PROYECTO SABER HACER

5

Ondas. El sonido

SANTILLANA

Ondas. El sonido

5

PARA COMENZAR

- **Describe el movimiento que sufren las partículas del líquido en la imagen de esta página. ¿En qué dirección se mueven? ¿En qué dirección se desplaza la onda?**

  Las partículas se mueven arriba y abajo, vibrando alrededor de una posición de equilibrio. La onda se desplaza desde el foco que origina la perturbación hacia el exterior.

- **¿Qué ocurre cuando dos ondas se encuentran?**

  Cuando dos ondas se encuentran sus efectos se suman. Esto puede hacer que se forme una onda de mayor amplitud, si están en fase, o una onda de menor amplitud, o incluso que las ondas se anulen si están en oposición de fase.

ACTIVIDADES

1. **Una masa unida a un resorte describe un movimiento definido por la ecuación:**

$$\boldsymbol{x(t) = 5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)}, \textbf{ unidades SI}$$

Determina la frecuencia del movimiento y la posición, velocidad y aceleración de la masa en el instante $t = 5$ s.

En el instante pedido la ecuación de la onda nos indica la posición de la masa unida al resorte. Podemos comparar esta ecuación con la ecuación general, para deducir la frecuencia, por ejemplo. La ecuación general de un movimiento oscilatorio es la siguiente:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) = A \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \phi_0\right)$$

Comparando con la ecuación del enunciado, podemos deducir la frecuencia:

$$\cancel{2} \cdot \cancel{t} = \frac{\cancel{2}\pi}{T} \cdot \cancel{t} \rightarrow 1 = \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{1}{\pi}\text{s}^{-1} = 0{,}32 \text{ Hz}$$

Para calcular la posición a los 5 s sustituimos en la ecuación del movimiento dada:

$$x(5 \text{ s}) = 5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot 5 \text{ s} + \frac{\pi}{6}\right) = -4{,}45 \text{ m}$$

Ahora para calcular la velocidad derivamos la ecuación de la posición con respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left[5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{dt} = 5 \cdot \cos\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) \cdot 2 = 10 \cdot \cos\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Ahora sustituimos el instante pedido en el enunciado:

$$v(5 \text{ s}) = 10 \cdot \cos\left(2 \cdot 5 \text{ s} + \frac{\pi}{6}\right) = -4{,}55 \text{ m/s}$$

Para la aceleración derivamos la ecuación de la velocidad:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\left[10 \cdot \cos\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{dt} = -10 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) \cdot 2 = -20 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Y sustituimos el instante señalado en el enunciado:

$$a(5 \text{ s}) = -20 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot 5 \text{ s} + \frac{\pi}{6}\right) = 17{,}81 \text{ m/s}^2$$

2. Por una cuerda se propaga una onda cuya ecuación matemática es:

$$\boldsymbol{y(x,\,t) = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left[2\pi(2 \cdot t - 5 \cdot x)\right] \text{ (SI)}}$$

a) Determina la amplitud, la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la velocidad de propagación.

b) Representa gráficamente la posición frente al tiempo en el intervalo $t = 0$ y $t = 1$ s para un punto situado en $x = 0$.

a) Escribimos la forma general de la ecuación de una onda:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \theta_0\right]$$

Ahora podemos comparar la ecuación del enunciado con esta ecuación. La amplitud es:

$$A = 0{,}05 \text{ m}$$

La longitud de onda es:

$$5 \cdot \cancel{x} = \frac{\cancel{x}}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ m}$$

El periodo es:

$$2 \cdot \cancel{t} = \frac{\cancel{t}}{T} \rightarrow T = \frac{1}{2} \text{ s} = 0{,}5 \text{ s}$$

La frecuencia es la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5 \text{ s}} = 2 \text{ Hz}$$

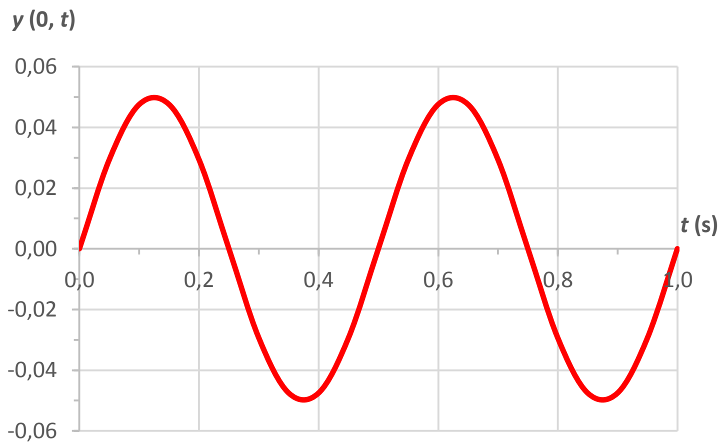
La velocidad de propagación de la onda se calcula a partir de la longitud de onda y del periodo:

$$v_\text{p} = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}2 \text{ m}}{0{,}5 \text{ s}} = 0{,}4 \text{ m/s}$$

b) Para un punto situado en $x = 0$ la ecuación queda así:

$$y(0,t) = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot (2 \cdot t - 5 \cdot 0)\right] = 0{,}05 \cdot \text{sen}(4\pi \cdot t)$$

La representación gráfica de esta onda entre los instantes pedidos sería algo así:



3. Por una cuerda se propaga la onda transversal: $y\ (x,\,t) = 0{,}4 \cdot \cos\ [10\pi\ (2t - x)]$ (SI).

a) Calcula la elongación de un punto de la cuerda que en el instante $t = 0{,}25$ s se encuentra en $x = 10$ cm.

b) Halla la velocidad transversal de dicho punto en el mismo instante $t = 0{,}25$ s.

a) Sustituimos en la ecuación de la onda las condiciones dadas:

$$y(x,t)=0{,}4\cdot\cos\left[10\pi\cdot(2\cdot t-x)\right]=$$
$$=0{,}4\cdot\cos\left[10\pi\cdot(2\cdot 0{,}25-0{,}10)\right]=0{,}4\cdot\cos(4\pi)=0{,}4\text{ m}$$

b) Para calcular la velocidad derivamos la ecuación de la onda para un punto situado a 0,10 m con respecto al tiempo:

$$v(t)=\frac{dy(x=0{,}10,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}4\cdot\cos\left[10\pi\cdot(2\cdot t-0{,}10)\right]\right]}{dt}=$$
$$=-0{,}4\cdot\text{sen}\left[10\pi\cdot(2\cdot t-0{,}10)\right]\cdot 20\pi=-8\pi\cdot\text{sen}\left[10\pi\cdot(2\cdot t-0{,}10)\right]$$

Ahora sustituimos el instante indicado:

$$v(0{,}25\text{ s})=-8\pi\cdot\text{sen}\left[10\pi\cdot(2\cdot 0{,}25-0{,}10)\right]=0$$

Es decir, en ese instante dicho punto se encuentra con la máxima amplitud, a la máxima distancia de la posición de equilibrio; por tanto, con velocidad nula.

4. Una onda transversal de 5 cm de amplitud y 25 Hz de frecuencia se propaga con una velocidad de 15 m/s por una cuerda tensa hacia la derecha.

a) Calcula la ecuación matemática de la onda.

b) Determina el primer instante en el que la velocidad de vibración de una partícula situada a 1 m del foco es máxima.

a) La ecuación matemática de la onda tiene esta forma:

$$y(x,t)=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]$$

Usamos el signo menos porque nos dicen que la onda se propaga hacia la derecha.

A partir de la frecuencia podemos deducir el periodo:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{25\text{ Hz}}=0{,}04\text{ s}$$

Y como sabemos cuál es la velocidad de propagación, podemos obtener la longitud de onda:

$$v_p=\frac{\lambda}{T}\rightarrow\lambda=v_p\cdot T=15\text{ m/s}\cdot 0{,}04\text{ s}=0{,}6\text{ m}$$

Sustituyendo valores en la ecuación general de la onda:

$$y(x,t)=0{,}05\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)+\theta_0\right]\text{ (SI)}$$

Dejamos el resultado en función de θ_0, desfase inicial, porque no nos facilitan datos para calcularlo.

b) Primero calculamos la velocidad de la onda derivando la posición. Suponemos que el desfase inicial es cero, ya que no nos lo indican:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}05\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)\right]\right]}{dt}=$$
$$=0{,}05\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)\right]\cdot\frac{2\pi}{0{,}04}=2{,}5\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)\right]$$

La vibración es máxima cuando la expresión que hay dentro de la función trigonométrica coseno es 2π, pues entonces el coseno adopta el valor máximo: 1. Por tanto, como la partícula está a 1 m del foco ($x=1$ m):

$$\cancel{2\pi}\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)=\cancel{2\pi}\rightarrow\frac{t}{0{,}04}=1+\frac{1}{0{,}6}\rightarrow t=\left(1+\frac{1}{0{,}6}\right)\cdot 0{,}04=0{,}10\widehat{6}\text{ s}$$

5. En una gran multinacional están instalando por el edificio un sistema de alarmas de acuerdo con el correspondiente plan de seguridad laboral. Se coloca un receptor a 100 m de distancia para medir la intensidad del sonido de una de las alarmas y recibe una intensidad de 0,10 W/m².

a) ¿Cuál sería la intensidad que recibiría si se colocara a 1000 m de distancia?

b) Calcula la máxima distancia a la que se pueden colocar las alarmas para que sean escuchadas por todo el personal del edificio si la menor intensidad del sonido que puede apreciar el oído humano es $I_{lim} = 1\ \mu\text{W/m}^2$.

a) El sonido es una onda tridimensional. Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por tanto:

$$\frac{\cancel{\text{cte.}} \cdot \sqrt{I_1}}{\cancel{\text{cte.}} \cdot \sqrt{I_2}} = \frac{r_2}{r_1} \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \rightarrow I_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot I_1 = \left(\frac{100\ \text{m}}{1000\ \text{m}}\right)^2 \cdot 0{,}10\ \text{W/m}^2 = 10^{-3}\ \text{W/m}^2$$

b) De nuevo empleamos la expresión anterior, pero esta vez despejamos la distancia r_2 a la que la intensidad es la menor intensidad del sonido que puede apreciar el oído humano:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \cdot r_1 = \sqrt{\frac{0{,}10\ \text{W/m}^2}{1 \cdot 10^{-6}\ \text{W/m}^2}} \cdot 100\ \text{m} = 31\,622{,}8\ \text{m}$$

6. Al dejar caer una piedra en la superficie de agua en calma de un estanque obtenemos una onda cuya amplitud, a 1 cm del foco, es de 25 cm. Suponiendo que no hubiese rozamiento entre las partículas del medio, ¿cuál será la amplitud cuando la onda haya avanzado 2 m desde el origen?

La onda que se propaga por el agua es bidimensional. Entonces es válida la siguiente relación entre las amplitudes y las distancias:

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \cdot A_1 = \sqrt{\frac{1\ \text{cm}}{200\ \text{cm}}} \cdot 25\ \text{cm} = 1{,}77\ \text{cm}$$

7. Un muro de 60 cm tiene un espesor de semiabsorción de 80 cm. Si al muro llega una onda de 5 W/m²:

a) ¿Qué intensidad llega a la segunda cara del muro?

b) ¿Qué espesor debería tener para que la intensidad del sonido se reduzca en un 80 %?

a) La ecuación que relaciona la intensidad en ambos puntos del muro es:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Donde β es el coeficiente de absorción del medio.

El espesor de semiabsorción, $D_{1/2}$, es el espesor que debe tener el material para que la perturbación reduzca su intensidad a la mitad. Por tanto, podemos calcular β:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x} \rightarrow \frac{\cancel{I_0}}{2} = \cancel{I_0} \cdot e^{-\beta \cdot D_{1/2}} \rightarrow 2 = e^{\beta \cdot D_{1/2}} \rightarrow \ln 2 = \beta \cdot D_{1/2} \rightarrow \beta = \frac{\ln 2}{D_{1/2}} = \frac{\ln 2}{80\ \text{cm}}$$

Sustituimos los valores que indica el enunciado en la expresión de la intensidad anterior para ver cómo se atenúa la onda cuya intensidad inicial es 5 W/m²:

$$I = 5\ \text{W/m}^2 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{80\,\text{cm}} \cdot 60\,\text{cm}} = 2{,}97\ \text{W/m}^2$$

b) Para que la intensidad se reduzca un 80 % la intensidad final tiene que ser un 20 % de la inicial:

$$0{,}2 \cdot \cancel{I_0} = \cancel{I_0} \cdot e^{-\beta \cdot x} \rightarrow \ln 0{,}2 = -\beta \cdot x \rightarrow x = -\frac{\ln 0{,}2}{\beta} = -\frac{\ln 0{,}2}{\frac{\ln 2}{80\ \text{cm}}} = 185{,}75\ \text{cm}$$

8. Una onda viaja por un medio en el que su velocidad de propagación es v_p. En un punto de su trayectoria cambia el medio de propagación y duplica su velocidad. Determina cuál es la amplitud, la frecuencia y la longitud de onda de la onda en el segundo medio. Justifica las respuestas.

Si la velocidad de propagación se duplica, teniendo en cuenta la expresión para esta velocidad podemos escribir:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \rightarrow 2 = \frac{v_{p2}}{v_{p1}} = \frac{\frac{\lambda_2}{T_2}}{\frac{\lambda_1}{T_1}}$$

La frecuencia de la onda no varía. Por tanto, el periodo tampoco varía. Así:

$$2 = \frac{v_{p2}}{v_{p1}} = \frac{\frac{\lambda_2}{\cancel{T}}}{\frac{\lambda_1}{\cancel{T}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \rightarrow \lambda_2 = 2 \cdot \lambda_1$$

La longitud de onda también se duplica.

La amplitud también será la misma.

9. Una onda sonora se transmite en el aire a 300 Hz de frecuencia. Si hacemos que la onda se transmita en el agua, ¿cuál será la nueva frecuencia de la onda de sonido en el agua?

Dato: $v_{\text{p sonido en agua}} = 4{,}4 \cdot v_{\text{p sonido en aire}}$.

La frecuencia de la onda no varía, puesto que la energía que transmite la onda es la misma en el agua y en el aire. Por tanto, la frecuencia de la onda de sonido en el agua es de 300 Hz.

10. Tenemos dos fuentes de ondas armónicas transversales que generan ondas que se propagan a una velocidad de 16 m/s a lo largo del eje OX con amplitud 2 cm y frecuencia 1 Hz. La primera fuente está situada en $x = 0$ m y la segunda en $x = 2$ m. Si la segunda emite con una diferencia de fase de $+\pi/4$ rad con respecto a la primera:

a) Escribe la ecuación de ondas resultante de la acción de ambas fuentes.

b) Si solo tenemos la fuente situada en $x = 0$ m, determina la posición de un punto en el que el desplazamiento transversal sea $y = 0$ m en el instante $t = 2$ s.

a) La onda resultante será el resultado de la interferencia de ambas ondas. Por tanto:

$$y = y_A + y_B = A_A \cdot \text{sen}[\omega_A \cdot t - k_A \cdot x_A + \theta_{0A}] + A_B \cdot \text{sen}[\omega_B \cdot t - k_B \cdot x_B + \theta_{0B}]$$

Donde:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ ;\ k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La amplitud y la frecuencia es la misma para ambas ondas. Por tanto, ambas ondas tendrán también igual periodo, porque es la inversa de la frecuencia, e igual longitud de ondas, pues se propagan a la misma velocidad y con la misma frecuencia, $v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$, con lo cual podemos escribir:

$$y = y_A + y_B = A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot x_A + \theta_{0A}] + A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot x_B + \theta_{0B}]$$

Escribimos la siguiente relación trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos:

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \text{sen}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Entonces podemos escribir:

$$y = A \cdot \left[\text{sen}\left[\omega \cdot t - k \cdot x_A + \theta_{0A}\right] + \text{sen}\left[\omega \cdot t - k \cdot x_B + \theta_{0B}\right]\right] =$$

$$= A \cdot \text{sen}\frac{(\omega \cdot t - k \cdot x_A + \theta_{0A}) + (\omega \cdot t - k \cdot x_B + \theta_{0B})}{2} \cdot \cos\frac{(\cancel{\omega \cdot t} - k \cdot x_A + \theta_{0A}) - (\cancel{\omega \cdot t} - k \cdot x_B + \theta_{0B})}{2} =$$

$$= A \cdot \cos\frac{k \cdot (x_B - x_A) + \overbrace{(\theta_{0A} - \theta_{0B})}^{\pi/4}}{2} \cdot \text{sen}\frac{\left[2 \cdot \omega \cdot t - k \cdot (x_A + x_B) + (\theta_{0A} + \theta_{0B})\right]}{2} =$$

$$= \underbrace{A \cdot \cos\left[k \cdot \frac{(x_B - x_A)}{2} + \frac{\pi}{8}\right]}_{A'} \cdot \text{sen}\left[\omega \cdot t - k \cdot \frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right] = A' \cdot \text{sen}\left[\omega \cdot t - k \cdot \frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right]$$

Donde:

$$\theta = \frac{\theta_{0A} + \theta_{0B}}{2}$$

Calculamos la longitud de onda:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v_p \cdot T = \frac{v_p}{f} = \frac{16 \text{ m/s}}{1 \text{ Hz}} = 16 \text{ m}$$

Por tanto, la ecuación de la onda resultante sería:

$$y = A' \cdot \text{sen}\left[\omega \cdot t - k \cdot \frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right] = A' \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot f \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right]$$

Sustituyendo los valores conocidos obtenemos:

$$y = A' \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot 1 \text{ Hz} \cdot t - \frac{2\pi}{16 \text{ m}} \cdot \frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right] = A' \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot t - \frac{\pi \cdot (x_A + x_B)}{16} + \theta\right]$$

b) En este caso, si suponemos un desfase inicial nulo para esa onda:

$$y = y_A = A_A \cdot \text{sen}\left[\omega_A \cdot t - k_A \cdot x_A\right]$$

Sustituyendo valores:

$$y = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot f \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x_A\right] = 0{,}02 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot 1 \cdot 2 - \frac{2\pi}{16} \cdot x_A\right]$$

Si $y = 0$:

$$0 = 0{,}02 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot 1 \cdot 2 - \frac{2\pi}{16} \cdot x_A\right] \rightarrow \text{sen}\left[4\pi - \frac{2\pi}{16} \cdot x_A\right] = 0 \rightarrow 4\pi - \frac{2\pi}{16} \cdot x_A = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4\cancel{\pi} = \frac{\cancel{\pi}}{8} \cdot x_A \rightarrow x_A = 4 \cdot 8 = 32 \text{ m}$$

11. Observa la ecuación matemática de una onda estacionaria expresada en unidades del sistema internacional:

$$\boldsymbol{y\ (x, t) = 0{,}4 \cdot \text{sen}\ (2\pi \cdot x/12) \cdot \cos\ (2\pi \cdot t/3)}$$

a) Calcula la amplitud, la longitud de onda y el periodo de las dos ondas que se superponen.

b) Halla la distancia entre dos vientres consecutivos.

c) Calcula la velocidad transversal máxima del punto situado en $x = 3$ m.

a) Si se trata de una onda estacionaria, las dos ondas que se superponen tienen la misma amplitud, longitud de onda y periodo. La ecuación general de las ondas estacionarias es:

$$y(x,t) = 2 \cdot A \cdot \text{sen}(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Comparando podemos deducir la amplitud:

$$2 \cdot A = 0{,}4 \rightarrow A = \frac{0{,}4}{2} = 0{,}2 \text{ m}$$

La longitud de onda será:

$$k\cdot \cancel{x}=\frac{2\pi\cdot \cancel{x}}{12}\rightarrow\frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}=\frac{\cancel{2\pi}}{12}\rightarrow\lambda=12\text{ m}$$

Y el periodo se deduce de manera análoga:

$$\omega\cdot \cancel{t}=\frac{2\pi\cdot \cancel{t}}{3}\rightarrow\frac{\cancel{2\pi}}{T}=\frac{\cancel{2\pi}}{3}\rightarrow T=3\text{ s}$$

b) La distancia entre dos vientres consecutivos se deduce a partir de la posición en que se forman los vientres:

$$x=(2\cdot n+1)\cdot\frac{\lambda}{4}\rightarrow x_{n+1}-x_n=\left[2\cdot(n+1)+1\right]\cdot\frac{\lambda}{4}-(2\cdot n+1)\cdot\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{4}\cdot\left[\cancel{2\cdot n}+2+1-(\cancel{2\cdot n}+1)\right]=$$

$$=2\cdot\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{2}=\frac{12\text{ m}}{2}\rightarrow x_{n+1}-x_n=6\text{ m}$$

c) La velocidad en función del tiempo se calcula a partir de la derivada de la posición.

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}4\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot x}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot t}{3}\right)\right]}{dt}=-0{,}4\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot x}{12}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot t}{3}\right)\cdot\frac{2\pi}{3}$$

Para un punto situado en $x=3$ m la velocidad será máxima cuando la función trigonométrica en t alcance su valor máximo, es decir, 1:

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot t}{3}\right)=1\rightarrow\frac{2\cancel{\pi}\cdot t}{3}=\frac{\cancel{\pi}}{2}\rightarrow t=\frac{3}{4}\rightarrow t=0{,}75\text{ s}$$

Por tanto:

$$v(t)_{\text{máx.}}=0{,}4\cdot\underbrace{\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot 3}{12}\right)}_{1}\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{3}=0{,}84\text{ m/s}$$

12. Indica cuáles de las siguientes funciones pueden representar una onda estacionaria y cuáles no. Justifica las respuestas.

a) $y=\text{sen}(k\cdot x)\cdot\cos(\omega\cdot x)$

b) $y=\text{sen}(A\cdot x)\cdot\cos(B\cdot t)$

c) $y=\cos(200\cdot t)\cdot\text{sen}(\pi\cdot x)$

d) $y=2\pi\cdot\text{sen}(A\cdot x)+\cos(B\cdot x)$

e) $y=\text{sen}(A\cdot x/\lambda)\cdot\cos(B\cdot t/T)$

f) $y=\text{sen}(x/\lambda+t/T)$

g) $y=\text{sen}(x/B-t/AB)$

a) No. No aparece el término correspondiente al tiempo dentro del coseno.

b) Sí.

c) Sí.

d) No. No aparece el término correspondiente al tiempo dentro del coseno.

e) Sí.

f) No. No tiene la función coseno con la variable tiempo.

g) No. No tiene la función coseno con la variable tiempo.

13. Se coloca un altavoz sobre un vehículo un día soleado con una temperatura del aire de unos 25 °C aproximadamente. El altavoz emite una nota de frecuencia 260,50 Hz.

a) Calcula la velocidad con la que se mueve el vehículo si un micrófono colocado en el suelo del trayecto seguido por el vehículo capta una nota de 285,50 Hz.

b) Determina si el coche se aleja o se aproxima del micrófono. Justifica la respuesta.

c) ¿Cómo es el sonido que recibe el micrófono, más grave o más agudo que el emitido por el altavoz?

Dato: $v_{\text{sonido, 25 °C}}=$ **346,4 m/s.**

a) En este caso se produce el efecto Doppler, por lo que la frecuencia captada por un observador en reposo no es la misma que la que emite el altavoz en movimiento. La frecuencia percibida por el receptor, f_R, es mayor que la emitida, f.

La relación entre ambas frecuencias permite calcular la velocidad del vehículo, v_F:

$$f_R = f \cdot \frac{v}{v+v_F} \rightarrow \frac{f_R}{f} = \frac{v}{v+v_F} \rightarrow \frac{v+v_F}{v} = \frac{f}{f_R} \rightarrow v+v_F = \frac{f}{f_R} \cdot v \rightarrow$$

$$\rightarrow v_F = v \cdot \left(\frac{f}{f_R} - 1\right) = 346{,}4 \text{ m/s} \cdot \left(\frac{260{,}50 \text{ Hz}}{285{,}50 \text{ Hz}} - 1\right) = -30{,}33 \text{ m/s}$$

El signo menos indica que el vehículo se acerca al micrófono.

b) El coche se acerca al micrófono, puesto que la frecuencia recibida es mayor que la frecuencia emitida. Es como si las ondas se fueran adelantando a la llegada al micrófono debido al movimiento relativo entre foco y receptor.

c) El sonido recibido en el micrófono es más agudo que el emitido por el foco sonoro.

14. La membrana de un altavoz vibra con una frecuencia de 250 Hz. En las condiciones del experimento, la velocidad del sonido es 340 m/s.

a) Calcula la longitud de onda, la pulsación y el periodo del sonido producido por el altavoz.

b) Indica qué ocurre con la frecuencia y la longitud de onda registradas por un observador en cada uno de los casos siguientes.

b1) El altavoz se acerca rápidamente al observador.

b2) El sonido llega al observador después de haberse reflejado en una pared.

a) La velocidad de propagación de la onda relaciona la longitud de onda y el periodo:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{250 \text{ Hz}} = 1{,}36 \text{ m}$$

La pulsación ω es:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 250 \text{ Hz} = 500\pi \text{ rad/s} = 1570{,}8 \text{ rad/s}$$

El periodo es la inversa de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{250 \text{ Hz}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

b) b1) Si el altavoz se acerca rápidamente al observador la frecuencia percibida será bastante mayor que la frecuencia de emisión, es decir, mayor de 250 Hz. La longitud de onda será, por consiguiente, menor, puesto que la velocidad de la onda sonora no varía.

b2) Si el sonido llega al observador tras reflejarse en una pared la frecuencia percibida será la misma que la de emisión. Y también la longitud de onda, que tampoco variará y coincidirá con la longitud de onda de la onda emitida.

15. Si pasas temporadas en la costa, te habrás dado cuenta de que de noche puedes oír sonidos más lejanos que de día. Explica este hecho teniendo en cuenta que, de día, el Sol calienta el suelo y la brisa del mar refresca nuestras caras, mientras que de noche llega una brisa cálida al tiempo que se refresca el suelo.

(Pista: ten en cuenta la refracción de las ondas de sonido al moverse por un medio no homogéneo).

De día el aire más caliente se sitúa cerca del suelo, mientras que de noche está situado cerca del suelo el aire más frío. Tal y como se observa en las ilustraciones, el sonido viaja más rápido por la noche porque el aire sobre el suelo está más caliente. Al viajar con mayor velocidad, puede llegar hasta distancias mayores sin atenuarse por debajo del umbral de audición del oído humano. Además, la refracción de las ondas sonoras en el aire hace que estas se curven hacia el suelo, evitando que se pierden hacia alturas más elevadas donde no podemos oírlas.

16. Se forma una onda estacionaria en una cuerda de una guitarra de 100 cm de longitud. Sabiendo que posee un armónico fundamental con una frecuencia de 300 Hz.

a) Dibuja el primer armónico.

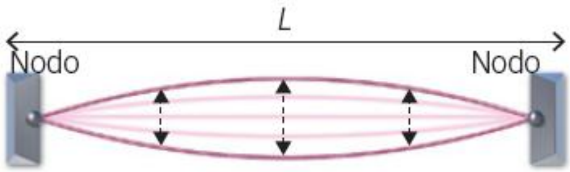
b) Calcula la longitud de onda del armónico fundamental.

c) Determina el valor de la velocidad con la que se propaga la onda.

d) Dibuja el tercer armónico.

e) Calcula el valor de la longitud de onda del tercer armónico.

a) El primer armónico es:



b) La longitud de onda del armónico fundamental es:

$$\lambda_1 = 2 \cdot L = 2 \cdot 1\ \text{m} = 2\ \text{m}$$

c) La velocidad de propagación de la onda puede calcularse a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_p = \frac{\lambda_1}{T_1} = \lambda_1 \cdot f_1 = 2\ \text{m} \cdot 300\ \text{Hz} = 600\ \text{m/s}$$

d) El tercer armónico es así:

e) La longitud de onda del tercer armónico es:

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot L}{3} = \frac{2 \cdot 1\ \text{m}}{3} = 0,\widehat{6}\ \text{m}$$

17. Tenemos dos tubos sonoros, ambos con la misma longitud, $L = 1{,}36$ m. Uno de los tubos tiene sus dos extremos abiertos a la atmósfera y el otro tubo sonoro tiene un extremo abierto a la atmósfera y el otro extremo cerrado.

a) Calcula, para cada uno de los tubos, la menor frecuencia de excitación sonora para que en el interior se formen ondas estacionarias.

b) Calcula la longitud de onda correspondiente a las frecuencias anteriores para cada caso.

c) Representa la onda estacionaria que se forma dentro de cada tubo. Señala la posición de los nodos y los vientres que se forman.

Dato: $v_{p\ \text{sonido en el aire}} = 340$ m/s.

a) Para el tubo con los dos extremos abiertos la menor frecuencia de excitación sonora se obtiene sustituyendo valores en la expresión correspondiente a este caso:

$$f_0 = \frac{v_p}{2 \cdot L} = \frac{340\ \text{m/s}}{2 \cdot 1{,}36\ \text{m}} = 125\ \text{Hz}$$

Para el tubo con un extremo abierto la expresión varía, sustituyendo los valores en la nueva expresión obtenemos:

$$f_0 = \frac{v_p}{4 \cdot L} = \frac{340 \text{ m/s}}{4 \cdot 1{,}36 \text{ m}} = 62{,}5 \text{ Hz}$$

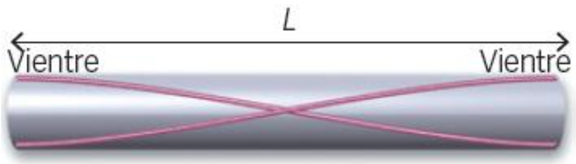
b) Para el tubo con los dos extremos abiertos:

$$v_p = \lambda_0 \cdot f_0 \rightarrow \lambda_0 = \frac{v_p}{f_0} = \frac{340 \text{ m/s}}{125 \text{ Hz}} = 2{,}72 \text{ m}$$

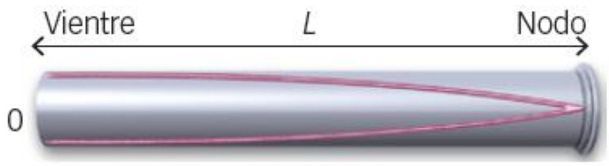
Para el tubo con un extremo abierto:

$$v_p = \lambda_0 \cdot f_0 \rightarrow \lambda_0 = \frac{v_p}{f_0} = \frac{340 \text{ m/s}}{62{,}5 \text{ Hz}} = 5{,}44 \text{ m}$$

c) Para el tubo con los dos extremos abiertos:



Para el tubo con un extremo abierto:



18. **La explosión de un fuego artificial genera, a nivel del suelo, una intensidad sonora de 75 dB. Si se coloca el doble de pólvora, se duplicará la energía generada. ¿Cuál será el nuevo nivel de intensidad sonora que se detectará a nivel del suelo?**

Si la energía generada es el doble, la intensidad emitida también será el doble. Para la explosión inicial:

$$\beta_1 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0}$$

Para la segunda explosión, más energética:

$$\beta_2 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0}$$

Si restamos ambas ecuaciones:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \cdot \left(\log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0} \right) \rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{\frac{I_2}{\cancel{I_0}}}{\frac{I_1}{\cancel{I_0}}} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \cdot \log \frac{2 \cdot \cancel{I_1}}{\cancel{I_1}} = 3 \text{ dB} \rightarrow \beta_2 = \beta_1 + 3 \text{ dB} = 75 \text{ dB} + 3 \text{ dB} = 78 \text{ dB}$$

19. Un receptor está situado a 1 m de distancia de un altavoz que emite una potencia de 40 W por igual en todas direcciones. Si se aleja hasta 5 m, ¿cuánto variará la intensidad de la onda sonora que percibe?

La intensidad de la onda recibida disminuye a medida que nos alejamos del foco. La potencia emitida nos dicen que es la misma, por tanto:

$$I = \frac{P}{S} \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{\cancel{P_2}}{S_2}}{\frac{\cancel{P_1}}{S_1}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\cancel{4\pi} \cdot r_1^2}{\cancel{4\pi} \cdot r_2^2} \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{1\text{ m}}{5\text{ m}}\right)^2 = 0{,}04$$

La intensidad de la onda disminuirá al alejarse 4 m de la posición inicial. De forma que el valor de la intensidad de la onda a 5 m del foco será igual al 4 % de la intensidad a 1 m del foco.

20. Escribe la ecuación de una onda transversal de amplitud 2 cm y frecuencia 10 Hz, que se propaga en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 40 m/s.

La ecuación general de una onda tiene esta forma, si se propaga en el sentido negativo del eje X:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \theta_0\right]$$

Podemos calcular la longitud de onda a partir de la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{40\text{ m/s}}{10\text{ Hz}} = 4\text{ m}$$

Y sustituyendo los valores que nos dan, y suponiendo un desfase inicial nulo:

$$y(x,t) = 0{,}02 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(10 \cdot t + \frac{x}{4}\right)\right] \text{ (SI)}$$

21. Un día de viento las olas del mar tienen 2,5 m de altura y rompen cada 12 s. Sabiendo que la velocidad de las olas es de 30 km/h, determina la ecuación de onda de las olas.

La ecuación general de una onda tiene esta forma:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \theta_0\right]$$

Podemos calcular la longitud de onda a partir del periodo y la velocidad de propagación de la onda:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v_p \cdot T = 30\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} \cdot 12\text{ s} = 100\text{ m}$$

Y sustituyendo los valores que nos dan, y suponiendo que el desfase inicial es nulo porque no nos dan los datos necesarios para su cálculo:

$$y(x,t) = 2{,}5 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{12} \pm \frac{x}{100}\right)\right] \text{ (SI)}$$

22. Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje X. La onda tiene un periodo de 0,5 s, una longitud de onda de 3,2 m y una amplitud de 0,8 m. Si en el instante inicial $t = 0$, la elongación del punto $x = 0$ es nula y su velocidad transversal es positiva:

a) Determina la ecuación de la onda y representa la onda en el instante inicial entre $x = 0$ y $x = 3{,}2$ m.

b) Calcula la velocidad de propagación de la onda.

c) Escribe la velocidad transversal del punto situado en $x = 3{,}2$ m en función del tiempo.

a) La ecuación general de la onda que se propaga en el sentido positivo del eje X es la siguiente:

$$y(x,t)=A\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]$$

Con los datos que da el enunciado podemos escribir:

$$y(x,t)=0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]\quad \text{(SI)}$$

Como en el instante inicial la elongación del punto con $x=0$ es nula y su velocidad es positiva, podemos calcular, a partir de estas condiciones iniciales, el desfase:

$$0=0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{0}{0{,}5}-\frac{0}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]\rightarrow \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{0}{0{,}5}-\frac{0}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]=0\rightarrow$$

$$\rightarrow 2\pi\cdot\left(\frac{0}{0{,}5}-\frac{0}{3{,}2}\right)+\theta_0=0+k\cdot\pi\rightarrow\theta_0=0+k\cdot\pi$$

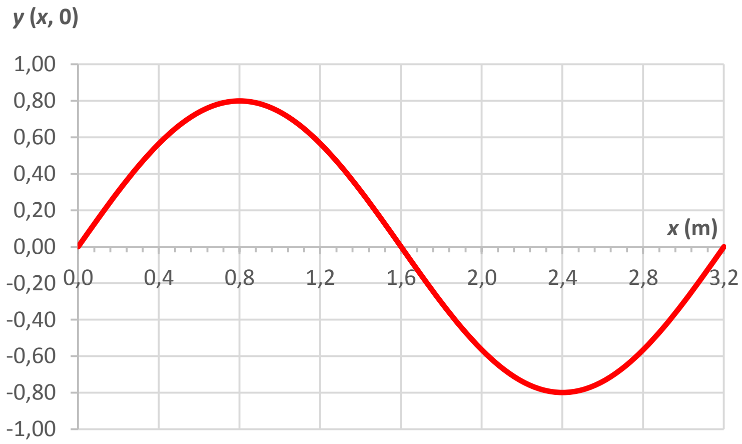
Por tanto, la ecuación de ondas será:

$$y(x,t)=0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)\right]$$

Para el instante inicial, $t=0$:

$$y(x,t)=0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{0}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)\right]=0{,}8\cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi\cdot x}{3{,}2}\right]=0{,}8\cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi\cdot x}{3{,}2}\right]=0{,}8\cdot \text{sen}\left[\frac{5\pi\cdot x}{8}\right]$$

La representación gráfica sería:



b) La velocidad de propagación viene dada por el cociente entre la longitud de onda y el periodo, sustituyendo valores obtenemos:

$$v_p=\frac{\lambda}{T}=\frac{3{,}2\text{ m}}{0{,}5\text{ s}}=6{,}4\text{ m/s}$$

c) La velocidad se calcula derivando la elongación:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]\right]}{dt}=0{,}8\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]\cdot\frac{2\pi}{0{,}5}=$$

$$=3{,}2\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]$$

Si en el instante inicial la elongación del punto con $x=0$ es nula y la velocidad es positiva, es porque el desfase inicial es 0 ($\cos 0=1$; $\cos\pi=-1$).

Particularizando para el punto situado a 3,2 m y sustituyendo el desfase inicial obtenemos:

$$v(t) = 3{,}2\pi \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}5} - \frac{3{,}2}{3{,}2}\right)\right] = 3{,}2\pi \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}5} - 1\right)\right] \quad \text{(SI)}$$

23. Una cuerda oscila con un MAS realizando 80 oscilaciones en 20 segundos, de 20 cm amplitud. La cuerda mide 8 m, y la perturbación tarda 0,5 s en ir de un extremo a otro. Si en el instante inicial el extremo de la cuerda está en su posición de equilibrio y la onda se desplaza en el sentido positivo del eje X:

a) Escribe la ecuación de la onda.

b) Calcula la distancia entre dos puntos consecutivos que se encuentren: en fase y en oposición de fase.

c) Calcula la velocidad de oscilación de un punto de la cuerda que se encuentre a 6 m del extremo, 6 s después de que se inicie la perturbación.

a) La ecuación general de una onda que avanza en el sentido positivo del eje X tiene esta forma:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \theta_0\right]$$

Si la onda realiza 80 oscilaciones en 20 s, aplicando la definición de la frecuencia obtenemos:

$$f = \frac{\text{N.º de oscilaciones}}{t} = \frac{80}{20\ \text{s}} = 4\ \text{Hz}$$

Por tanto, el periodo es:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{4\ \text{Hz}} = 0{,}25\ \text{s}$$

La velocidad de propagación de la onda también puede deducirse a partir de los datos del enunciado:

$$v_p = \frac{L_{\text{Cuerda}}}{t_{\text{Empleado}}} = \frac{8\ \text{m}}{0{,}5\ \text{s}} = 16\ \text{m/s}$$

Y entonces, por definición de la velocidad de propagación, podemos conocer la longitud de onda:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v_p \cdot T = 16\ \text{m/s} \cdot 0{,}25\ \text{s} = 4\ \text{m}$$

Ya tenemos todas las magnitudes necesarias para escribir la ecuación de la onda:

$$y(x,t) = 0{,}2 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}25} - \frac{x}{4}\right) + \theta_0\right] \quad \text{(SI)}$$

b) Si dos puntos consecutivos están en fase se cumple:

$$\theta_2 - \theta_1 = \left|2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}25} - \frac{x_2}{4}\right)\right| - \left|2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}25} - \frac{x_1}{4}\right)\right| = 2\pi$$

De aquí obtenemos el valor de la distancia entre los puntos:

$$\left|\left(\frac{t}{0{,}25} - \frac{x_2}{4}\right)\right| - \left|\left(\frac{t}{0{,}25} - \frac{x_1}{4}\right)\right| = 1 \rightarrow \left|\frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4}\right| = 1 \rightarrow |x_1 - x_2| = 4\ \text{m}$$

Si dos puntos consecutivos están en oposición de fase, se cumple:

$$\theta_2 - \theta_1 = \left|2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}25} - \frac{x_2}{4}\right)\right| - \left|2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}25} - \frac{x_1}{4}\right)\right| = \pi$$

En este caso, la distancia entre los puntos será:

$$\left|\left(\frac{t}{0{,}25} - \frac{x_2}{4}\right)\right| - \left|\left(\frac{t}{0{,}25} - \frac{x_1}{4}\right)\right| = \frac{1}{2} \rightarrow \left|\frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4}\right| = \frac{1}{2} \rightarrow |x_1 - x_2| = 2\ \text{m}$$

c) La velocidad de oscilación de un punto de la cuerda se calcula derivando la ecuación de la elongación de la onda:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}2\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x}{4}\right)+\theta_0\right]\right]}{dt}=$$
$$=0{,}2\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x}{4}\right)+\theta_0\right]\cdot\frac{2\pi}{0{,}25}=1{,}6\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x}{4}\right)+\theta_0\right]$$

Para el punto pedido en el enunciado:

$$v=1{,}6\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{6}{0{,}25}-\frac{6}{4}\right)\right]=1{,}6\pi\cdot\underbrace{\cos(45\pi)}_{-1}=-5{,}03\text{ m/s}$$

24. Se propaga por una cuerda una onda transversal sinusoidal en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 40 m/s, una frecuencia de 20 Hz, una amplitud de 10 cm y una fase inicial nula. Calcula:

a) La ecuación de la onda.

b) La velocidad con la que vibra en el instante $t=0{,}15$ s, en un punto de la cuerda $x=20$ cm.

c) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un determinado instante es $\pi/6$ rad.

a) La ecuación general de una onda que avanza en el sentido positivo del eje X tiene esta forma:

$$y(x,t)=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]$$

A partir de la frecuencia podemos determinar el periodo:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{20\text{ Hz}}=0{,}05\text{ s}$$

Podemos deducir fácilmente la longitud de onda, a partir de la definición de la velocidad de propagación:

$$v_p=\lambda\cdot f\rightarrow\lambda=\frac{v_p}{f}=\frac{40\text{ m/s}}{20\text{ Hz}}=2\text{ m}$$

Como nos dicen que la fase inicial es nula, la ecuación de la onda es:

$$y(x,t)=0{,}1\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x}{2}\right)\right]\text{ (SI)}$$

b) La velocidad de vibración se calcula derivando la ecuación de la onda:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}1\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x}{2}\right)\right]\right]}{dt}=$$
$$=0{,}1\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x}{2}\right)\right]\cdot\frac{2\pi}{0{,}05}=4\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x}{4}\right)\right]$$

Sustituyendo el instante y la posición indicados en el enunciado:

$$v=4\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{0{,}15}{0{,}05}-\frac{0{,}2}{2}\right)\right]=10{,}17\text{ m/s}$$

c) Si la diferencia de fase entre dos puntos es $\pi/6$:

$$\theta_2-\theta_1=\left|2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x_2}{2}\right)\right|-\left|2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x_1}{2}\right)\right|=\frac{\pi}{6}\rightarrow$$
$$\rightarrow\left|\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x_2}{2}\right)\right|-\left|\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x_1}{2}\right)\right|=\frac{1}{12}\rightarrow\left|\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right|=\frac{1}{12}\rightarrow|x_1-x_2|=\frac{2}{12}\text{ m}=0{,}1\widehat{6}\text{ m}$$

25. **Justifica si las siguientes afirmaciones referidas a la energía de un movimiento ondulatorio son verdaderas o falsas:**

a) **Es inversamente proporcional a la frecuencia de la onda.**

b) **Es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.**

a) Falsa. Es directamente proporcional.

b) Verdadera.

26. **Suponemos que se produce una onda armónica al lanzar una piedra a la superficie de un estanque. Su amplitud:**

a) **Disminuye con la distancia al foco.**

b) **Disminuye con la raíz cuadrada de la distancia al foco.**

c) **Disminuye con el cuadrado de la distancia al foco.**

Se trata de una onda bidimensional. Por tanto, la amplitud de la onda en un punto es inversamente proporcional a la raíz de la distancia al foco. Por tanto, la b).

27. **Supongamos que un altavoz produce una onda armónica en un espacio abierto. Su intensidad:**

a) **Disminuye con la distancia al foco.**

b) **Disminuye con la raíz cuadrada de la distancia al foco.**

c) **Disminuye con el cuadrado de la distancia al foco.**

El sonido es una onda tridimensional. Por tanto, la intensidad disminuye con la distancia al foco. Por tanto, la respuesta correcta es la a).

28. **Razona si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:**

«Las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia, igual longitud de onda y diferente amplitud que la onda incidente».

Falsa. La onda reflejada tiene la misma amplitud también que la onda incidente.

29. **¿Qué condición ha de cumplirse para que se produzca la difracción de una onda a través de una rendija?**

Que las dimensiones de la rendija sean del mismo orden de magnitud que la longitud de onda.

30. **Dos ondas en fase con la misma amplitud *A*, frecuencia *f* y longitud de onda λ se propagan a la misma velocidad v_p, interfiriendo en un punto P que está a una distancia λ m del foco de una de las ondas y a 3λ m del foco de la otra onda. Deduce la amplitud resultante en el punto P.**

La onda resultante será el resultado de la interferencia de ambas ondas. Por tanto:

$$y = y_A + y_B = A_A \cdot \text{sen}[\omega_A \cdot t - k_A \cdot x_A + \theta_{0A}] + A_B \cdot \text{sen}[\omega_B \cdot t - k_B \cdot x_B + \theta_{0B}]$$

La amplitud, la frecuencia y la longitud de onda es la misma para ambas ondas. Por tanto, ambas ondas tendrán también igual periodo, con lo cual podemos escribir:

$$y = y_A + y_B = A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot x_A + \theta_{0A}] + A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot x_B + \theta_{0B}]$$

En el punto P las distancias x_A y x_B son λ y 3λ, respectivamente. Suponemos un desfase inicial nulo. Entonces podemos escribir:

$$y = y_A + y_B = A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot \lambda] + A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot 3 \cdot \lambda]$$

Utilizando la siguiente relación trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos:

$$\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta=2\cdot\text{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Podemos escribir:

$$y=A\cdot\left[\text{sen}(\omega\cdot t-k\cdot\lambda)+\text{sen}(\omega\cdot t-k\cdot 3\cdot\lambda)\right]=$$

$$=A\cdot\text{sen}\frac{(\omega\cdot t-k\cdot\lambda)+(\omega\cdot t-k\cdot 3\cdot\lambda)}{2}\cdot\cos\frac{(\cancel{\omega\cdot t}-k\cdot\lambda)-(\cancel{\omega\cdot t}-k\cdot 3\cdot\lambda)}{2}=$$

$$=A\cdot\cos\left(\frac{\cancel{2}\cdot k\cdot\lambda}{\cancel{2}}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{\cancel{2}\cdot(\omega\cdot t-2\cdot k\cdot\lambda)}{\cancel{2}}\right)=\underbrace{A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{\cancel{\lambda}}\cdot\cancel{\lambda}\right)}_{A'=A}\cdot\text{sen}\left(\omega\cdot t-2\cdot\frac{2\pi}{\cancel{\lambda}}\cdot\cancel{\lambda}\right)$$

Como cos $(2\pi)=1$, la amplitud de la onda resultante, A', en el punto P es igual a la amplitud de las ondas que interfieren, A.

31. El oído humano es capaz de percibir sonidos cuyas frecuencias están comprendidas entre 20 Hz y 20 kHz. Calcula a qué longitudes de onda equivalen.

Dato: $v_{\text{p sonido en el aire}}=340$ m/s.

La velocidad del sonido nos permite relacionar las frecuencias y las longitudes de onda.

- $f_1=20\text{ Hz}$: $v_p=\lambda_1\cdot f_1\rightarrow\lambda_1=\frac{v_p}{f_1}=\frac{340\text{ m/s}}{20\text{ Hz}}=17\text{ m}$
- $f_2=20000\text{ Hz}$: $v_p=\lambda_2\cdot f_2\rightarrow\lambda_2=\frac{v_p}{f_2}=\frac{340\text{ m/s}}{20000\text{ Hz}}=0{,}017\text{ m}=1{,}7\text{ cm}$

32. Un tren se acerca hacia nosotros silbando. Explica cómo varía la frecuencia del sonido del silbido que recibimos respecto a la emitida por el tren.

Como el tren se acerca hacia nosotros, la frecuencia que percibimos será algo mayor que la frecuencia emitida por el tren. Es decir, un observador quieto percibirá un sonido más agudo que uno que vaya moviéndose en el tren.

33. Dentro de un tubo lleno de gas a 30 °C se propaga en el sentido positivo del eje X un sonido de 0,30 kHz.

a) Calcula la longitud de onda y escribe la ecuación de onda unidimensional suponiendo una amplitud A_0.

b) ¿A qué velocidad se propagaría el sonido si el gas se enfriase 17 °C?

Dato: $v_{\text{p sonido en el gas a 30 °C}}=350$ m/s.

a) La velocidad del sonido nos permite calcular la longitud de onda:

$$v_p=\lambda\cdot f\rightarrow\lambda=\frac{v_p}{f}=\frac{350\text{ m/s}}{0{,}30\,\cancel{\text{kHz}}\cdot\frac{1000\text{ Hz}}{1\,\cancel{\text{kHz}}}}=1{,}1\widehat{6}\text{ m}$$

El periodo es la inversa de la frecuencia:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{300\text{ Hz}}=3{,}\widehat{3}\cdot 10^{-3}$$

Entonces la ecuación de la onda se puede escribir así:

$$y(x,t)=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right]\rightarrow y(x,t)=A_0\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(300\cdot t-\frac{x}{1{,}1\widehat{6}}\right)\right]\text{ (SI)}$$

b) La velocidad del sonido en al aire varía con la temperatura de la siguiente manera:

$$v\,(\text{m/s})=331{,}4+0{,}6\cdot T\ (°\text{C})$$

Por tanto, a 13 °C:

$$v\,(\text{m/s}) = 331{,}4 + 0{,}6 \cdot 13 = 339{,}2 \text{ m/s}$$

34. Un altavoz emite sonido y se percibe con una sonoridad de 30 dB a una distancia *d* del mismo. Determina:

a) El factor en el que debe incrementarse la distancia al altavoz para que el sonido se perciba con 25 dB.

b) El factor en el que debe incrementarse la potencia para que a la distancia *d* el sonido se perciba con 35 dB.

Dato: umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}.

a) Escribimos la ecuación que liga el nivel de intensidad sonora con la intensidad del sonido. Para una distancia $d_1 = d$:

$$\beta_1 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0}$$

Para una distancia d_2:

$$\beta_2 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\beta_1 - \beta_2 = 10 \cdot \left(\log \frac{I_1}{I_0} - \log \frac{I_2}{I_0} \right) = 10 \cdot \log \frac{\frac{I_1}{I_0}}{\frac{I_2}{I_0}} = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_2} \rightarrow \frac{\beta_1 - \beta_2}{10} = \log \frac{I_1}{I_2} \rightarrow 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} = \frac{I_1}{I_2}$$

Ahora tenemos en cuenta que como el sonido es una onda tridimensional, la intensidad disminuye con la distancia. Por tanto:

$$10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} = \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \rightarrow r_2 = \sqrt{10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}}} \cdot r_1 = \sqrt{10^{\frac{30-25}{10}}} \cdot d = 1{,}78 \cdot d$$

Es decir, la distancia debe multiplicarse por 1,78.

b) Procedemos análogamente. Pero en este caso sabemos la relación entre la intensidad y la potencia de una onda tridimensional:

$$I = \frac{P}{S}$$

Es decir, la intensidad y la potencia son proporcionales, por lo que el factor pedido es el mismo para la potencia y para la intensidad. Usando la expresión obtenida en el apartado anterior:

$$10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} = \frac{I_1}{I_2} \rightarrow I_2 = \frac{I_1}{10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}}} = \frac{1}{10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}}} \cdot I_1 = \frac{1}{10^{\frac{30-35}{10}}} \cdot I_1 \rightarrow I_2 = 3{,}16 \cdot I_1$$

Este es el factor en el que debe incrementarse también la potencia de la onda:

$$P_2 = 3{,}16 \cdot P_1$$

35. En un partido de la Copa de Sudáfrica había mil aficionados soplando simultáneamente la vuvuzela. Suponemos que todos se encontraban a 200 m del centro del campo, y que cada uno de ellos producía un sonido de 233 Hz y 0,1 W de potencia. Calcula:

a) La longitud de onda del sonido.

b) La intensidad del sonido en el centro del campo producida por un aficionado.

c) El nivel de intensidad acústica total (por los mil aficionados) registrado en el centro del campo.

Datos: $I_0 = 10^{-12}$ W /m^2; $v_{\text{Sonido}} = 340$ m/s.

a) La longitud de onda puede calcularse a partir de la frecuencia y la velocidad del sonido.

$$v_p = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{340\ \text{m/s}}{233\ \text{Hz}} = 1{,}46\ \text{m}$$

b) La intensidad del sonido disminuye con la distancia. En una onda tridimensional como el sonido la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi \cdot r^2} = \frac{0{,}1\ \text{W}}{4\pi \cdot (200\ \text{m})^2} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ \text{W/m}^2$$

c) El nivel de intensidad acústica total se obtiene sumando las contribuciones de todos los aficionados. La potencia total será la suma de las potencias de cada aficionado. Entonces:

$$I_T = \frac{P_T}{S} = \frac{1000 \cdot 0{,}1\ \text{W}}{4\pi \cdot (200\ \text{m})^2} = 1{,}99 \cdot 10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

Y ahora podemos calcular el nivel de intensidad acústica:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I_T}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{1{,}99 \cdot 10^{-4}\ \text{W/m}^2}{10^{-12}\ \text{W/m}^2} = 83\ \text{dB}$$

36. Una onda transversal se propaga por una cuerda tensa fija por sus extremos con una velocidad de 80 m/s, y al reflejarse se forma el cuarto armónico de una onda estacionaria cuya ecuación es:

$$\boldsymbol{y = 0{,}12 \cdot \text{sen}\,(k \cdot x) \cdot \cos\,(\omega \cdot t)\ \text{(SI)}}$$

a) Si la longitud de la cuerda tensa es 8 m, calcula el número de ondas k, la frecuencia angular ω y la frecuencia de la onda.

b) Calcula la máxima elongación de un punto situado a 0,5 m de un extremo de la cuerda. ¿Cuál es la aceleración máxima que experimenta ese punto?

c) Calcula y explica brevemente qué frecuencia debería tener la onda transversal que se propaga por la cuerda a 80 m/s para que se formase el segundo armónico en lugar del cuarto.

a) La longitud de onda correspondiente al cuarto armónico se puede expresar en función de la longitud de la cuerda:

$$\lambda = \frac{2 \cdot L}{4} = \frac{2 \cdot 8\ \text{m}}{4} = 4\ \text{m}$$

El número de ondas es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4\ \text{m}} = \frac{\pi}{2}\ \text{m}^{-1}$$

La frecuencia se puede conocer, puesto que también sabemos cuál es la velocidad de propagación de la onda:

$$v_p = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{80\ \text{m/s}}{4\ \text{m}} = 20\ \text{Hz}$$

La frecuencia angular es:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 20\ \text{Hz} = 40\pi\ \text{rad/s}$$

b) Sustituyendo los valores obtenidos en el apartado anterior en la expresión de la onda estacionaria obtenemos:

$$y(x, t) = 0{,}12 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \cos(40\pi \cdot t)$$

La máxima elongación se produce cuando el coseno vale 1. Para un punto situado a una distancia de 0,5 m:

$$y_{\text{máx.}} = 0{,}12 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0{,}5\right) \cdot \underbrace{\cos(40\pi \cdot t)}_{1,\ \text{si}\ y_{\text{máx.}}} = 0{,}12 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = 0{,}12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8{,}49 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Derivamos la ecuación del enunciado con respecto al tiempo para obtener la expresión de la velocidad:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}12\cdot \text{sen }(k\cdot x)\cdot\cos(\omega\cdot t)\right]}{dt}=-0{,}12\cdot\text{sen }(k\cdot x)\cdot\omega\cdot\text{sen}(\omega\cdot t)$$

Derivamos de nuevo con respecto al tiempo para obtener el valor de la aceleración:

$$a(x,t)=\frac{dv(x,t)}{dt}=\frac{d\left[-0{,}12\cdot \text{sen }(k\cdot x)\cdot\omega\cdot\text{sen}(\omega\cdot t)\right]}{dt}=-0{,}12\cdot\text{sen }(k\cdot x)\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

La aceleración será máxima cuando la función coseno valga 1. Sustituyendo valores:

$$\left|a_{\text{máx.}}\right|=\left|-0{,}12\cdot\text{sen }(k\cdot x)\cdot\omega^2\right|=\left|-0{,}12\cdot\text{sen }\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}5\right)\cdot(40\pi)^2\right|=0{,}12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(40\pi)^2=1339{,}9\text{ m/s}^2$$

c) Para que se formase el segundo armónico, la longitud de onda debería ser:

$$\lambda_2=\frac{2\cdot L}{2}=\frac{2\cdot 8\text{ m}}{2}=8\text{ m}$$

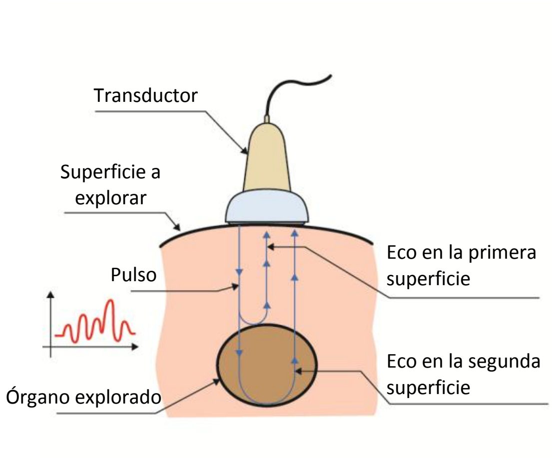
Y la frecuencia valdría entonces:

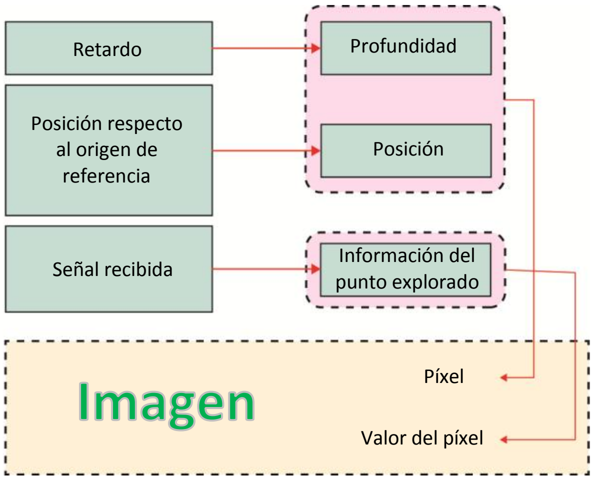
$$v_p=\lambda\cdot f\rightarrow f_2=\frac{v_p}{\lambda_2}=\frac{80\text{ m/s}}{8\text{ m}}=10\text{ Hz}$$

FÍSICA EN TU VIDA

1. Explica con un esquema sencillo cómo se forman las imágenes en un ecógrafo.

En el ecógrafo el transductor emite ondas sonoras (ultrasonidos) que penetran y se reflejan en el interior del organismo. A continuación se reflejan en los tejidos internos y vuelven al ecógrafo. Midiendo el tiempo que tardan en recibirse las ondas sonoras reflejadas se puede conocer la velocidad del sonido en el interior de los tejidos atravesados, lo que sirve para poder formar imágenes, pues se sabe que las ondas sonoras se transmiten con más velocidad en unos tejidos que en otros.





2. ¿Cómo influye la diferente velocidad de los ultrasonidos en distintos tejidos a la hora de formar las imágenes en un ecógrafo?

La diferente velocidad de los ultrasonidos permite detectar en qué punto se encuentran la superficie que separa un tejido de otro, lo que se puede convertir luego en una imagen.

3. **¿Qué ventajas aporta la ecografía frente a otras técnicas de diagnóstico por imagen?**

Es una técnica inocua, por lo que resulta muy útil para diagnósticos prenatales. Otras técnicas ofrecen imágenes más detalladas, pero causan daños en los tejidos del paciente, como la radiografía, que emplea radiación electromagnética de elevada energía: los rayos X.

4. **¿Qué imágenes aparecerán más contrastadas en una ecografía, aquellas que muestran huesos y grasa o aquellas que muestran músculos y grasa?**

Las que muestran huesos y grasa, pues la diferencia entre la velocidad de los ultrasonidos en este caso es mayor que para los músculos y grasa.

5. **Las ecografías pueden emplearse para detectar malformaciones en embriones y fetos, y también para conocer el sexo del futuro bebé, aunque hay padres que prefieren no saber el sexo del bebé antes de que nazca. ¿Cuál es tu opinión?**

Respuesta personal.