcionan la imagen A'B'.

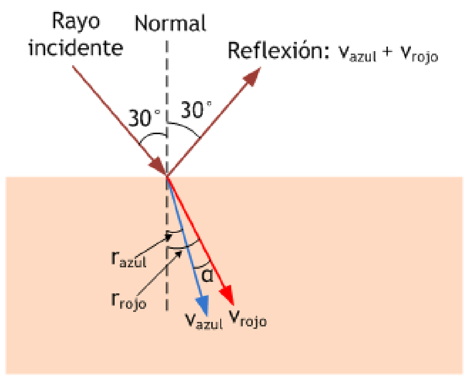
JUNIO 03

C4.– Un haz luminoso está constituido por dos rayos de luz superpuestos: uno azul de longitud de onda 450 nm y otro rojo de longitud de onda 650 nm. Si este haz incide desde el aire sobre la superficie plana de un vidrio con un ángulo de incidencia de 30º, calcule:

a) El ángulo que forman entre sí los rayos azul y rojo reflejados.

b) El ángulo que forman entre si los rayos azul y rojo refractados.

Índice de refracción del vidrio para el rayo azul: n_{azul} = 1,55 Índice de refracción del vidrio para el rayo rojo: n_{rojo}=1,40



a) En la reflexión, la luz azul y la luz roja se mueven en la misma dirección, formando un ángulo de 30º con la normal en el punto de incidencia, tal como se muestra en la figura. Por supuesto, las longitudes de onda no cambian, puesto que la luz no experimenta cambio de medio. La respuesta formal sería, por tanto, 0º.

b) Al cambiar de medio y entrar en el vidrio, la luz roja y la luz azul se mueven con **diferente velocidad** y, por tanto, con **distinto índice de refracción:** estamos ante un fenómeno de **dispersión** de la luz. Tenemos, pues, que aplicar la ley de Snell a cada una de ellas, para obtener los correspondientes ángulos de refracción, que serán diferentes:

Para el rayo de luz azul: $1.\text{sen } 30° = 1{,}55.\text{sen } r_{azul}$

de donde $\text{sen } r_{azul} = 0{,}3226 \Rightarrow r_{azul} = 18°49'9''$

Para el rayo de luz roja: $1.\text{sen } 30° = 1{,}40.\text{sen } r_{rojo}$

de donde $\text{sen } r_{rojo} = 0{,}3571 \Rightarrow r_{rojo} = 20°55'29''$

así que el ángulo α que forman ambos rayos refractados, que puede verse en la figura, resulta ser

$$\alpha = 20°55'29'' - 18°49'9'' = 2°6'20''$$

Aunque no se plantee esta cuestión en el ejercicio, una aclaración: la longitud de onda de ambos rayos, una vez en el vidrio, habrá **cambiado**. Como se recordará, la frecuencia de los rayos incidentes, una para el rayo azul y otra para el rayo rojo, es lo que se mantiene invariante al cambiar de medio; no así las longitudes de onda.

JUNIO 03

A2.– Un objeto de 1 cm de altura se sitúa a 15 cm delante de una lente convergente de 10 cm de distancia focal.

a) Determine la posición, tamaño y naturaleza de la imagen formada, efectuando su construcción geométrica.

b) ¿A qué distancia de la lente anterior habría que colocar una segunda lente convergente de 20 cm de distancia focal para que la imagen final se formara en el infinito?

a) La distancia objeto es s = –15 cm; la distancia focal f' = 10 cm. La imagen se forma en una posición s' que se obtiene de resolver

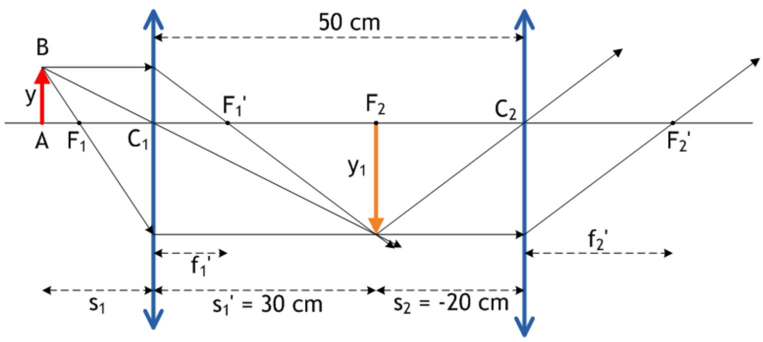
$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{-15}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{10} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s'}=\frac{1}{30} \quad\Rightarrow\quad s' = \mathbf{30\ cm}$$

de modo que aparece detrás de la lente; es, por tanto, **real**. Su tamaño y orientación la tenemos de

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{1}=\frac{30}{-15} \quad\Rightarrow\quad y' = \mathbf{-2\ cm}$$

así que es **invertida** y de **doble tamaño** que el objeto.

b) La teoría nos enseña que un objeto colocado en el foco de lente divergente produce rayos paralelos al atravesarla, de modo que la imagen se forma a distancia infinita. Por tanto, la imagen que acabamos de obtener en la primera lente, que debe actuar como objeto para la segunda, deberá estar en su foco; por tanto, a 20 cm de distancia de ella. Como esta imagen se formó a 30 cm de la primera lente, parece claro que la distancia entre las lentes deberá ser d = 30 + 20 = **50 cm**.



La figura muestra cómo sería la formación de las imágenes en ambas lentes, especialmente en lo que se refiere a la segunda lente y la aparición de una imagen a distancia infinita.

SEPTIEMBRE 03

C4.– a) Explique qué son una lente convergente y una lente divergente. ¿Cómo están situados los focos objeto e imagen en cada una de ellas?

b) ¿Qué es la potencia de una lente y en qué unidades se acostumbra a expresar?

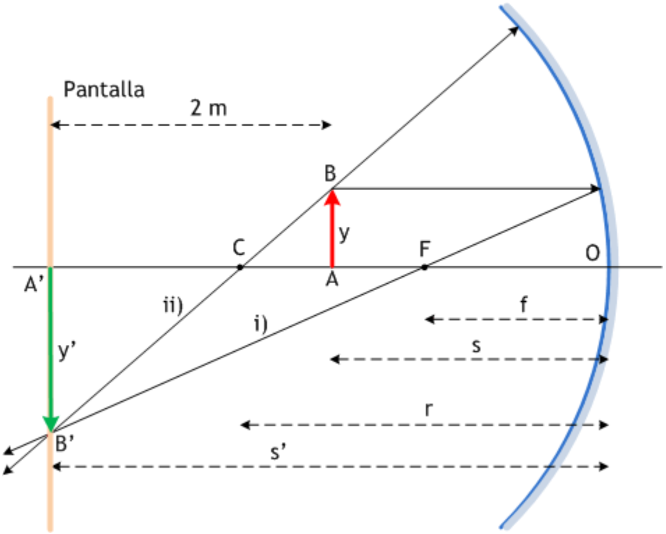
Véase la teoría.

SEPTIEMBRE 03

B2.– Por medio de un espejo cóncavo se quiere proyectar la imagen de un objeto de tamaño 1 cm sobre una pantalla plana, de modo que la imagen sea invertida y de tamaño 3 cm. Sabiendo que la pantalla ha de estar colocada a 2 m del objeto, calcule:

a) Las distancias del objeto y de la imagen al espejo, efectuando su construcción geométrica.

b) El radio del espejo y la distancia focal.



a) Hagamos las cuentas, antes que nada. La fórmula para la posición en la formación de imágenes en un espejo cóncavo, y la que nos informa sobre el tamaño de la imagen son las conocidas

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad (1); \qquad \frac{y}{y'}=-\frac{s}{s'} \qquad (2)$$

donde, de los datos del problema, sabemos que y = 1 cm; y' = −3 cm, de manera que podemos deducir, de (2):

$$\frac{1}{-3}=-\frac{s}{s'} \quad \Rightarrow \quad s' = 3s \qquad (3)$$

así que sabemos ahora que las distancias objeto s e imagen s' están esa relación. Además, ya que el enunciado afirma que la pantalla donde se forma la imagen está a 2 m del objeto, es fácil concluir que

$$s' = -2 + s \qquad (4)$$

donde debe tenerse presente, para comprender el signo negativo antes del 2, que todas las cantidades son negativas, de acuerdo con el criterio habitual de signos: la figura debería aclarar eso.

Así las cosas, de (3) y (4) se despeja fácilmente $s = -1$ m; $s' = -3$ m

b) Ahora es muy sencillo obtener la distancia focal, f. De (1), conocidas s y s', se tiene

$$\frac{1}{-1}+\frac{1}{-3}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{3}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f=-\frac{3}{4}\text{ m} \quad \Rightarrow \quad r = 2f = -\frac{3}{2}\text{ m}$$

En cuanto a la construcción geométrica de la imagen, es la clásica para un espejo esférico cóncavo, con imagen **real, invertida y de mayor tamaño**. El objeto, como sabemos y confirma la figura, está colocado entre el centro de curvatura y el foco. Los rayos que se han dibujado, como siempre, son i) y ii), que pasan respectivamente por el foco y el centro de curvatura.

MODELO 04

C4.– a) ¿Qué combinación de lentes constituye un microscopio? Explique mediante un esquema gráfico su disposición en el sistema

c) Dibuje la marcha de los rayos procedentes de un objeto a través del microscopio, de manera que la imagen final se forme en el infinito.

Véase la teoría.

MODELO 04

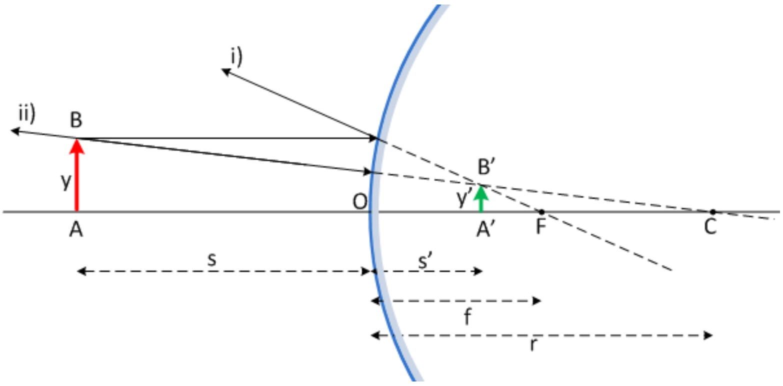
B2.– Un espejo esférico convexo proporciona una imagen virtual de un objeto que se aproxima a él con velocidad constante. El tamaño de dicha imagen es 1/10 del tamaño del objeto cuando éste se encuentra a 8 m del espejo.

a) ¿A qué distancia del espejo se forma la correspondiente imagen virtual?
b) ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo?
c) Un segundo después, el tamaño de la imagen formada por el espejo es 1/5 del tamaño del objeto. ¿A qué distancia del espejo se encuentra ahora el objeto?
d) ¿Cuál es la velocidad del objeto?

a) De nuevo las ecuaciones para la formación de imágenes en un espejo esférico, esta vez convexo. Se trata de

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad (1); \qquad \frac{y}{y'}=-\frac{s}{s'} \quad (2)$$

y sabemos esta vez que f > 0, ya que el foco está a la derecha del espejo, igual que su centro de curvatura. Igualmente, sabemos que la imagen que se formará será **virtual** y **derecha**, así que y > 0 e y' > 0.



Conocemos la relación de tamaños objeto–imagen cuando el objeto está a 8 m del espejo, es decir, cuando s = −8 m (¡téngase siempre presente el convenio de signos!). Así que (2) nos da esta ocasión

$$\frac{y}{y'}=\frac{1}{0{,}1}=-\frac{s}{s'} \quad \Rightarrow \quad s' = -0{,}1s = \mathbf{0{,}8\ m}$$

lo que responde a la primera pregunta: la imagen se forma a 80 cm a la derecha del espejo.

b) Ahora, de (1), conocidas s y s', se sigue que

$$\frac{1}{-8}+\frac{1}{0{,}8}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{8}+\frac{10}{8}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f=\frac{8}{9}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad r = 2f = \mathbf{\frac{16}{9}\ m}$$

c) Hay que repetir los cálculos del apartado a), para encontrar el valor que tiene s ahora, puesto que el objeto se ha movido hacia la derecha, acercándose al espejo. Empecemos notando que, ya que el tamaño imagen es ahora 1/5 del objeto, (2) queda como

$$\frac{y}{y'}=\frac{1}{1/5}=5=-\frac{s}{s'} \quad \Rightarrow \quad s' = -\frac{s}{5}$$

y ahora (1), que se escribe

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{-s/5}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}-\frac{5}{s}=-\frac{4}{s}=\frac{1}{f}=\frac{9}{8} \quad \Rightarrow \quad s=-\frac{32}{9}=\mathbf{-3{,}56\ m}$$

la nueva posición del objeto.

d) De modo que, en 1 s, el objeto ha pasado de estar a 8 m del espejo a colocarse a 3,56 m, siempre a su izquierda y acercándose a él: ha recorrido 8 − 3,56 = 4,44 m. La velocidad, supuesta constante, es obvia:

$$v = \mathbf{4{,}44\ m/s}$$

Esta velocidad tiene signo **positivo**, ya que el objeto se mueve hacia la derecha y ese es nuestro criterio de signos. De modo más formal, véase que el desplazamiento en 1 s ha llevado al móvil desde la posición inicial −8 m (8 m a la izquierda del espejo) a la posición final −3,56 m (sigue a la izquierda del espejo). El desplazamiento en 1 s que hemos empleado más arriba ha sido

$$\Delta s = \text{posición final} - \text{posición inicial} = -3{,}56 - (-8) = 4{,}44\ \text{m}$$

una cantidad positiva.

Junio 04

C4.– a) ¿Qué tipo de imagen se obtiene con un espejo esférico convexo?
b) ¿Y con una lente esférica divergente?

Efectúe las construcciones geométricas adecuadas para justificar las respuestas. El objeto se supone real en ambos casos.

Véase la respuesta para **MODELO 01 C3**, que plantea exactamente la misma cuestión.

JUNIO 04

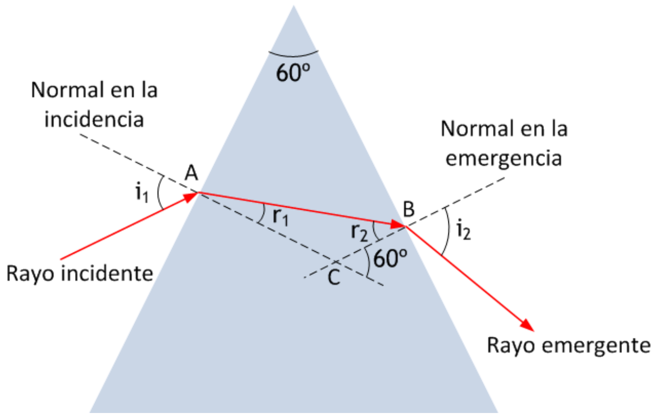
B2.– Un rayo de luz monocromática incide sobre una cara lateral de un prisma de vidrio, de índice de refracción $n = \sqrt{2}$. El ángulo del prisma es α = 60°. Determine:

a) El ángulo de emergencia a través de la segunda cara lateral si el ángulo de incidencia es de 30°. Efectúe un esquema gráfico de la marcha del rayo.

b) El ángulo de incidencia para que el ángulo de emergencia del rayo sea de 90°.

a) La figura muestra la marcha del rayo a través del prisma. Incide en la cara lateral izquierda en el punto A, desde el aire, con un ángulo de incidencia de 30°, y experimenta una primera refracción. La ley de Snell exige que

$$1.\text{sen } 30^\circ = \sqrt{2}\,.\text{sen } r_1 \;\Rightarrow\; \text{sen } r_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; r_1 = 20^\circ 42' 17''$$



De otra parte, sabemos que $r_1 + r_2 = 60^\circ$

de modo que r_2 es inmediato,

$$r_2 = 60^\circ - r_1 = 60^\circ - 20^\circ 42' 17'' = 39^\circ 17' 43''$$

El rayo incide, pues, en B con este ángulo, para que suceda una segunda refracción, esta vez del vidrio al aire. La ley de Snell se escribe ahora

$$\sqrt{2}\,.\text{sen } r_2 = 1.\text{sen } i_2 \;\Rightarrow\; \text{sen } i_2 = 0{,}8956 \;\Rightarrow\; i_2 = \mathbf{63^\circ 35' 29''}$$

b) Esta vez hemos de buscar el valor de i_1. Procedamos justamente del revés, hacienda el camino del rayo en sentido inverso. En la refracción en B, después de atravesar el prisma, debe ser i_2 = 90°, como se nos pide. Eso implica que la ley de Snell, en esa refracción, queda

$$\sqrt{2}\,.\text{sen } r_2 = 1.\text{sen } 90^\circ = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen } r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad r_2 = 45^\circ$$

de modo que el ángulo r_2 **tiene que haber sido 45°**. Como la suma de r_1 y r_2 ha de ser 60°, se deduce que r_1 = 15°. Y así, escribiendo la ley de Snell en A, en la primera refracción del aire al vidrio,

$$1.\text{sen } i_1 = \sqrt{2}\,.\text{sen } 15^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen } i_1 = 0{,}3660 \qquad \Rightarrow \qquad i_1 = \mathbf{21^\circ 28' 15''}$$

obtenemos cuál tendría que haber sido el ángulo de incidencia.

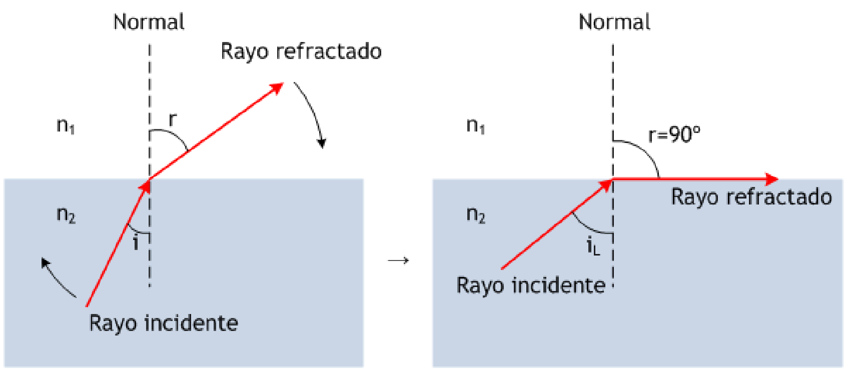
SEPTIEMBRE 04

C3.– a) Defina el concepto de ángulo límite y determine su expresión para el caso de dos medios de índices de refracción n_1 y n_2, si $n_1 > n_2$.

b) Sabiendo que el ángulo límite definido entre un medio material y el aire es 60°, determine la velocidad de la luz en dicho medio.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, c = 3.10⁸ m/s

a) Cuando un rayo de luz se refracta al pasar de un medio a otro, el ángulo de refracción r es **mayor** que el incidencia i cuando el rayo **pasa de un índice de refracción a otro menor**, es decir, cuando **la luz pasa de un medio más lento a otro más rápido**. En las condiciones del enunciado, la luz tendría que ir del medio 2, con índice n_2, al medio 1, con índice n_1.



En tal supuesto, el rayo se refracta **alejándose** de la normal. Eso permite que, si el ángulo de incidencia va aumentando progresivamente, se alcance finalmente un valor i_L para el que resulte r = 90°, de manera que si i sigue aumentando, **no habrá refracción, produciéndose la reflexión total.** El ángulo límite, pues, es aquel que cumple, aplicando la ley de Snell

$$n_2.\text{sen } i_L = n_1.\text{sen } 90^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen } i_L = \frac{n_1}{n_2}$$

b) Si se trata de aire, n_1 = 1, y el ángulo límite es i_L = 60°, podemos hallar con facilidad el índice de refracción del medio material, que será n_2, y deducir de él la velocidad de la luz en este medio:

$$n_2 = \frac{n_1}{\text{sen } i_L} = \frac{1}{\text{sen } 60^\circ} = \mathbf{1{,}15} \qquad ; \qquad n_2 = \frac{c}{v_2} \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3.10^8}{1{,}15} = \mathbf{2{,}60.10^8\ m/s}$$

SEPTIEMBRE 04

B1.– Un objeto luminoso de 2 cm de altura está situado a 4 m de una pantalla. Entre el objeto y la pantalla se coloca una lente esférica delgada, de distancia focal desconocida, que produce sobre la pantalla una imagen tres veces mayor que el objeto. Determine:

a) La posición del objeto respecto a la lente y la clase de lente necesaria.

b) La distancia focal de la lente y efectúe la construcción geométrica de la imagen.

Véanse JUNIO **98 A2** y JUNIO **00 B1**, idénticos es este ejercicio.

Sol.– a) Objeto a 1 m de la lente convergente; b) 1,5 m

MODELO 05

C2.– Delante de una lente convergente se coloca un objeto perpendicularmente a su eje óptico:

a) ¿A qué distancia de la lente debe colocarse para obtener una imagen de igual tamaño e invertida? ¿Cuál es la naturaleza de esta imagen?

b) ¿A qué distancia de la lente debe colocarse para obtener una imagen de doble tamaño y derecha? ¿ Cuál es la naturaleza de esta imagen?

Efectúe la construcción geométrica en ambos apartados.

Las ecuaciones $\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$; $\frac{y}{y'}=\frac{s}{s'}$ resuelven ambas cuestiones. En efecto,

a) Naturalmente, suponemos y > 0. Si la imagen ha de ser de igual tamaño e invertida, parece claro que y' =−y. En consecuencia,

$$\frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \Rightarrow \frac{y}{-y}=\frac{s}{s'} \Rightarrow s'=-s$$

y, por tanto, $$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{-s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{2}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow s=\mathbf{-2f'}$$

el objeto debe colocarse a una distancia de la lente igual al **doble de la distancia focal**. Téngase presente que f' > 0, y por tanto, s <0, ya que está a la izquierda de la lente, en el espacio objeto. La imagen, como puede verse en la construcción al final del problema, es **real e invertida**.

b) Esta vez debe ser y' = 2y, una imagen de doble tamaño que el objeto y derecha. Las ecuaciones nos dan

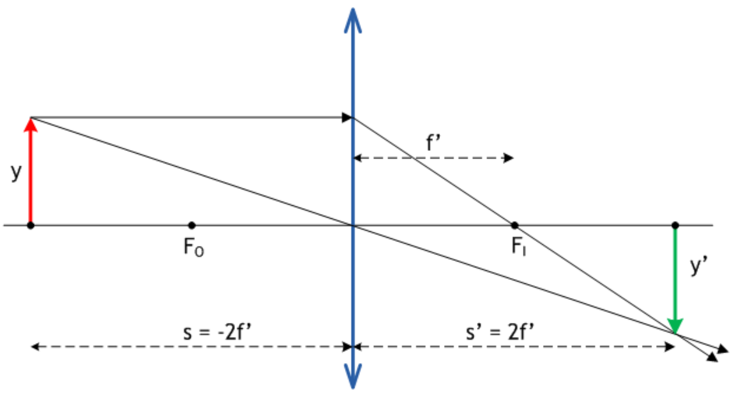
$$\frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \Rightarrow \frac{y}{2y}=\frac{s}{s'} \Rightarrow s'=2s$$

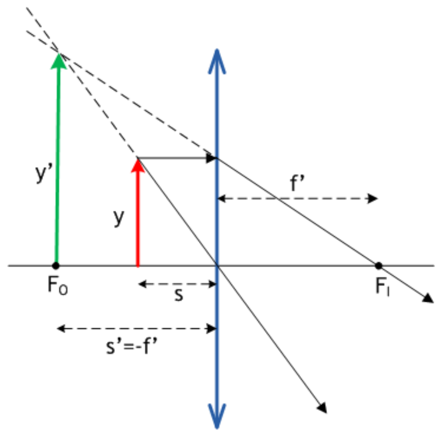
de modo que s' < 0, igual que s. Llevando esto a la ecuación de las lentes,

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{2s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{2s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow s=-\frac{\mathbf{f'}}{\mathbf{2}}$$

tenemos que el objeto debe estar situado dentro de la distancia focal, en el punto medio entre el foco y la lente La imagen es esta vez **virtual y derecha**.

La construcción geométrica de las imágenes en ambos casos aparece a continuación:





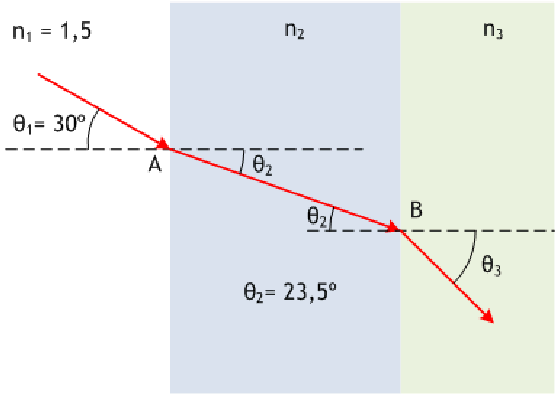
MODELO 05

B1.- Se tienen tres medios transparentes de índices de refracción n_1, n_2 y n_3 separados entre sí por superficies planas y paralelas. Un rayo de luz de frecuencia $\nu = 6.10^{14}$ Hz incide desde el primer medio ($n_1 = 1,5$) sobre el segundo formando un ángulo $\theta_1 = 30°$ con la normal a la superficie de separación.

a) Sabiendo que el ángulo de refracción en el segundo medio es $\theta_2 = 23,5°$, ¿cuál será la longitud de onda de la luz en este segundo medio?

b) Tras atravesar el segundo medio, el rayo llega a la superficie de separación con el tercer medio. Si el índice de refracción del tercer medio es $n_3 = 1,3$, ¿cuál será el ángulo de emergencia del rayo?

Dato: Velocidad de la luz en el vacío $c = 3.10^8$ m/s



Una observación previa: a menudo, cuando se discute el comportamiento de una lámina de caras planoparalelas, el medio externo es el aire, en ambos lados de la lámina. Uno de los resultados que se destacan es el **paralelismo** de los rayos incidente y emergente: el rayo no se desvía, aunque sí se **desplaza**. Pues bien, este ejercicio introduce una diferencia, ya que los medios a ambos lados de la lámina son distintos, con índices de refracción n_1 y n_3. Los rayos incidente y emergente, como sugiere la figura, **ya no van a ser paralelos**.

a) Comenzamos aplicando la ley de Snell a la primera refracción, que se escribe

$$1,5.\text{sen } 30° = n_2.\text{sen } 23,5° \qquad \Rightarrow \qquad n_2 = 1,88$$

Ahora, debemos tener presente que la frecuencia de la luz, 6.10^{14} Hz será la misma en cualquier medio, pero **no su longitud de onda**. Para hallar la correspondiente a este medio n_2, recordemos

$$n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{c}{\lambda_2 \nu} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2 = \frac{c}{n_2\,\nu} = \frac{3.10^8}{1,88.6.10^{14}} = \mathbf{265,96\ nm}$$

b) Y ahora, otra aplicación de la ley de Snell, esta vez en el punto B, al pasar del medio 2 al 3. Nótese que la simetría, en la figura, deja claro que el ángulo de incidencia es 23,5° en esta refracción:

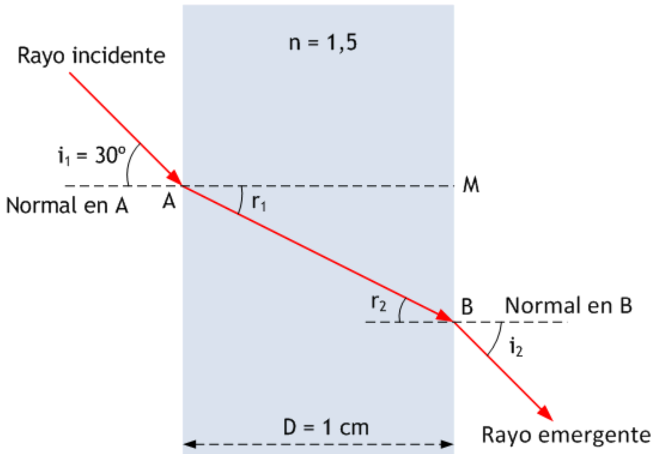
$$1,88.\text{sen } 23,5° = 1,3.\text{sen } \theta_3 \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen } \theta_3 = \frac{1,88.\text{sen } 23,5°}{1,3} = 0,5767 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_3 = \mathbf{35°12'56''}$$

JUNIO 05

C4.- Sobre una lámina transparente de índice de refracción 1,5 y 1 cm de espesor, situada en el vacío, incide un rayo luminoso formando un ángulo de 30º con la normal a la cara. Calcule:

a) El ángulo que forma con la normal el rayo que emerge de la lámina. Efectúe la construcción geométrica correspondiente.

b) La distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina.



Esta vez estamos ante una aplicación típica de una lámina de caras planoparalelas situada en el vacío. Como sabemos, el rayo de luz que llega a la cara izquierda de la lámina con un ángulo de incidencia de 30° emergerá, tras atravesar la lámina, con el mismo ángulo de emergencia, 30°, sin experimentar desviación, aunque sí habrá sufrido un desplazamiento lateral. Todo ello queda reflejado en la figura, que muestra el camino del rayo a través de la lámina.

a) En efecto, la aplicación de la ley de Snell en las dos refracciones que experimenta el rayo, en los puntos A y B, implica que

en A: $1.\text{sen } 30° = 1,5.\text{sen } r_1$ (1)

en B: $1,5.\text{sen } r_2 = 1.\text{sen } i_2$ (2)

y, puesto que $r_1 = r_2$ por razones obvias, se sigue que

$$\text{sen } 30° = \text{sen } i_2 \qquad \Rightarrow \qquad i_2 = 30°$$

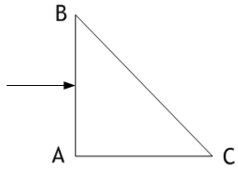
b) Podemos usar (1), o (2), para hallar el ángulo r_1, o r_2, indistintamente, ya que ambas son en realidad la misma ecuación. De (1) tenemos:

$$1.\text{sen } 30° = 1,5.\text{sen } r_1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen } r_1 = \frac{\text{sen } 30°}{1,5} = 0,3333 \Rightarrow \qquad r_1 = 19°28'16''$$

Ahora, en el triángulo ABM de la figura, resulta $\cos r_1 = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1\text{ cm}}{AB} \qquad \Rightarrow \qquad AB = \dfrac{1\text{ cm}}{\cos r_1} = \mathbf{1,06\ cm}$

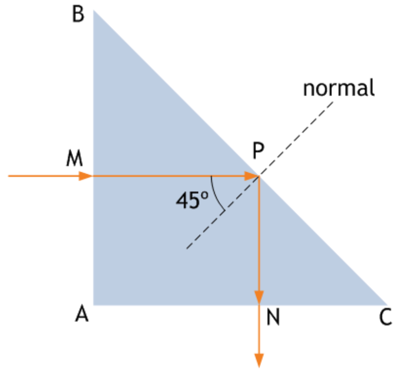
SEPTIEMBRE 05

C4.– Se tiene un prisma óptico de índice de refracción 1,5 inmerso en el aire. La sección del prisma es un triángulo rectángulo isósceles como muestra la figura. Un rayo luminoso incide perpendicularmente sobre la cara AB del prisma.



a) Explique si se produce o no reflexión total en la cara BC del prisma.

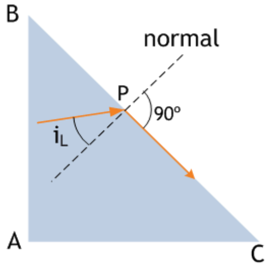
b) Haga un esquema gráfico de la trayectoria seguida por el rayo a través del prisma. ¿Cuál es la dirección del rayo emergente?



a) Sea M el punto de la cara izquierda en que incide el rayo: no se produce desviación alguna, puesto que índice **normalmente a la cara**. La trayectoria dentro del prisma es MP, de modo que el rayo incide en P haciendo un ángulo de 45°, por razones geométricas obvias, con la normal en ese punto. Un eventual rayo refractado, saliendo al aire, debería cumplir la ley de Snell, en términos

$$1{,}5.\text{sen } 45° = 1.\text{sen } r$$

ecuación sin solución, toda vez que el primer miembro es mayor que 1, y sen r no puede ser mayor que 1. Literalmente, Snell nos está diciendo que **no hay rayo refractado**, ya que no hay forma de cumplir la ley.



Dicho de otro modo: al refractar del vidrio al aire, podemos hablar de **ángulo límite, i_L,** cuando el rayo refractado sale con ángulo de 90°, como se ve en la figura a la izquierda. El ángulo de incidencia de la luz en P, dentro del prisma, tendría que ser i_L y su valor sería (de nuevo, Snell):

$$1{,}5.\text{sen } i_L = 1.\text{sen } 90° = 1 \quad \Rightarrow \quad i_L = 41°48'37''$$

valor que, por cierto, es el ángulo límite del vidrio al agua. Volviendo entonces a nuestro caso, en la figura de arriba: el ángulo de incidencia en P es mayor que 41°48'37", así que no hay refracción y estamos, por tanto, ante **reflexión total**.

b) Por lo tanto, el rayo se **refleja en N, dentro del vidrio,** verticalmente y hacia abajo, ya que el ángulo de reflexión debe ser también de 45°. El rayo llega a N, incidiendo **normalmente** de nuevo, ahora en la cara AC, y emerge del prisma, sin desviarse en esta segunda refracción, verticalmente y hacia abajo. Estamos ante un bonito medio periscopio: otro como este situado más abajo, y tenemos a un oficial de submarino curioseando desde debajo del agua.

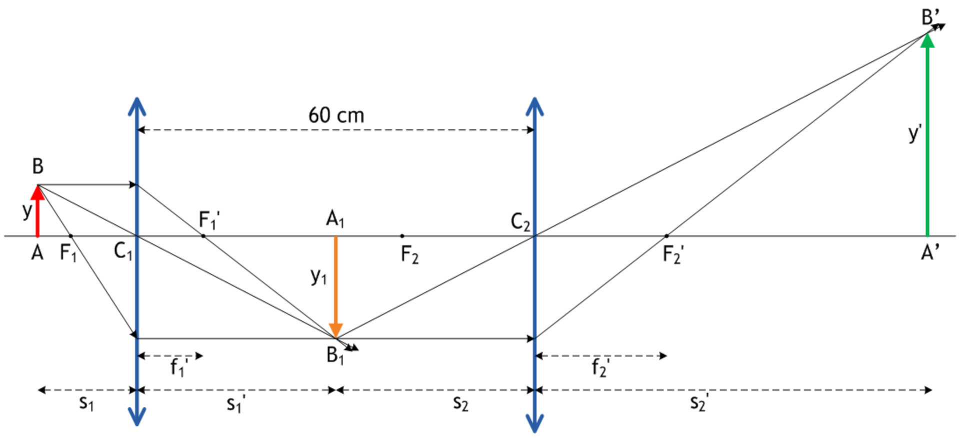
Septiembre 05

A2.– Un sistema óptico está formado por dos lentes delgadas convergentes, de distancias focales 10 cm la primera y 20 cm la segunda, separadas por una distancia de 60 cm. Un objeto luminoso de 2 mm de altura está situado 15 cm delante de la primera lente.

a) Calcule la posición y el tamaño de la imagen final del sistema.

b) Efectúe la construcción geométrica de la imagen mediante el trazado de rayos correspondiente.

a) Un sistema formado por dos lentes delgadas tiene, en general, el mismo tratamiento que una lente sencilla: se construye la imagen del objeto en la primera lente, y esta imagen actúa como objeto en la segunda lente, para producir la imagen final del objeto en el sistema. Resulta muy útil trabajar con una construcción geométrica ante nosotros, ya que facilita la comprensión de las sucesivas distancias objeto e imagen con que debemos manejarnos. Así, en el caso que nos ocupa, podemos comenzar por el apartado b), recogido en la figura adjunta.



Estúdiese con atención la marcha de los rayos. El objeto AB está entre F_1 y $2F_1$, ante la primera lente: su imagen A_1B_1 es real, invertida y de mayor tamaño. La imagen A_1B_1 actúa como objeto para la segunda lente, hallándose de nuevo entre F_2 y $2F_2$, de modo que la imagen de A_1B_1 en esta segunda lente acaba siendo A'B', real, invertida y de mayor tamaño que A_1B_1.

Como puede verse, en realidad no se trata más que hacer el mismo trabajo dos veces seguidas. Aplicamos ahora las leyes de construcción de imágenes en una lente, paso por paso:

En la primera lente:

distancia focal imagen, $f_1' = 10$ cm; distancia objeto, $s_1 = -15$ cm; tamaño objeto, $y = 2$ mm

así que podemos poner $\quad \dfrac{1}{s_1'} - \dfrac{1}{s_1} = \dfrac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{s_1'} - \dfrac{1}{-15} = \dfrac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad s_1' = 30$ cm

y además $\quad \dfrac{y_1}{y} = \dfrac{s_1'}{s_1} = \dfrac{30}{-15} = -2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2y = -4$ mm

de modo que la imagen A_1B_1 se forma 30 cm a la derecha de la primera lente; es invertida y de doble tamaño que el objeto inicial. Podemos comprender inmediatamente, mirando la figura cuál es la distancia imagen **en la segunda lente**, s_2, ya que conocemos la distancia entre las lentes.

En la segunda lente:

distancia focal imagen, $f_2' = 20$ cm; distancia objeto, $s_2 = -30$ cm; tamaño objeto, $y_1 = -4$ mm

así que podemos poner $\quad \dfrac{1}{s_2'} - \dfrac{1}{s_2} = \dfrac{1}{f_2'} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{s_2'} - \dfrac{1}{-30} = \dfrac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad s_2' =$ **60 cm**

y además $\quad \dfrac{y'}{y_1} = \dfrac{s_2'}{s_2} = \dfrac{60}{-30} = -2 \quad \Rightarrow \quad y' = -2y_1 =$ **8 mm**

así que la imagen final acaba formándose a 60 cm de la segunda lente, es **real** y **derecha** con respecto al objeto inicial, y su tamaño es **4 veces mayor**.

Modelo 06

C4.– Un objeto de 1 mm de altura se coloca a una distancia de 1 cm delante de una lente convergente de 20 dioptrías.

a) Calcule la posición y el tamaño de la imagen formada, efectuando su construcción geométrica.

b) ¿Se podría recoger esta imagen en una pantalla? ¿Qué instrumento óptico constituye la lente convergente utilizada de esta forma?

Sol.– a) 1,25 cm delante de la lente; 1,25 mm; b) No. Lupa.

A2.– Delante de un espejo cóncavo de 1 m de radio y a una distancia de 0,75 m se coloca un objeto luminoso de tamaño 10 cm.

a) Determine la posición, la naturaleza y el tamaño de la imagen formada por el espejo.

b) Si desde la posición anterior el objeto se acerca 0,5 m hacia el espejo, calcule la posición, la naturaleza y el tamaño de la imagen formada por el espejo en este caso.

Efectúe la construcción geométrica en ambos casos.

a) Hagamos las cuentas, en principio sin hacer la construcción geométrica, aunque sí con las ideas relativas a signos en la cabeza, al menos en lo que respecta a $r<0$, $f<0$, $s<0$, $y>0$, todos ellos fácilmente comprensibles para un espejo cóncavo. Las fórmulas son:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad (1); \qquad \frac{y}{y'}=-\frac{s}{s'} \quad (2)$$

Y, en (1), conocemos $f = r/2 = -0{,}5$ m; $s = -0{,}75$ m

así que s' es inmediata:
$$\frac{1}{-0{,}75}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-0{,}5} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'}=-\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad s' = -1{,}5 \text{ m}$$

y la imagen se forma a la izquierda del espejo, a **1,5 m de su centro**. Tiene que ser una imagen **real**, ya que se va a formar con los rayos reflejados en el espejo, y no con sus prolongaciones (en este caso, s' sería positiva, pues la imagen estaría a la derecha del espejo).

Ahora, en (2) conocemos y, s y s'; despejar y' es sencillo:

$$\frac{s}{s'}=-\frac{y}{y'} \quad \Rightarrow \quad \frac{-0{,}75}{-1{,}5}=-\frac{10}{y'} \quad \Rightarrow \quad y' = -20 \text{ cm}$$

(un poco de cuidado a las unidades: se ha puesto s y s' en m; y e y' en cm. No hay problema en ello). En resumen, imagen **real, invertida, de tamaño mayor (doble) y situada a 1,5 m del espejo**. Y sin hacer dibujos.

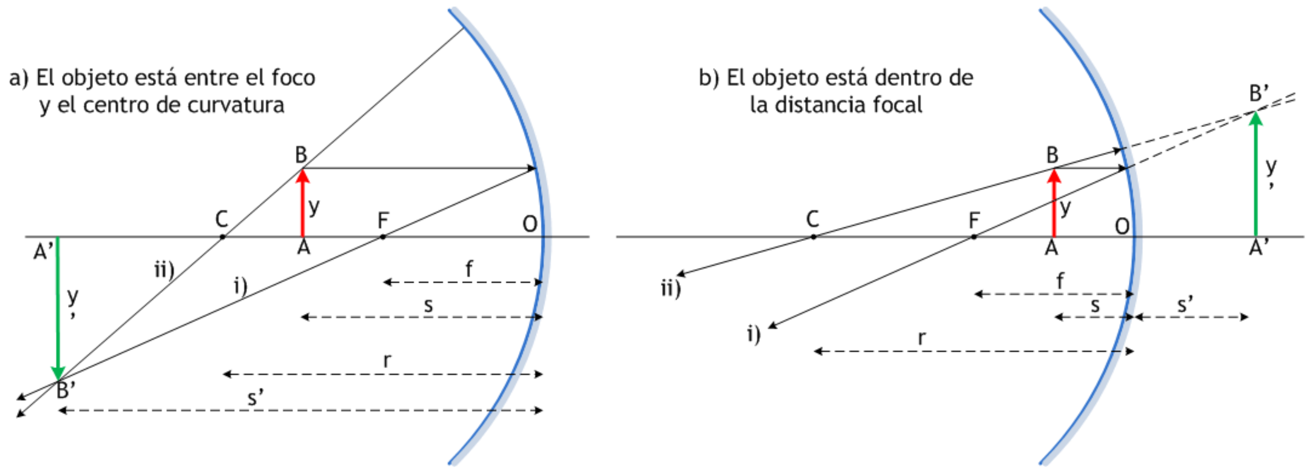
b) Entonces $s = -0{,}25$ m (dentro de la distancia focal, por tanto, ya que $f = -0{,}5$ m). Seguimos sin hacer dibujos, a base de cuentas: de (1), esta vez
$$\frac{1}{-0{,}25}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-0{,}5} \quad \Rightarrow \quad s' = -2+4 = 2 \text{ m}$$

así que la imagen sale a la derecha del espejo, ya que s' es positiva. Esto implica que será **virtual**, puesto que tendrá que formarse con prolongaciones de los rayos reflejados. Sobre el tamaño de la imagen, veamos que dice (2):

$$\frac{s}{s'}=-\frac{y}{y'} \quad \Rightarrow \quad \frac{-0{,}25}{2}=-\frac{10}{y'} \quad \Rightarrow \quad y' = 80 \text{ cm}$$

En resumen, imagen **virtual**, **derecha**, de **mayor tamaño** y 2 m del espejo, a su derecha.

Así que, como se ve, es perfectamente posible resolver un problema de formación de imágenes en un espejo sin echar mano de dibujos. Por supuesto, en general el dibujo ayuda, aunque solo sea en la determinación de signos. Ahora añadimos la construcción gráfica de las imágenes en ambos casos:



empleando, como es habitual, un rayo i) paralelo al eje que se refleja pasando por el foco F, y un rayo ii) que pasa poe el centro de curvatura y se refleja sobre sí mismo. En el caso a) los rayos convergen en B', imagen real del punto B, y en el caso b) los rayos divergen, de manera que necesitamos sus prolongaciones hasta B', imagen virtual del punto B.

JUNIO 06

C4.– Explique dónde debe estar situado un objeto respecto a una lente delgada para obtener una imagen virtual y derecha:

a) Si la lente es convergente.

b) Si la lente es divergente.

Realice en ambos casos las construcciones geométricas e indique si la imagen es mayor o menor que el objeto.

Véase la teoría.

JUNIO 06

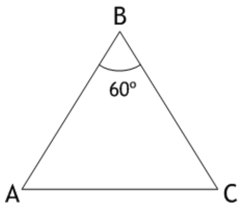
A2.– Sobre un prisma de ángulo 60° como el de la figura, situado en el vacío, incide un rayo luminoso monocromático que forma un ángulo de 41,3º con la normal a la cara AB. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo es paralelo a la base AC:

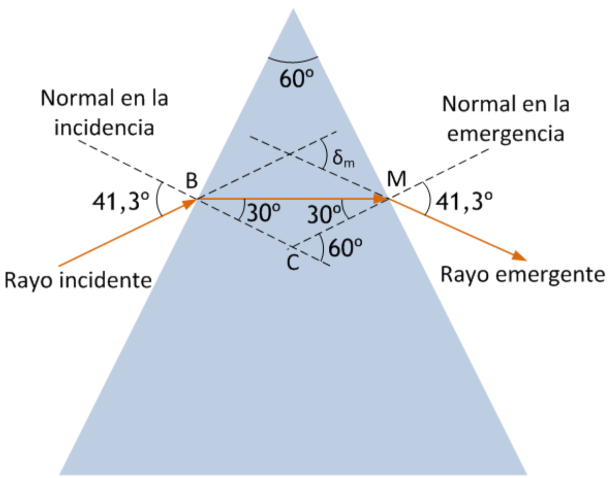
a) Calcule el índice de refracción del prisma.

b) Realice un esquema gráfico de la trayectoria seguida por el rayo a través del prisma

c) Determine el ángulo de desviación del rayo al atravesar el prisma

d) Explique si la frecuencia y la longitud de onda correspondientes al rayo luminoso son distintas, o no, fuera y dentro del prisma.





a) La observación de que el rayo es paralelo a la base del prisma en su interior es lo más relevante del enunciado: significa que tenemos mucha información acerca de los ángulos involucrados en la marcha del rayo. Estamos ante un caso de desviación mínima del rayo emergente, y en tal caso se cumplen las siguientes condiciones:

1) Los ángulos internos del rayo con las normales en B y M, en la figura, son iguales. Como su suma debe ser igual al ángulo del prisma, se sigue que cada uno de ellos es de 30º.

2) Los ángulos de incidencia y emergencia son iguales, de modo que el ángulo de emergencia es de 41,3º.

La figura recoge toda esta información; el resto es una serie de respuestas inmediatas a las cuestiones que nos plantean, y la única idea necesaria, más allá de la observación de la figura y consideraciones geométricas sencillas, es la ley de Snell.

a) Por aplicación de la esta ley en B, siendo n el índice de refracción del prisma:

$$1.\text{sen } 41{,}3º = n.\text{sen } 30º \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{\text{sen } 41{,}3º}{\text{sen } 30º} = 1{,}32$$

b) Hecho. Véase la figura.

c) En un prisma, el ángulo de desviación se obtiene de la expresión

$$\delta = i + \varepsilon - \alpha$$

donde i_1 e i_2 son, respectivamente, los ángulos de incidencia y emergencia, y α es el ángulo del prisma. En el caso que nos ocupa, los ángulos de incidencia y emergencia son iguales, y valen 41,3º; el ángulo del prisma es 60º. Se concluye que la desviación en nuestro caso, que es la **desviación mínima** en este prisma, vale

$$\delta_m = 41{,}3º + 41{,}3º - 60º = 22{,}6º$$

d) Recordemos una vez más un hecho esencial: **la frecuencia de la luz se mantiene en los cambios de medio**, ya que sólo depende de la fuente, y no del medio de propagación. No así la longitud de onda, que debe cumplir la ecuación

velocidad de propagación de la luz = longitud de onda x **frecuencia**

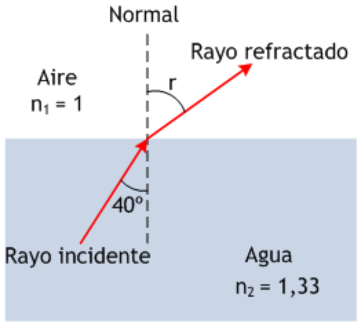
de modo que, si la frecuencia permanece invariable, un cambio en la velocidad de propagación supone un cambio de longitud de onda. Con más detalle, como la velocidad de la luz será mayor en el aire que dentro del prisma (el aire se considera a menudo como el vacío), la longitud de onda será mayor en el aire que en el prisma: de acuerdo con la igualdad anterior, si una cosa aumenta, la otra también.

C4.− Un buceador enciende una linterna debajo del agua (índice de refracción 1,33) y dirige el haz luminoso hacia arriba formando un ángulo de 40º con la vertical.

a) ¿con qué ángulo emergerá la luz del agua?

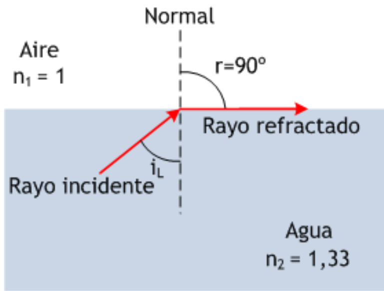
b) ¿cuál es el ángulo de incidencia a partir del cual la luz no saldrá del agua?

Efectúe esquemas gráficos en la explicación de ambos apartados.



a) La luz se mueve desde un medio de índice de refracción más alto, $n_2 = 1,33$, hacia otro de índice más bajo, $n_1 = 1$ (que suponemos el del aire). Como consecuencia, el ángulo de refracción será mayor que 40º, y lo obtendremos por aplicación de la ley de Snell:

$$1,33 . \text{sen } 40^\circ = 1 . \text{sen } r \quad \Rightarrow \quad \text{sen } r = 0,8549 \quad \Rightarrow \quad r = \mathbf{58^\circ 44' 58''}$$



b) Ya que el ángulo de refracción al pasar del agua al aire es mayor que el de incidencia, podemos aumentar éste hasta un valor i_L, que llamamos **ángulo límite**, para el que resulte r = 90º, de forma que el rayo refractado se mueva sobre la superficie de separación y no llegue a propagarse en el aire. Desde este ángulo límite en adelante, $i \geq i_L$, no existe refracción y tenemos reflexión total dentro del agua. Aplicando la ley de Snell al supuesto del ángulo límite:

$$1,33 . \text{sen}\, i_L = 1 . \text{sen } 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\, i_L = \frac{1}{1,33} = 0,752 \quad \Rightarrow \quad i_L = \mathbf{48^\circ 45' 12,5''}$$

SEPTIEMBRE 06

A2.– Se tiene un espejo cóncavo de 20 cm de distancia focal.

  a) ¿Dónde se debe situar un objeto para que su imagen sea real y doble que el objeto real?

  b) ¿Dónde se debe situar el objeto para que su imagen sea doble que el objeto pero tenga carácter virtual?

Efectúe la construcción geométrica en ambos casos.

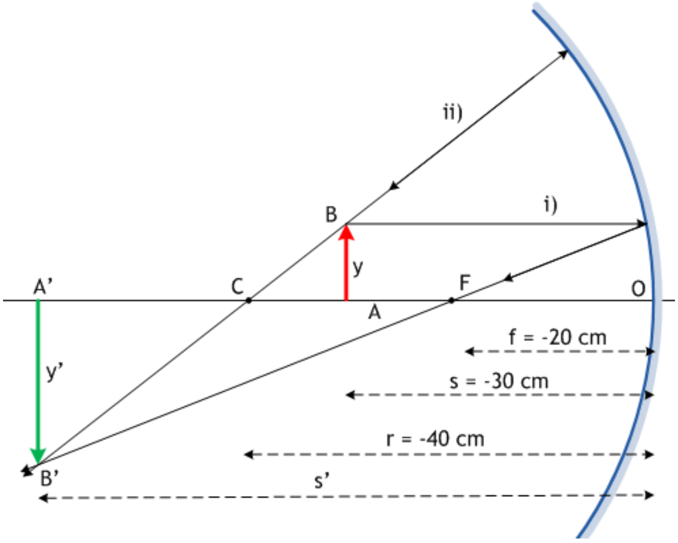
a) Aunque la construcción geométrica aparece al lado, la discusión del problema debe hacerse a partir de las fórmulas para la construcción de imágenes en un espejo esférico. Se trata de

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad ; \quad \frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}$$

con f = −20 cm y, naturalmente, s<0. Para que la imagen sea real debe formarse a la izquierda del espejo, con los rayos reflejados; esto implica que s’ ha de ser negativo, lo mismo que s. Consecuentemente, el cociente y’/y debe ser negativo, lo que significa que la imagen aparecerá invertida, y’<0. Esto permite escribir con seguridad

$$y' = -2y$$

ya que la imagen ha de ser de doble tamaño. Llevando esto a las ecuaciones



$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{-2y}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad s'=2s\,;$$

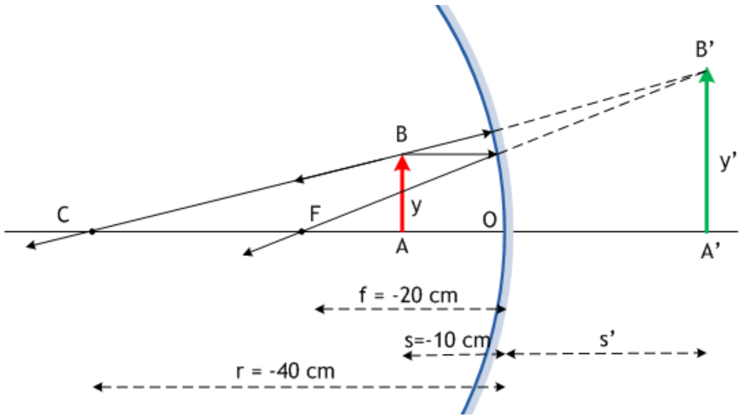
$$y \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s}+\frac{1}{2s}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad s=\frac{3}{2}f=\mathbf{-\,30\ cm}$$

obtenemos la respuesta: el objeto **debe colocarse a 30 cm del espejo**, en el punto medio entre el foco y el centro de curvatura. La imagen, de acuerdo con lo calculado, aparece en s’ = −60 cm y es doble que el objeto.

b) Para que la imagen sea doble y tenga carácter virtual debe formarse a la derecha del espejo, con las prolongaciones de los rayos reflejados: eso significa que será s’>0, en tanto que s<0, de forma que el cociente s’/s será negativo. Se sigue de ahí que el cociente y’/y tiene que ser positivo, así que la imagen aparecerá derecha. Podemos escribir

$$y' = 2y$$

llevar esta conclusión a las ecuaciones:



$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{2y}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad s'=-2s\,;$$

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s}+\frac{1}{-2s}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad s=\frac{f}{2}=\mathbf{-\,10\ cm}$$

y tenemos la nueva respuesta: **a 10 cm del espejo,** dentro de la distancia focal. La figura muestra que la imagen es virtual, como preveíamos, y está situada a 20 cm a la derecha del espejo.

MODELO 07

C4.–.Determine el tipo de imagen y el aumento lateral que se obtiene al situar un objeto delante de una lente divergente en los siguientes casos:

a) El objeto se sitúa a una distancia igual al doble de la distancia focal.

b) El objeto se sitúa a una distancia la mitad de la distancia focal de la lente.

Efectúe la construcción geométrica en ambos casos.

Los cálculos para localizar la posición y tamaño de la imagen en una lente divergente implican usar las ecuaciones

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \quad ; \quad \frac{y}{y'}=\frac{s}{s'}$$

donde s < 0 (el objeto se coloca a la izquierda de la lente)

f' < 0 (la distancia focal imagen en una lente divergente es negativa);

y > 0 (el objeto se dispone generalmente derecho sobre el eje óptico)

a) Así, podemos aplicarlas al caso en que s = 2f', tal como pide el primer apartado. Las operaciones quedan, entonces,

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'}-\frac{1}{2f'}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'}=\frac{3}{2f'} \Rightarrow s'=\mathbf{\frac{2}{3}f'} \quad ; \quad \frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \Rightarrow \frac{y}{y'}=\frac{2f'}{2f'/3}=3 \Rightarrow y'=\mathbf{\frac{1}{3}y}$$

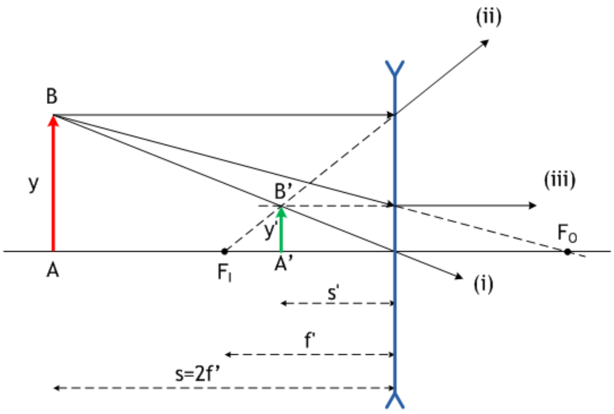
prediciendo una imagen **virtual**, pues s' tiene el mismo signo que f' y es, por tanto, negativa: a la izquierda de la lente, donde se ha de formar con las prolongaciones de los rayos desviados en la lente; dentro de la distancia focal de la lente y **derecha** y de **menor tamaño** que el objeto.

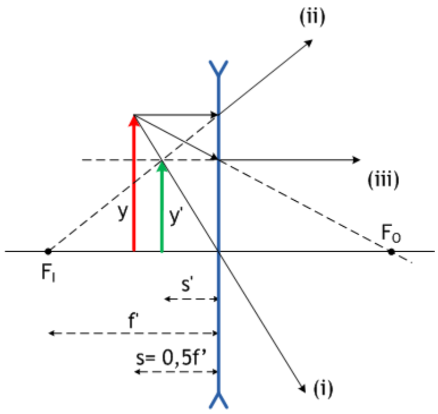
b) Del mismo modo, cuando $s=\frac{1}{2}f'$, las cuentas son

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'}-\frac{1}{f'/2}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'}=\frac{3}{f'} \Rightarrow s'=\mathbf{\frac{f'}{3}} \quad ; \quad \frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \Rightarrow \frac{y}{y'}=\frac{f'/2}{f'/3}=\frac{3}{2} \Rightarrow y'=\mathbf{\frac{2}{3}y}$$

e indican una imagen otra vez **virtual**, más cercana a la lente que el objeto, **derecha** y de **menor tamaño** que el objeto.

La construcción geométrica confirma, en ambos casos, los cálculos teóricos:





En ambas imágenes se emplean los rayos (i), que pasa por el centro de la lente sin desviarse; (ii), paralelo al eje y que se refracta de modo que su prolongación pasa por el foco imagen F_I y (iii), dirigido hacia el foco objeto F_O y que se desvía en la dirección del eje.

JUNIO 07

C3.– Una superficie plana separa dos medios de índices de refracción distintos n_1 y n_2. Un rayo de luz incide desde el medio de índice n_1. Razone si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) El ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de reflexión.

b) Los ángulos de incidencia y de refracción son siempre iguales.

c) El rayo incidente, el reflejado y el refractado están en el mismo plano.

d) Si $n_1 > n_2$ se produce reflexión total para cualquier ángulo de incidencia.

Véase la teoría. También **JUNIO 00 C4**, **JUNIO 01 C4**, **SEPTIEMBRE 04 C3**, entre otros.

Sol.– a) Falso; b) Falso; c) Cierto; d) Falso

JUNIO 07

A2.– Una lente convergente forma, de un objeto real, una imagen también real, invertida y aumentada 4 veces. Al desplazar el objeto 3 cm hacia la lente, la imagen que se obtiene es virtual, derecha y con el mismo aumento en valor absoluto. Determine:

a) La distancia focal imagen y la potencia de la lente.
b) Las distancias del objeto a la lente en los dos casos citados.
c) Las respectivas distancias imagen.
d) Las construcciones geométricas correspondientes.

a) En la posición inicial, s_1, el objeto de tamaño y forma una imagen invertida y cuatro veces mayor: si y_1' es el tamaño de la imagen, entonces nos están diciendo que $y_1' = -4y$ (el signo – es preciso por ser imagen invertida). Apelando a la fórmula para el aumento lateral,

$$\frac{y_1'}{y} = \frac{s_1'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad -4 = \frac{s_1'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad s_1' = -4s_1 \qquad (1)$$

tenemos la relación entre las distancias objeto s_1 e imagen s_1': nótese que son de signo contrario, así que, siendo $s_1 < 0$, parece claro que $s_1' > 0$ y, por tanto, la imagen aparece a la derecha de la lente, donde debe ser real.

Si desplazamos el objeto 3 cm hacia la lente, pasa a tener una distancia objeto $\quad s_2 = s_1 + 3 \quad (2)$

igualdad en la que debe tenerse presente que s_1 y s_2 son cantidades negativas, y que s_2 debe ser menor en valor absoluto, pues el objeto está ahora más cerca de la lente. Como nos dicen que ahora la imagen es derecha y cuatro veces mayor que el objeto, entendemos que deber ser $y_2' = 4y$, donde y_2' es el tamaño de la nueva imagen. De nuevo la fórmula del aumento lateral para comprobar que

$$\frac{y_2'}{y} = \frac{s_2'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{s_2'}{s_2} \quad \Rightarrow \quad s_2' = 4s_2 \qquad (3)$$

Nótese que ahora s_2' es negativa, igual que s_2, de modo que la nueva imagen se forma a la izquierda de la lente, donde debe hacerlo con las prolongaciones de los rayos difractados por la lente; por eso la imagen es ahora virtual.

A continuación podemos emplear la ecuación de las lentes delgadas en ambos casos, teniendo en consideración los resultados de (1), (2) y (3):

Para la 1ª imagen $$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-4s_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{4s_1} = \frac{1}{f'} \qquad (4)$$

Para la 2ª imagen $$\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4s_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{4s_2} = -\frac{3}{4(s_1+3)} = \frac{1}{f'} \qquad (5)$$

De estas dos igualdades, ya que el segundo miembro es el mismo, podemos obtener:

$$-\frac{5}{4s_1} = -\frac{3}{4(s_1+3)} \quad \Rightarrow \quad 5(s_1+3) = 3s_1 \quad \Rightarrow \quad s_1 = -7{,}5 \text{ cm}$$

y, llevando este valor a (4), la distancia focal: $$-\frac{5}{4s_1} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{-30} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = \mathbf{6\ cm}$$

e inmediatamente la potencia de la lente: $$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0{,}06\text{ m}} = \mathbf{+16{,}67\ dioptrías}$$

b) Ya conocemos la primera de las distancias objeto, $\quad s_1 = \mathbf{-7{,}5\ cm}$

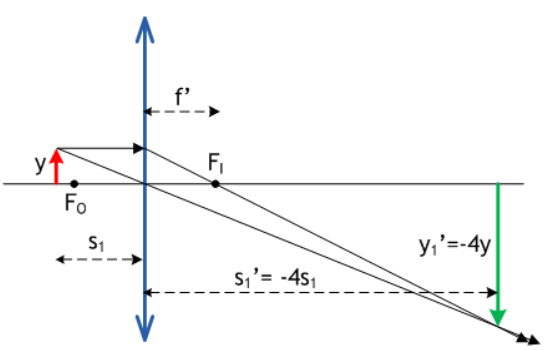
y la otra se obtiene de inmediato de (2): $\quad s_2 = s_1 + 3 = -7{,}5+3 = \mathbf{-4{,}5\ cm}$

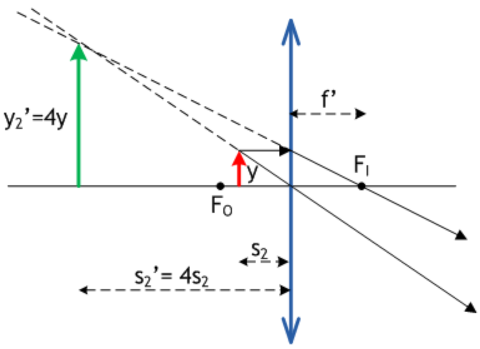
c) Conocidas las distancias objeto, las distancias imagen se obtienen de (1) y de (3):

de (1) $$s_1' = -4s_1 \quad \Rightarrow \quad s_1' = -4(-7{,}5) = \mathbf{30\ cm}$$

de (3) $$s_2' = 4s_2 = 4(s_1+3) \quad \Rightarrow \quad s_2' = 4(-4{,}5) = \mathbf{-18\ cm}$$

d) y quedan finalmente las construcciones geométricas correspondientes a ambos casos:





SEPTIEMBRE 07

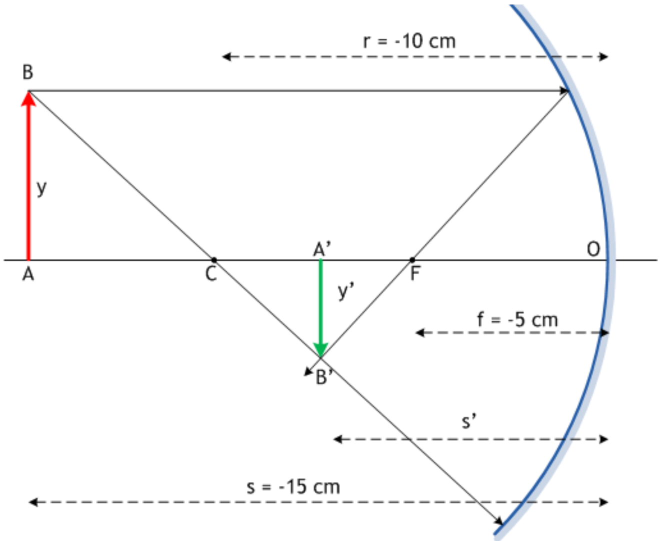
C3.– Una lente convergente tiene una distancia focal de 20 cm. Calcule la posición y aumento de la imagen que produce dicha lente para un objeto que se encuentra delante de ella a las siguientes distancias: a) 50 cm; b) 15 cm. Realice el trazado de rayos en ambos casos.

Sol.– a) 33,33 cm detrás de la lente; real, invertida y de menor tamaño, en proporción 2/3;
b) 60 cm delante de la lente; virtual, derecha y cuatro veces mayor.

SEPTIEMBRE 07

B1.– Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de 10 cm.

a) **Determine la posición y el tamaño de la imagen de un objeto de 5 cm de altura que se encuentra frente al mismo, a la distancia de 15 cm. ¿Cómo es la imagen obtenida? Efectúe la construcción geométrica de dicha imagen.**
b) **Un segundo objeto de 1 cm de altura se sitúa delante del espejo, de manera que su imagen es del mismo tipo y tiene el mismo tamaño que la imagen del objeto anterior. Determine la posición que tiene el segundo objeto respecto al espejo.**



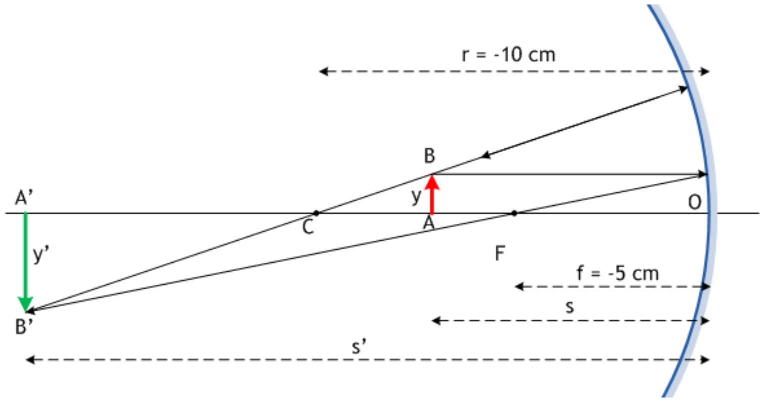
a) Esto es una sencilla construcción de la imagen en un espejo cóncavo, cuando el objeto está más allá del centro de curvatura del espejo. La construcción geométrica muestra dos rayos típicos que salen de B, se reflejan de acuerdo con las reglas bien conocidas y se encuentran en B'. La imagen resulta **real**, **invertida** y de **menor tamaño**, como puede verse. Los cálculos son también sencillos: la distancia imagen se obtiene de

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{-15}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-5} \quad\Rightarrow\quad s'=\mathbf{-7{,}5\ cm}$$

es decir, en el punto medio entre el foco y el centro de curvatura del espejo. El tamaño de la imagen se sigue de

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{5}=-\frac{-7{,}5}{-15}=-\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad y'=\mathbf{-2{,}5\ cm}$$

y resulta la mitad del objeto.



b) El segundo objeto ha de tener, pues, imagen **real**, **invertida** y su tamaño ha de ser –2,5 cm. Estas condiciones nos permiten hallar una condición que han de cumplir s y s':

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{-2{,}5}{1}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad s'=\frac{5}{2}s$$

que, llevada a la ecuación de los espejos esféricos, implica que

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s}+\frac{1}{\frac{5}{2}s}=\frac{1}{-5} \quad\Rightarrow\quad s=\mathbf{-7\ cm}$$

el objeto debe ser colocado 7 cm delante del espejo, entre el foco y el centro del mismo. Además, tenemos de inmediato la distancia imagen:

$$s'=\frac{5}{2}s=-\frac{35}{2}\text{ cm}=-17{,}5\text{ cm}$$

MODELO 2008

C3.– a) ¿Puede un espejo cóncavo producir una imagen virtual, derecha y menor que el objeto?
b) ¿Puede una lente convergente producir una imagen real, invertida y mayor que el objeto?
Justifique la respuesta en cada caso mediante un diagrama de rayos.

Véase la teoría

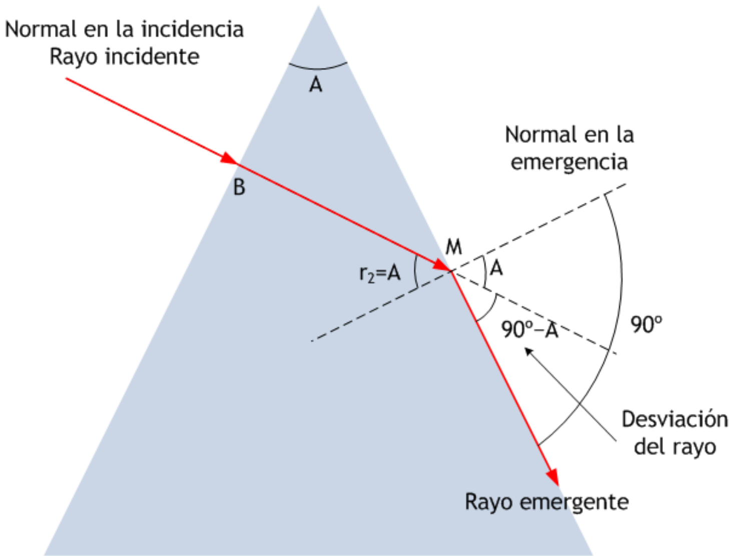
A2.– Se construye un prisma óptico de ángulo A con un vidrio de índice de refracción n = $\sqrt{2}$. Sabiendo que el rayo que incide perpendicularmente en la primera cara lateral del prisma tiene un ángulo de emergencia de 90º en la segunda cara lateral y que el prisma está inmerso en el aire, determine:

a) El ángulo A del prisma.

b) El valor del ángulo de desviación mínima.

Dibuje la marcha del rayo en ambos casos.

Un problema interesante, por poco usual. La trayectoria del rayo que nos proponen es extrema, en el sentido de que en la emergencia, donde puede existir **reflexión total**, estamos justo en el límite de ésta. Dicho de otro modo, el ángulo de incidencia en la segunda refracción, al salir del vidrio al aire, es el **ángulo límite**. Además, el rayo incidente llega en la dirección de la normal en el punto de incidencia, de modo que el ángulo de incidencia en esta primera refracción, del aire al vidrio, es $i_1 = 0$.



Todas estas circunstancias, y otras de interés, se pueden ver en la figura, que muestra la marcha del rayo:

1) Incide normalmente en la cara izquierda del prisma, en B. No se desvía, como sabemos, así que recorre el interior del prisma, entre B y M, sin cambio de dirección.

2) En M se produce la refracción del vidrio al aire. Observando la figura, puede verse que las dos normales, dibujadas en línea de puntos, se cortan en M, y forman un ángulo A, el del prisma. Pues bien, el ángulo de incidencia del rayo en M es también igual a A (opuestos por el vértice). El ángulo de emergencia es de 90°, como se nos ha dicho: el rayo emerge **tangente a la cara del prisma**. Nótese también que la desviación del rayo es 90°–A, por simple observación de la figura.

a) Aplicando entonces la ley de Snell a esta segunda refracción, nos queda:

$$\text{n.sen A} = 1.\text{sen } 90^\circ = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen A} = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

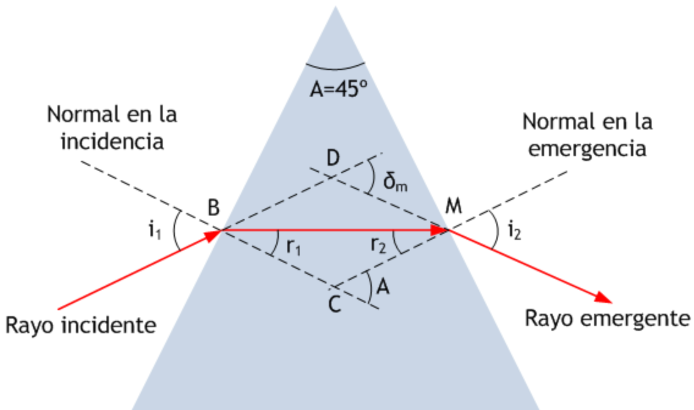
de donde se sigue inmediatamente que A = **45º = π/4 rad**. Esto responde a la primera cuestión.

b) Para la segunda, hemos de considerar un rayo de trayectoria diferente. Como sabemos, la desviación mínima δ_m al atravesar un prisma se consigue cuando el camino del rayo dentro del prisma es paralelo a su base o, con más propiedad, simétrico con respecto a las caras del prisma. Dicho aún de otro modo, BM tiene que ser horizontal.

La figura muestra, entonces, cómo tienen que ir las cosas ahora. El supuesto de desviación mínima es un caso particularmente sencillo, porque se cumplen las igualdades

$i_1 = i_2$ (ángulos de incidencia y emergencia iguales)

$r_1 = r_2$ (camino del rayo simétrico en el prisma)



así que la figura tiene una simetría total izquierda-derecha. Además, la observación de la figura permite hallar con facilidad r_1, puesto que

$$A = 45^\circ = r_1 + r_2 = 2r_1 \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = 22{,}5^\circ$$

Y, aplicando la ley de Snell en la refracción que sucede en B (o en M, da igual), tenemos

$$1.\text{sen } i_1 = \text{n.sen } r_1 = \sqrt{2}\ .\ \text{sen } 22{,}5^\circ$$

es decir, $\quad \text{sen } i_1 = 0{,}541 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 32{,}77^\circ$

Recordando ahora la expresión para la desviación, en este caso mínima, del rayo, tenemos

$$\delta_m = i_1 + i_2 - 45^\circ = 2i_1 - 45^\circ = \mathbf{20{,}53^\circ = 0{,}36\ rad}$$

JUNIO 08

C3.– Una lámina de vidrio (índice de refracción n = 1,52) de caras planas y paralelas y espesor d se encuentra entre el aire y el agua. Un rayo de luz monocromática de frecuencia 5.10^{14} Hz incide desde el agua en la lámina. Determine:

a) Las longitudes de onda del rayo en el agua y en el vidrio.

b) El ángulo de incidencia en la primera cara de la lámina a partir del cual se produce reflexión total interna en la segunda cara.

Datos: Índice de refracción del agua, n_{agua} = 1,33; Velocidad de la luz en el vacío, c = 3.10^8 m/s

a) La frecuencia de la luz permanece invariable cuando cambia de medio; no así su velocidad de propagación y su longitud de onda, que se adaptan para cumplir

$$v = \lambda\nu \qquad (1)$$

donde v es la velocidad de propagación en el medio y λ la consiguiente longitud de onda. Los índices de refracción que cita el enunciado se refieren a la luz de la frecuencia indicada, 5.10^4 Hz. Es fácil conocer la velocidad de propagación en el agua y en el vidrio, a partir de los índices de refracción:

$$\text{Agua:} \qquad n_{agua} = 1{,}33 = \frac{c}{v_{agua}} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{v_{agua}} \quad \Rightarrow \quad v_{agua} = \frac{3.10^8}{1{,}33} = 2{,}26.10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Vidrio:} \qquad n_{vidrio} = 1{,}52 = \frac{c}{v_{vidrio}} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{v_{vidrio}} \quad \Rightarrow \quad v_{vidrio} = \frac{3.10^8}{1{,}52} = 1{,}97.10^8 \text{ m/s}$$

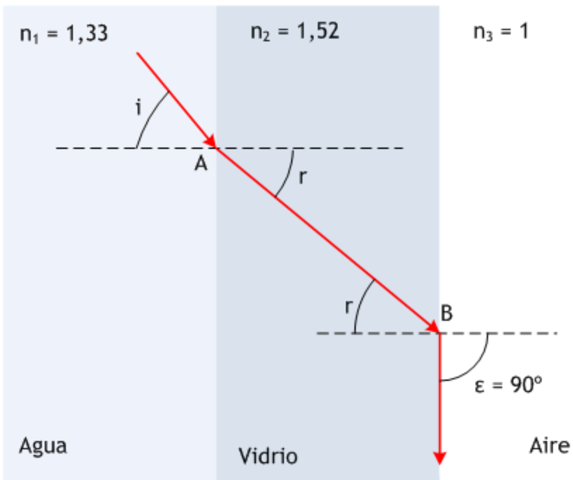
y ahora usaremos (1) para hallar las longitudes de onda:

$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}}{\nu} = \frac{2{,}26.10^8 \text{ ms}^{-1}}{5.10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4{,}51.10^{-7} \text{ m} = \mathbf{451\ nm}$$

$$\lambda_{vidrio} = \frac{v_{vidrio}}{\nu} = \frac{1{,}97.10^8 \text{ ms}^{-1}}{5.10^{14} \text{ s}^{-1}} = 3{,}95.10^{-7} \text{ m} = \mathbf{395\ nm}$$

mientras que en el vacío (esencialmente, en el aire), como es fácil de comprobar, la longitud de onda correspondiente a esa frecuencia es 600 nm.

b) Esta cuestión incide en la discusión de la marcha de los rayos dentro de la lámina. En la figura puede verse cómo debería ser la incidencia en la primera cara de la lámina, cuando la luz pasa del agua al vidrio, para estar en el comienzo de la reflexión total interna en la segunda cara, cuando la luz va a salir al aire.



En la primera refracción la luz pasa de un medio con índice de refracción más bajo, n_1 = 1,33, a otro con índice refractivo más alto, n_2 = 1,52; por lo tanto, **se acerca a la normal**, tal como muestra la figura: el ángulo r es menor que i. El rayo refractado recorre la distancia AB dentro de la lámina e incide en B con el mismo ángulo r, por razones obvias.

Ahora hemos de imponer la condición mínima de reflexión total interna en esta cara; para ello, el ángulo de emergencia debiera ser ε = 90°, de modo que r sería en realidad el **ángulo límite** del vidrio al aire.

Sólo resta aplicar la ley de Snell en las dos caras de la lámina, en los términos siguientes:

Primera cara: n_1.sen i = n_2.sen r

Segunda cara: n_2.sen r = n_3.sen ε

lo que implica, evidentemente

$$n_1 \operatorname{sen} i = n_3 \operatorname{sen} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1{,}33 \text{ sen } i = 1 \text{ sen } 90° \quad \Rightarrow \quad \text{sen } i = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}7519 \quad \Rightarrow \quad i = \mathbf{48°45'12"}$$

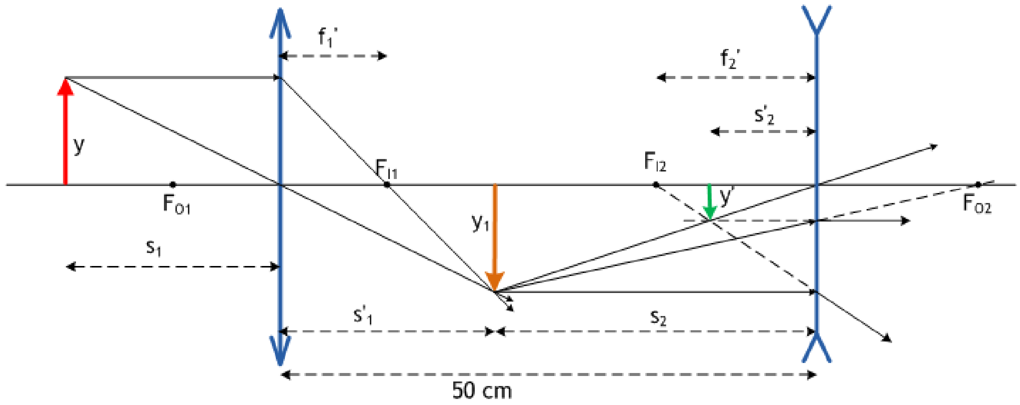
A partir de este ángulo, para valores i ≥ 48°45'12", no existirá emergencia del vidrio al aire, produciéndose reflexión total en la segunda cara de la lámina de vidrio.

JUNIO 08

B1.– Un sistema óptico está formado por dos lentes: la primera es convergente y con distancia focal de 10 cm; la segunda, situada a 50 cm de distancia de la primera, es divergente y con 15 cm de distancia focal. Un objeto de tamaño 5 cm se coloca a una distancia de 20 cm delante de la lente convergente.

a) Obtenga gráficamente mediante el trazado de rayos la imagen que produce el sistema óptico.
b) Calcule la posición de la imagen producida por la primera lente.
c) Calcule la posición de la imagen producida por el sistema óptico.
d) ¿Cuál es el tamaño y la naturaleza de la imagen final formada por el sistema óptico?

a) La figura recoge la formación de las imágenes en ambas lentes; como siempre en estos casos la imagen en la primera lente actúa como objeto en la segunda, para formar en ésta la imagen producida por el sistema óptico. Como es habitual, se emplean rayos que pasan por los centros de las lentes sin desviarse, o que discurren paralelos al eje y se desvían para pasar por el correspondiente foco imagen, o que pasan por el foco objeto correspondiente y se desvían paralelamente al eje del sistema.



b) La posición de la imagen en la primera lente se sigue de la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s_1'}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f_1'} \Rightarrow \frac{1}{s_1'}-\frac{1}{-20}=\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{s_1'}=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20} \Rightarrow s_1'=\mathbf{20\ cm}$$

de acuerdo con lo que puede observarse en la figura. Se trata de una imagen **real**, **invertida** y **del mismo tamaño** que el objeto, como es fácil de comprobar:

$$\frac{y_1}{y}=\frac{s_1'}{s_1} \Rightarrow \frac{y_1}{y}=\frac{20}{-20} \Rightarrow y_1=-y=\mathbf{-5\ cm}$$

c) Ahora debemos aplicar de nuevo la ley de las lentes, esta vez sobre la segunda lente, de carácter divergente. La distancia objeto es s_2 = −30 cm, pues la posición del objeto, imagen de la primera lente, es de 30 cm a la izquierda de la segunda lente. Además, la distancia focal de esta lente es f_2' = −15 cm, de acuerdo con los datos. La ecuación se escribe:

$$\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f_2'} \Rightarrow \frac{1}{s_2'}-\frac{1}{-30}=\frac{1}{-15} \Rightarrow \frac{1}{s_2'}=-\frac{1}{15}-\frac{1}{30}=-\frac{3}{30} \Rightarrow \mathbf{s_2'=-10\ cm}$$

de modo que la imagen aparece a la **izquierda** de la lente, lo que implica que es **virtual**, ya que debe formarse con las prolongaciones de los rayos que se refractan en la segunda lente.

d) Su tamaño resulta

$$\frac{y'}{y_1}=\frac{s_2'}{s_2} \Rightarrow \frac{y'}{-5}=\frac{-10}{-30} \Rightarrow y'=\mathbf{-\frac{5}{3}\ cm=-2{,}67\ cm}$$

que concuerda con la figura. Concluimos que es **virtual**, como ya hemos dicho, **invertida** respecto del objeto y de **menor tamaño** que el mismo.

SEPTIEMBRE 08

C4.– Un microscopio consta de dos lentes convergentes (objetivo y ocular).

a) Explique el papel que desempeña cada lente.

b) Realice un diagrama de rayos que describa el funcionamiento de un microscopio.

Véase la teoría

MODELO 09

C3.– a) Si un objeto se sitúa a una distancia de 2 cm delante de una lente convergente o delante de un espejo cóncavo, ambos de distancia focal 5 cm en valor absoluto, ¿cómo están relacionados los aumentos laterales y las posiciones de las imágenes que la lente y el espejo producen de dicho objeto?

b) Realice el trazado de rayos en ambos casos.

Sol.– a) Ambas imágenes son del mismo tamaño, 5/3 mayor que el tamaño objeto; ambas son virtuales y aparecen a la misma distancia de la lente y del espejo, 3,33 cm, delante de la lente y detrás del espejo.

MODELO 09

B2.– Sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas de 3 cm de espesor y situada en el aire incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de incidencia de 35°. La velocidad de propagación del rayo en la lámina es 2/3 c, siendo c la velocidad de la luz en el vacío.

a) Determine el índice de refracción de la lámina.

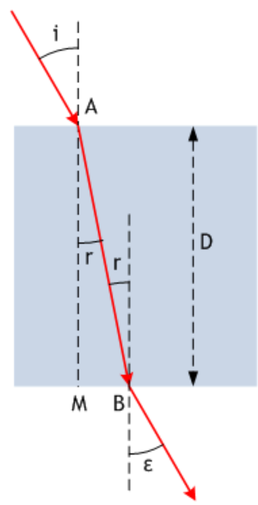
b) Compruebe que el rayo emergerá de la lámina y determine el ángulo de emergencia.

c) Dibuje la marcha del rayo a través de la lámina.

d) Calcule la distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina.

a) Inmediato, ya que conocemos la velocidad de propagación de la luz en el medio. El índice de refracción sería

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\frac{2}{3}c} = \frac{3}{2} = \mathbf{1{,}5}$$



b,c) El rayo emergerá de la lámina con ángulo de emergencia igual al de incidencia en la primera cara, como sucede siempre en una lámina de caras planoparalelas. La marcha del rayo, recogida en la figura, muestra cómo se refracta en la primera cara, acercándose a la normal puesto que pasa a un medio más refringente. El ángulo de incidencia en la segunda cara es igual al de refracción en la primera, por razones geométricas obvias. La aplicación de la ley de Snell a ambas refracciones demuestra la igualdad entre los ángulos de incidencia i y emergencia ε:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{primera cara:} & 1 \cdot \text{sen } 35° = n \cdot \text{sen } r \\ \text{segunda cara:} & n \cdot \text{sen } r = 1 \cdot \text{sen } \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{sen } 35° = \text{sen } \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \mathbf{35°}$$

d) Podemos obtener la distancia AB, recorrido del rayo dentro de la lámina, haciendo unos sencillos cálculos en el triángulo AMB. Empezamos por hallar el ángulo r con la ley de Snell en A:

$$1 \cdot \text{sen } 35° = n \cdot \text{sen } r \quad \Rightarrow \quad \text{sen } r = \frac{\text{sen } 35°}{1{,}5} = 0{,}3824 \quad \Rightarrow \quad r = 22°28'53''$$

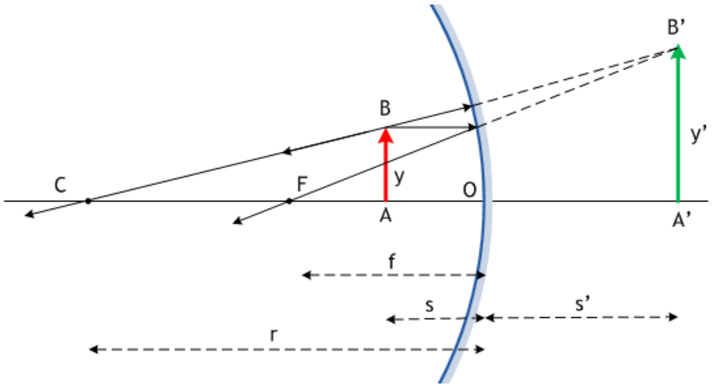
y ahora,
$$\cos r = \frac{AM}{AB} = \frac{D}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{D}{\cos r} = \frac{3 \text{ cm}}{\cos 22°28'53''} = \mathbf{3{,}25 \text{ cm}}$$

JUNIO 09

C3.– a) Explique la posibilidad de obtener una imagen derecha y mayor que el objeto mediante un espejo cóncavo, realizando un esquema con el trazado de rayos. Indique si la imagen es real o virtual.

b) ¿Dónde habría que colocar un objeto frente a un espejo cóncavo de 30 cm de radio para que la imagen sea derecha y de doble tamaño que el objeto?

a) Debemos saber que un espejo cóncavo forma una imagen virtual, derecha y de mayor tamaño cuando el objeto está colocado dentro de la distancia focal del espejo; en cualquier otra situación, la imagen resulta real, invertida y puede tener tamaño mayor o menor que el objeto, dependiendo de la distancia al espejo. Es claro, pues, que el objeto debe colocarse **dentro de la distancia focal** para cumplir las condiciones del enunciado. La figura muestra la marcha de los rayos que forman la imagen descrita.



b) La ecuación de formación de imágenes en un espejo esférico, junto a la fórmula del aumento lateral, responden a esta cuestión:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad ; \quad \frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}$$

donde f = −15 cm, la mitad del radio de curvatura y el signo de acuerdo al criterio de signos habitual. Naturalmente, suponemos s < 0, el objeto a la izquierda del espejo; como la imagen debe ser derecha y su tamaño doble que el objeto, será preciso que y' = 2y. Llevando esto al aumento lateral:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{2y}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad s'=-2s$$

Por tanto, $$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s}+\frac{1}{-2s}=\frac{1}{-15} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2s}=-\frac{1}{15} \quad\Rightarrow\quad s=\mathbf{-7{,}5\ cm}$$

y tenemos la respuesta: el objeto debe situarse a mitad de camino entre el foco y el espejo.

SEPTIEMBRE 09

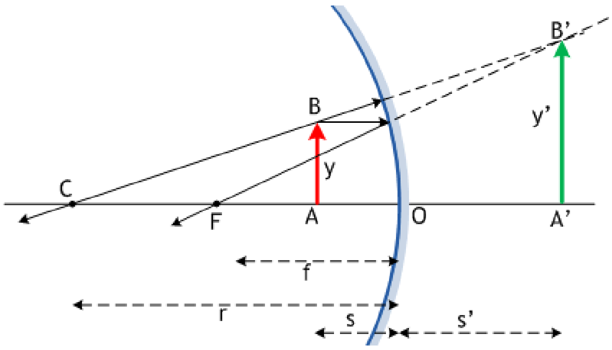
C3.– La distancia focal de un espejo esférico es de 20 cm en valor absoluto. Si se coloca un objeto delante del espejo a una distancia de 10 cm de él, determine la posición y la naturaleza de la imagen formada en los dos casos siguientes:

a) El espejo es cóncavo.

b) El espejo es convexo.

Efectúe la construcción geométrica de la imagen en ambos casos.

a) La distancia focal es negativa, f = −20 cm. También lo es la distancia objeto, s = −10 cm, y su valor muestra que el objeto está dentro de la distancia focal. Su imagen será, por tanto, **virtual**, **derecha,** y de **mayor tamaño** que el objeto. Los cálculos son sencillos:

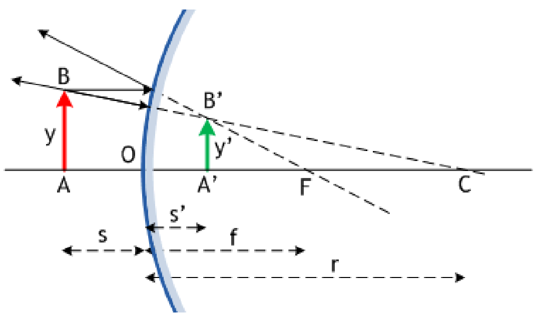


$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{-10}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-20} \quad\Rightarrow\quad s'=\mathbf{20\ cm}$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y}=-\frac{20}{-10} \quad\Rightarrow\quad y'=\mathbf{2y}$$

y concluyen lo que adelantábamos: la imagen se forma a la derecha del espejo — **virtual**, por tanto —, es **derecha** y de **doble tamaño** que el objeto.

b) Ahora la distancia focal es positiva, f = 20 cm; la distancia objeto sigue siendo s = −10 cm. Un espejo convexo forma imagen **virtual**, **derecha** y de **menor tamaño**. Los cálculos son simples e inmediatos:



$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{-10}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{20} \quad\Rightarrow\quad s'=\frac{20}{3}\mathbf{=6{,}67\ cm}$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y}=-\frac{20/3}{-10} \quad\Rightarrow\quad y'=\mathbf{\frac{2}{3}y}$$

y de nuevo acuerdan con lo previsto: la imagen se forma a la derecha, **virtual;** es **derecha** y de **menor tamaño**.

SEPTIEMBRE 09

A1.– Un rayo de luz roja que se propaga en el aire tiene una longitud de onda de 650 nm. Al incidir sobre la superficie de separación de un medio trasparente y penetrar en él, la longitud de onda pasa a ser de 500 nm.

a) Calcule la frecuencia de la luz roja.
b) Calcule el índice de refracción del medio transparente para la luz roja.
c) Si el rayo incide desde el aire con un ángulo de 30° respecto a la normal, ¿cuál será el ángulo de refracción en el medio transparente?
d) Si el rayo se propagara por el medio transparente en dirección hacia el aire, ¿cuál sería el ángulo de incidencia a partir del cual no se produce refracción?.

Datos: **Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3.10^8$ m/s**

a) Podemos hallar la frecuencia de la luz roja a partir de su longitud de onda en el vacío, empleando

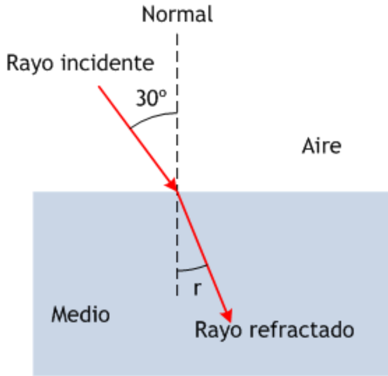
$$c = \lambda \nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{650.10^{-9} \text{ m}} = \mathbf{4{,}62.10^{14} \text{ Hz}}$$

y debemos tener presente que esta frecuencia es característica de la luz roja, independientemente del medio en que se propague. Cuando la luz cambia de medio, cambia su velocidad de propagación y también su longitud de onda, pero se mantiene invariable su frecuencia.

b) En el medio transparente, por tanto, la velocidad de la luz roja será v < c. Conociendo su longitud de onda en este medio, λ' = 500 nm, podemos hallar la velocidad de propagación:

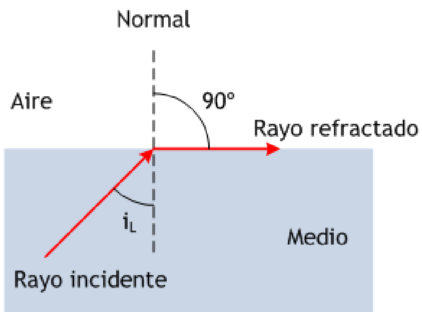
$$v = \lambda' \nu \quad \Rightarrow \quad v = 500.10^{-9} \text{ m} \,.\, 4{,}62.10^{14} \text{ Hz} = 2{,}31.10^8 \text{ m/s}$$

e inmediatamente el índice de refracción: $n_{medio} = \dfrac{c}{v} = \dfrac{3.10^8 \text{ m/s}}{2{,}31.10^8 \text{ m/s}} = \mathbf{1{,}3}$



c) Esta vez se trata de una sencilla aplicación de la ley de Snell, tomando el índice de refracción del aire igual a 1, como si se tratase del vacío. Quedaría

$$1.\text{sen } 30° = n_{medio}.\text{sen } r \quad \Rightarrow \quad \text{sen } r = \frac{0{,}5}{1{,}3} = 0{,}3846 \quad \Rightarrow \quad r = \mathbf{22°37'12''}$$



d) Finalmente, imaginamos el rayo propagándose desde el medio transparente hacia el aire: como se pasa de un medio más refringente (n_{medio} = 1,3) a otro menos refringente (n_{aire} = 1), puede darse una situación de reflexión total si el rayo incide sobre la superficie de separación con un ángulo mayor o igual que el ángulo límite i_L correspondiente. Para ese valor i_L el ángulo de refracción es, como sabemos, 90° y, de acuerdo con la ley de Snell, pondríamos

$$n_{medio} \,.\, \text{sen } i_L = 1 \,.\, \text{sen } 90° = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } i_L = \frac{1}{1{,}3} = 0{,}7692$$

es decir, i_L = **50°17'6"**

MODELO 10

OPCIÓN A C2.– Se dispone de una lente convergente de distancia focal 20 cm. Determine la posición y la naturaleza de la imagen formada por la lente si el objeto está situado, delante de ella, a las siguientes distancias: a) 50 cm; b) 15 cm. Realice el trazado de rayos en ambos casos.

Sol.– a) 33,33 cm detrás de la lente; real, invertida y 2/3 menor que el objeto;
b) 60 cm delante de la lente; virtual, derecha y cuatro veces mayor que el objeto.