UNIDAD 1: Campo gravitatorio

CUESTIONES INICIALES-PÁG. 7

1. ¿Cuándo se dice que una fuerza es conservativa? ¿Para qué sirve saber si una fuerza es conservativa o no?

Una fuerza se dice que es conservativa cuando el trabajo realizado por la fuerza depende únicamente de la posición inicial y final y no de la trayectoria seguida. Si la fuerza es conservativa se puede calcular el trabajo aplicando la ley de la energía potencial, por lo que ese trabajo es igual a la variación de la energía potencial cambiada de signo y no hay que recurrir a la definición de trabajo elemental.

2. ¿A qué se denomina energía mecánica asociada a un objeto? ¿Cuándo se conserva la energía mecánica durante una transformación?

La energía mecánica asociada a un objeto es iguala a la suma de su energía cinética y de su energía potencial. La energía mecánica se conserva durante una transformación cuando solamente actúan fuerzas conservativas sobre el objeto.

3. ¿Cuánto pesa un objeto situado a una distancia igual a 3 · R_{Tierra} de la superficie de la Tierra?

El peso del objeto se divide por nueve: $P' = m \cdot g' = m\dfrac{GM_T}{(3 \cdot R_T)^2} = m\dfrac{G \cdot M_T}{9 \cdot R_T^2} = m\dfrac{P}{9}$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 38

1. ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra se reduce a la mitad el campo gravitatorio terrestre? R_T = 6400 km

La relación de los módulos de los campos gravitatorios en la superficie y en el punto en cuestión son:

$$\frac{g_{superficie}}{g_P} = \frac{\dfrac{G \cdot M}{R_T^2}}{\dfrac{G \cdot M}{r^2}};\ \frac{g_{superficie}}{\dfrac{g_{superficie}}{2}} = \frac{r^2}{R_T^2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r}{R_T}$$

Operando: $r = R_T + h = \sqrt{2} \cdot R_T$

Despejando: $h = \sqrt{2} \cdot R_T - R_T = 6\,400 \text{ km} \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2{,}65 \cdot 10^3 \text{ km}$

2. Se eleva un objeto de masa m = 20 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura h = 100 km. ¿Cuánto ha incrementado su energía potencial?

La variación de la energía potencial asociada al objeto en la nueva posición es:

$$\Delta E_p = E_{p,\ altura} - E_{p,\ superficie} = -\frac{G M_T m}{r} - \left(-\frac{G M_T m}{R_T}\right) = G M_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right)$$

Operando: $\Delta E_p = = \dfrac{G M_T m}{R_T^2} R_T^2 \dfrac{r - R_T}{R_T r} = g_0 m R_T^2 \dfrac{h}{R_T \cdot (R_T + h)}$

Como la distancia h es mucho menor que el radio de la Tierra se puede realizar la aproximación $R_T \cdot (R_T + h) \approx R_T^2$ y por tanto:

$\Delta E_p = m \cdot g_0 \cdot h = 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ N/kg} \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ m} = 1{,}96 \cdot 10^7 \text{ J}$

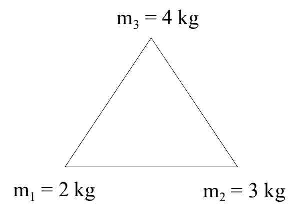
Si no se utiliza la aproximación anterior, se tiene que:

$$\Delta E_p = \frac{G M_T m}{R_T^2} R_T^2 \frac{r - R_T}{R_T r} = g_0 m R_T \frac{h}{(R_T + h)}$$

Sustituyendo: $\Delta E_p = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ kg} \dfrac{(6370 \cdot 10^3 \text{ m}) \cdot (100 \cdot 10^3 \text{ m})}{6370 \cdot 10^3 \text{ m} + 100 \cdot 10^3 \text{m}} = 1{,}93 \cdot 10^7 \text{ J}$

3. En los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado se colocan tres masas de 2 kg, 3 kg y 4 kg. Calcula la energía transformada para separarlas infinitamente.

La energía potencial gravitatoria del sistema representa el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria al separar las partículas a una distancia infinita.



En el caso de un conjunto de partículas, la energía potencial gravitatoria total es la suma de todas las parejas de partículas.

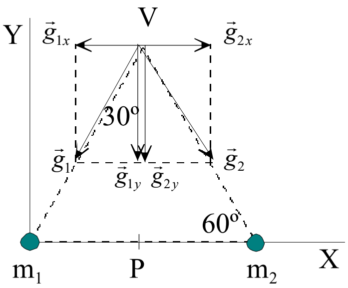
$$E_{p,total} = E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = -G \cdot \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{23}} \right)$$

$$E_{p,total} = E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \left(\frac{2kg \cdot 3kg}{1m} + \frac{2kg \cdot 4kg}{1m} + \frac{3kg \cdot 4kg}{1m} \right) = -1{,}73 \cdot 10^{-9}\ J$$

Que lógicamente tiene signo negativo. Ya que un agente externo tiene que realizar un trabajo contra la fuerza gravitatoria que se almacena en forma de energía potencial gravitatoria.

4. En los vértices de un triángulo equilátero de 1 m de lado hay colocadas sendas masas iguales de 3 kg cada una. Calcula el vector campo gravitatorio en el otro vértice. Determina el vector fuerza que actúa sobre una masa de 5 kg colocada en ese vértice. Indica el valor de la energía transformada al trasladar la masa de 5 kg desde el vértice hasta el punto medio del lado que une las masas de 3 kg.

Se elige un sistema de referencia con el lado del triángulo que contiene las masas sobre el eje X y en el origen una de ellas. Se denominan m_1 y m_2 a los dos masas iguales y m a la masa que se traslada. Las dos masas generan un campo gravitatorio del mismo módulo en el otro vértice.



$$g_1 = g_2 = \frac{G \cdot m_1}{r_1^2} = \frac{G \cdot 3kg}{1m^2}$$

Las componentes en el eje X de los campos anteriores se anulan por simetría y las componentes en el eje Y se refuerzan. Como los ángulos de un triángulo equilátero son de 60º, resulta que:

$$g_{1y} = g_{2y} = g_1 \cdot \text{sen } 60º = \frac{G \cdot 3kg}{1m^2} \cdot \text{sen}\,60º$$

El módulo del campo gravitatorio en el otro vértice es:

$$g_T = 2 \cdot g_1 = 2 \frac{G \cdot 3kg}{1m^2} \cdot \text{sen}\,60º = 2 \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 3kg}{1m^2} \cdot \text{sen}\,60º = 3{,}46 \cdot 10^{-10}\ N/kg$$

Vectorialmente: $\vec{g}_t = -3{,}46 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j}\ N/kg$

El vector fuerza que actúa sobre la masa de 5kg colocada en el vértice libre es:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} = 5kg \cdot (-3{,}46 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j}\ N/kg) = -1{,}72 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{j}\ N$$

La energía involucrada en el proceso se resuelve a través del cálculo del potencial.

El potencial gravitatorio que generan las dos masas iguales m_1 y m_2 en el otro vértice es una magnitud escalar (siempre de signo negativo) y cuyo valor es:

$$V_v = V_1 + V_2 = 2 \cdot \left(-\frac{G \cdot m_1}{r_V} \right) = -2 \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 3kg}{1m} = -4{,}0 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

El potencial en el punto, P, medio del lado que contiene las masas iguales es:

$$V_P = V_1 + V_2 = 2 \cdot \left(-\frac{G \cdot m_1}{r_P} \right) = -2 \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 3kg}{0{,}5m} = -8{,}0 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

Aplicando las relaciones entre el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria y el potencial, resulta que:

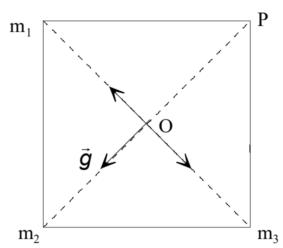
$W_{F_{gravitatoria}\ V\rightarrow P} = -\Delta E_P = -m\cdot\Delta V = -m\cdot(V_P - V_V) =$

$= -5\ kg\cdot[-8{,}0\cdot10^{-10}\ J/kg - (-4{,}0\cdot10^{-10}\ J/kg)] = +2{,}00\cdot10^{-9}\ J$

El proceso es espontáneo. La fuerza gravitatoria realiza un trabajo a costa de disminuir la energía potencial asociada al sistema.

5. Tres masas iguales de 1 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula el módulo del campo gravitatorio en el centro del cuadrado. Determina el potencial gravitatorio en el vértice libre y en el centro del cuadrado. Calcula el trabajo realizado al trasladar un objeto de 10 kg de masa desde el centro del cuadrado hasta el vértice libre.

La geometría del ejercicio indica que los campos creados por las masas situadas en la misma diagonal se anulan. El campo gravitatorio total es igual al creado por la masa situada en el vértice opuesto al vértice libre P.



Este campo tiene la dirección de la diagonal que pasa por el punto P y sentido hacia la masa. Su módulo es:

$$g = \frac{G\cdot m}{r^2} = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}N\cdot m^2/kg^2\cdot1kg}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2} = 1{,}33\cdot10^{-10}\frac{N}{kg}$$

El potencial gravitatorio en un punto es igual a la suma de los potenciales generados por cada una de las masas en ese punto.

$$V_P = -2\frac{G\cdot m}{r_1} - \frac{G\cdot m}{r_2} = -6{,}67\cdot10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot1kg\left(\frac{2}{1m}+\frac{1}{\sqrt{2}\,m}\right) = -1{,}80\cdot10^{-10}\frac{J}{kg}$$

$$V_O = -3\frac{G\cdot m}{r_1} = -3\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot1kg\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}m} = -2{,}83\cdot10^{-10}\frac{J}{kg}$$

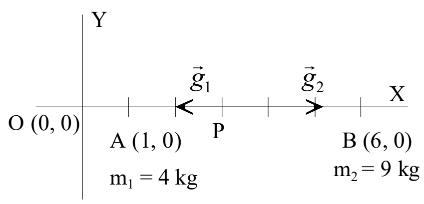
Aplicando la ley de la energía potencial:

$W_{O\rightarrow P} = -m\cdot\Delta V = -m\cdot(V_P - V_O) = -10\ kg\cdot(-1{,}80\cdot10^{-10}\ J/kg + 2{,}83\cdot10^{-10}\ J/kg) =$

$= -1{,}03\cdot10^{-9}\ J$

6. Una partícula de 4 kg de masa se coloca en el punto de coordenadas A (1, 0) y otra de 9 kg de masa se coloca en el punto B (6, 0). ¿Hay algún punto en el que se anule el campo gravitatorio? Calcula sus coordenadas. Calcula la energía involucrada en el proceso de trasladar una masa de 5 kg desde el origen de coordenadas hasta el punto C (3,0).

Una masa puntual genera un campo gravitatorio de dirección la radial y sentido hacia la masa considerada. El campo gravitatorio en un punto es la suma vectorial de los campos gravitatorios generados por cada una de las masas. Por tanto el campo se anula en un punto situado entre las dos masas. La distancia entre las dos masas es 5 m.



El punto P está situado sobre el eje X y dista x m del punto A y 5 – x m del B. Como en ese punto los módulos de los campos generados por cada masa son iguales, se tiene:

$$|\vec{g}_1| = |\vec{g}_2|; \frac{G \cdot m_1}{r_1^2} = \frac{G \cdot m_2}{r_2^2}; \frac{4\,kg}{x^2} = \frac{9\,kg}{(5-x)^2}$$

Operando: $2 \cdot (5 - x) = 3 \cdot x \Rightarrow x = 2$ m; por tanto, las coordenadas de P son: P (3, 0)

En primer lugar se calcula el potencial gravitatorio en los puntos considerados, teniendo en cuenta que el potencial en un punto es igual a la suma de los potenciales creados por cada una de las masas.

$$V_O = V_{O1} + V_{O2} = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} - \frac{G \cdot m_2}{r_2} = -G\left(\frac{4\,kg}{1\,m} + \frac{9\,kg}{6\,m}\right) = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} 5{,}5 \frac{kg}{m} = -3{,}67 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$$

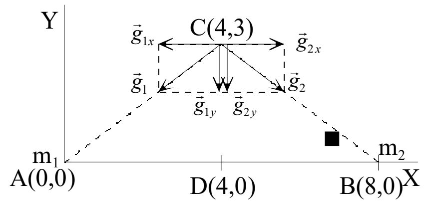
$$V_C = V_{C1} + V_{C2} = -\frac{G \cdot m_1}{r_1} - \frac{G \cdot m_2}{r_2} = -G\left(\frac{4\,kg}{2\,m} + \frac{9\,kg}{3\,m}\right) = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} 5 \frac{kg}{m} = -3{,}34 \cdot 10^{-10} \frac{J}{kg}$$

Aplicando la ley de la energía potencial:

$W_{O \to C} = - \Delta E_p = - m \cdot \Delta V = - m \cdot (V_C - V_O) = - 5\ kg\ (- 3{,}34 \cdot 10^{-10}\ J/kg + 3{,}67 \cdot 10^{-10}\ J/kg) =$
$= - 1{,}65 \cdot 10^{-10}\ J$

7. Dos masas puntuales $m_1 = m_2 = 10$ kg están colocadas en los puntos A (0 m, 0 m) y B (8 m, 0 m). Calcula el vector campo gravitatorio en el punto C (4 m, 3 m). ¿Qué fuerza actúa sobre una masa de $m_3 = 100$ g colocada en C? Calcula la energía transformada al trasladar la masa m_3 desde el punto C hasta el punto D (4 m, 0 m). Es espontáneo el proceso, interpreta el sigo obtenido.

Cada una de las masas mayores genera en el punto C un campo gravitatorio cuyo módulo es:



$$g = G\frac{m}{r^2} = G\frac{m}{x^2 + y^2}$$

En el diagrama de la figura se observa que las componentes en X del campo gravitatorio se anulan y que las componentes en Y se refuerzan. Este campo tiene la dirección la de la recta que une los puntos C y D y su sentido es hacia el punto D. Su módulo es:

$$g_{total} = 2 \cdot g_y = 2 \cdot g \cdot \text{sen}\ \phi = 2 \cdot G\frac{m}{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Sustituyendo: $g_{total} = 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{kg^2} \frac{10\,kg}{(4\,m)^2 + (3\,m)^2} \frac{4\,m}{\sqrt{(4\,m)^2 + (3\,m)^2}} = 4{,}27 \cdot 10^{-11}\,N/kg$

Vectorialmente: $\vec{g}_{total} = -\,4{,}27 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\ N/kg$

Aplicando la definición de intensidad del campo en un punto resulta que:

$\vec{F} = m \cdot \vec{g}_{total} = 0{,}1\,kg \cdot (-4{,}27 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}\ N/kg) = -4{,}27 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j}\ N$

Aplicando la definición de potencial gravitatorio en un punto. El potencial generado en un punto es igual a la suma de los potenciales generados por cada una de las masas.

$$V_C = -2 \cdot G\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}} = -2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \frac{10\,kg}{\sqrt{(4\,m)^2 + (3\,m)^2}} = -2{,}67 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

$$V_D = -2 \cdot G\frac{m}{x} = -2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \frac{10\,kg}{4\,m} = -3{,}34 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

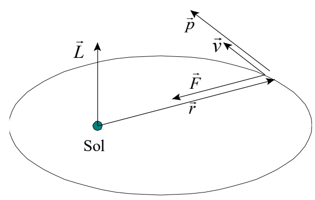
Aplicando la ley de la energía potencial:

$W_{Fcampo\ C \to D} = - \Delta E_p = - m \cdot \Delta V = - m \cdot (V_D - V_C) = - 0{,}1\ kg \cdot (- 3{,}34 \cdot 10^{-10}\ J/kg + 2{,}67 \cdot 10^{-10}\ J/kg) = 6{,}7 \cdot 10^{-12}\ J$

El proceso es espontáneo, ya que las masas están más cerca unas de otras en la posición final que en la inicial. Las fuerzas del campo realizan un trabajo a costa de disminuir la energía potencial asociada a la nueva distribución.

8. El planeta Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio, su distancia al Sol es de $6{,}99 \cdot 10^{10}$ m, y su velocidad orbital es de $3{,}88 \cdot 10^{4}$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4{,}60 \cdot 10^{10}$ m. En el perihelio de Mercurio calcula su velocidad orbital, su energía cinética, potencial y mecánica y los módulos de su momento lineal y angular. De las magnitudes indicadas anteriormente, ¿cuáles son iguales en el afelio?
Masa de Mercurio = $3{,}18 \cdot 10^{23}$ kg; Masa del Sol: $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg; G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

La interacción gravitatoria es una fuerza central, por lo que el momento angular de Mercurio respecto del Sol es una cantidad constante a lo largo de la órbita.



$$\vec{L}_{afelio} = \vec{L}_{perihelio}$$

Aplicando la definición de momento angular y como el vector de posición es perpendicular al vector velocidad, resulta que:

$r_{afelio} \cdot v_{afelio} = r_{perihelio} \cdot v_{perihelio} \Rightarrow v_{perihelio} = 5{,}90 \cdot 10^{4}$ m/s

La velocidad orbital es un vector tangente a la trayectoria, por lo que no se conserva ni en módulo, ni en dirección, ni en sentido.

Aplicando la definición de momento lineal: $\vec{p}_{perihelio} = m_{mercurio} \cdot \vec{v}_{perihelio}$

En módulo: $p_{perihelio} = m_{Mercurio} \cdot v_{perihelio} = 1{,}88 \cdot 10^{28}$ kg · m/s

El momento lineal es un vector tangente a la trayectoria, luego no se conserva ni en módulo, ni en dirección, ni en sentido.

Aplicando la definición de energía cinética: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m_{mercurio} \cdot v^2_{perihelio} = 5{,}53 \cdot 10^{32}$ J

Que no se conserva a la largo de la trayectoria, ya que el módulo de la velocidad no permanece constante.

La energía potencial gravitatoria asociada a esa posición es: $E_p = -\dfrac{G \cdot m_{Sol} \cdot m_{mercurio}}{r_{perihelio}} = -9{,}2 \cdot 10^{32}$ J

Que tampoco es constante a lo largo de la trayectoria porque la distancia no lo es.

La energía mecánica es igual a la suma de las energías cinética y potencial gravitatoria.

$E = E_c + E_p = -3{,}66 \cdot 10^{32}$ J

Cantidad negativa, ya que Mercurio está ligado al Sol. Esta cantidad permanece constante a lo largo de la trayectoria porque la interacción gravitatoria es una fuerza conservativa.

Aplicando la definición de momento angular y como el vector de posición es perpendicular al vector velocidad, resulta que:

$\vec{L}_{perihelio} = \vec{r}_{perihelio} \wedge \vec{p}_{perihelio} \rightarrow L_{perihelio} = r_{perihelio} \cdot p_{perihelio} = 8{,}63 \cdot 10^{38}$ kg · m²/s

Es un vector perpendicular al plano de la órbita y cuyo sentido es el indicado por la regla de Maxwell, que coincide con el del avance de un sacacorchos al voltear el vector de posición sobre el vector velocidad por el camino más corto.

Este vector permanece constante a lo largo de toda la trayectoria como corresponde a una fuerza central, ya que el momento de la fuerza que actúa sobre Mercurio respecto del Sol es igual a cero, el vector de posición y el vector fuerza son paralelos.

9. Un meteorito de 60 kg de masa cae desde un punto situado a una altura igual al radio de la Tierra con una velocidad de 40 m/s. ¿Cuál será la velocidad del meteorito al caer en la superficie terrestre si despreciamos la fricción con la atmósfera? $M_{Tierra} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{Tierra} = 6370$ km

Si se prescinde del rozamiento con el aire la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica del objeto se conserva durante los desplazamientos.
$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $E_{\text{mecánica posición inicial}} = E_{\text{mecánica superficie}}$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{inicial}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot R_T} = \frac{1}{2} m \cdot v_{final}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T};\ v_{inicial}^2 - \frac{G \cdot M_T}{R_T} = v_{final}^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}$$

Despejando: $v_{final}^2 = v_{inicial}^2 + \dfrac{G \cdot M_T}{R_T}$

Sustituyendo: $v_{final} = \sqrt{v_{inicial}^2 + \dfrac{G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{(40\,m/s)^2 + \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2/kg^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg}{6370 \cdot 10^3\,m}} = 7{,}9 \cdot 10^3\,m/s$

10. Un objeto de masa m = 1000 kg se acerca en dirección radial a un planeta, de radio $R_P = 6000$ km, que tiene una gravedad g =10 m/s² en su superficie. Cuando se observa este objeto por primera vez se encuentra a una distancia $r_0 = 6\ R_P$ del centro del planeta. ¿Qué energía potencial tiene ese objeto cuando se encuentra a la distancia r_0? Determina la velocidad inicial del objeto v_0, o sea cuando está a la distancia r_0, sabiendo que llega a la superficie del planeta con una velocidad v = 12 km/s

La energía potencial inicial asociada a la posición del meteorito es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_p\, m}{r} = -\frac{G \cdot M_p\, m}{6 \cdot R_p} = -\frac{G \cdot M_p\, m \cdot R_P}{6 \cdot R_P^2} = -\frac{g \cdot m \cdot R_P}{6} = -\frac{10\,m/s^2 \cdot 1000\,kg \cdot 6000 \cdot 10^3\,m}{6} = -1{,}0 \cdot 10^{10}\,J$$

Si se prescinde del rozamiento con el aire la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica del objeto se conserva durante los desplazamientos.
$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $E_{\text{mecánica posición inicial}} = E_{\text{mecánica superficie}}$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 - \frac{G \cdot M_P \cdot m}{r_0} = \frac{1}{2} m \cdot v_{final}^2 - \frac{G \cdot M_P \cdot m}{R_p};\ v_0^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_P}{6 \cdot R_P} = v_{final}^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_P}{R_P}$$

Despejando: $v_0^2 = v_{final}^2 - \dfrac{5}{3}\dfrac{G \cdot M_P}{R_P} = v_{final}^2 - \dfrac{5}{3}\dfrac{G \cdot M_P \cdot R_P}{R_P^2} = v_{final}^2 - \dfrac{5}{3} g \cdot R_P$

Sustituyendo: $v_0 = \sqrt{(12 \cdot 10^3\,m/s)^2 - \dfrac{5}{3} 10\,m/s^2 \cdot 6000 \cdot 10^3\,m} = 6633\,m/s$

11. En la superficie de un planeta de 2 000 km de radio, la aceleración de la gravedad es de 3 m/s². Calcula la masa del planeta. ¿Hasta qué altura se elevará un objeto que se lance verticalmente desde la superficie del planeta con una velocidad de 2 km/s?

Igualando las definiciones de peso según la ley de gravitación universal y la segunda ley de Newton, se tiene:

$$P = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} = m \cdot g \Rightarrow M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{3\,m/s^2 \cdot (2 \cdot 10^6\,m)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2/kg^2} = 1{,}8 \cdot 10^{23}\,kg$$

Si se prescinde del rozamiento con el aire la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica del objeto se conserva durante los desplazamientos.

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$; $E_{\text{mecánica superficie}} = E_{\text{mecánica posición final}}$

$$\frac{1}{2} \cdot m_O \cdot v^2_{\text{superficie}} - \frac{G \cdot M_P \cdot m_O}{R_P} = 0 - \frac{G \cdot M_P \cdot m_O}{r}$$

Operando: $\dfrac{v^2_{\text{superficie}} \cdot R_P - 2 \cdot G \cdot M_P}{2 \cdot R_P} = -\dfrac{G \cdot M_P}{r} \Rightarrow r = \dfrac{-2 \cdot R_P \cdot G \cdot M_P}{v^2_{\text{superficie}} \cdot R_P - 2 \cdot G \cdot M_P}$

Sustituyendo: $r = \dfrac{-2 \cdot 2 \cdot 10^6\ m \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{23}\ kg}{(2 \cdot 10^3\ m/s)^2 \cdot 2 \cdot 10^6 m - 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{23}\ kg} = 3 \cdot 10^6\ m$

Con lo que la altura que alcanza es: $h = r - R = 3 \cdot 10^6\ m - 2 \cdot 10^6\ m = 1 \cdot 10^6\ m$

12. Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial de 3 km/s. ¿Qué altura máxima alcanzará? Calcula la velocidad orbital que habrá que comunicarle a esa altura para que describa una órbita circular. R_T = 6 370 km

Si se prescinde del rozamiento con el aire, la única fuerza que actúa sobre el objeto es la atracción gravitatoria, por lo que la energía mecánica se conserva.

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0\ \Psi\ E_{c,\text{ superficie}} + E_{p,\text{ superficie}} = E_{c,\text{ final}} + E_{p,\text{ final}}$

La energía cinética y potencial en la superficie de la Tierra se transforman en energía potencial gravitatoria asociada a su posición final.

$$\frac{1}{2} m_s \cdot v^2_{\text{superficie}} - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} = 0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T + h}\ 0$$

Operando: $\dfrac{v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T - 2 \cdot G \cdot M_T}{2 \cdot R_T} = -\dfrac{G \cdot M_T}{R_T + h}\ 0\ \Psi\ \dfrac{R_T + h}{G \cdot M_T} = \dfrac{2 \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M_T - v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T}\ 0$

Despejando: $h = \dfrac{2 \cdot G \cdot M_T \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M_T - v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T} - R_T = \dfrac{v^2_{\text{superficie}} - R_T^2}{2 \cdot G \cdot M_T - v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T}\ 0$

Como: $g_0 = \dfrac{G \cdot M_T}{R_T^2}\ 0$, se tiene que: $h = \dfrac{v^2_{\text{superficie}}}{2 \cdot g_0 - \dfrac{v^2_{\text{superficie}}}{R_T}} = \dfrac{v^2_{\text{superficie}} \cdot R_T}{2 \cdot g_0 \cdot R_T - v^2_{\text{superficie}}}\ 0$

Sustituyendo: $h = \dfrac{(3\ 000\ m/s)^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ m}{2 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ m - (3\ 000\ m/s)^2}\ 0 = 4{,}95 \cdot 10^5\ m$

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ G \frac{M_{\text{planeta}} \cdot m_{\text{satélite}}}{r^2} = m_{\text{satélite}} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Despejando: $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_{\text{planeta}}}{r}} = \sqrt{\dfrac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\dfrac{9{,}8\ m/s^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ m)^2}{6{,}37 \cdot 10^6\ m + 4{,}95 \cdot 10^5\ m}} = 7{,}6 \cdot 10^3\ m$

13. Si la Tierra redujese su radio a la mitad conservando su masa,) cuánto valdría la velocidad de escape desde su superficie?

Un cuerpo queda desligado del campo gravitatorio creado por otro cuerpo cuando su energía mecánica asociada a una posición es como mínimo igual a cero. En este caso llega hasta el infinito, en el que la energía potencial es cero, con velocidad nula.

La energía mecánica asociada a un cuerpo en la superficie de un planeta es igual a la suma de la energía cinética y potencial. Llamando v_e a la velocidad comunicada para que se escape del planeta, tenemos:

$$E_{mecánica} = E_{cinética} + E_{potencial} = 0;\ \frac{1}{2} m_S\, v_e^2 - \frac{G\, m_S\, m_{planeta}}{R_{planeta}} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G\, m_{planeta}}{R_{planeta}}}$$

Y para la Tierra: $v_{e,Tierra} = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$

Si ahora se reduce el radio de la Tierra a la mitad conservado su masa, entonces la velocidad de escape desde su superficie se es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_{planeta}}{R_{planeta}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_T}{R_T/2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot G \cdot m_T}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot g_{0,T} \cdot R_T} = \sqrt{2} \cdot v_{e,T}$$

14. Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente una partícula con una velocidad igual al doble de su velocidad de escape. ¿Cuál será su velocidad cuando esté muy lejos de la Tierra?

En primer lugar se determina la velocidad de escape en la superficie de la Tierra. En ese punto la energía mecánica asociada a la partícula es igual a cero.

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{escape}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G M_T}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$$

Por lo que la velocidad inicial de la partícula es: $v = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R_T}$

Una vez lanzada la partícula solamente actúa la interacción gravitatoria, por lo que la energía mecánica se conserva durante su desplazamiento. En puntos muy alejados de la Tierra, la energía potencial gravitatoria asociada a ella es igual a cero, por lo que aplicando la energía de conservación de la energía mecánica entre la superficie de la Tierra y un punto muy alejado, resulta:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0;\ \frac{1}{2} m \cdot v_{inicial}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = \frac{1}{2} m \cdot v_{final}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_\infty}$$

Sustituyendo la velocidad inicial por su valor y operando, resulta que:

$$\frac{1}{2} 4 \cdot 2 g_0 \cdot R_T - g_0 \cdot R_T = \frac{1}{2} v_{final}^2 - 0 \Rightarrow v_{final} = \sqrt{6 \cdot g_0 \cdot R_T} = \sqrt{6 \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\,m} = 19400\ km$$

15. Desde la superficie de la Luna se lanza un objeto con una velocidad igual a su velocidad de escape, calcula a qué distancia del centro de la Luna se ha reducido su velocidad a la mitad. R_{Luna} = 1 738 km; $g_{0,Luna}$ = 1,62 m/s^2.

Para que un objeto se escape de la atracción lunar la energía mecánica en su superficie tiene que ser igual a cero.

$$E_{c,\,superficie} + E_{p,\,superficie} = 0;\ \frac{1}{2} m_{objeto} \cdot v_{escape}^2 - \frac{G \cdot M_{Luna} \cdot m_{objeto}}{R_{Luna}} = 0$$

Despejando: $v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Luna}}{R_{Luna}}} = \sqrt{2 \cdot g_{0,Luna} \cdot R_{Luna}}$

En el movimiento del objeto desde la superficie de la Luna hasta el punto P que dista una distancia r del centro de la Luna en el que la velocidad del objeto se reduce a la mitad se conserva la energía mecánica asociada al objeto.

$E_{c,\ supercie} + E_{p,\ superficie} = E_{c,\ posición} + E_{p,\ posición}$

$$\frac{1}{2}m_{objeto}\cdot v^2_{superficie} - \frac{G\cdot M_{Luna}\cdot m_{objeto}}{R_{Luna}} = \frac{1}{2}m_{objeto}\cdot v^2_{posición} - \frac{G\cdot M_{Luna}\cdot m_{objeto}}{r}$$

La velocidad en la superficie es la de escape y la velocidad en la posición r es la mitad de la anterior, por tanto:

$$\frac{1}{2}\left(v^2_{escape} - \frac{v^2_{escape}}{4}\right) = G\cdot M_{Luna}\cdot\left(\frac{1}{R_{Luna}} - \frac{1}{r}\right);\ \frac{3}{8}v^2_{escape} = G\cdot M_{Luna}\cdot\left(\frac{1}{R_{Luna}} - \frac{1}{r}\right)$$

Sustituyendo la velocidad de escape por su valor:

$$\frac{3}{8}\frac{2\cdot G\cdot M_{Luna}}{R_{Luna}} = G\cdot M_{Luna}\cdot\left(\frac{1}{R_{Luna}} - \frac{1}{r}\right);\ \frac{3}{4\cdot R_{Luna}} = \frac{1}{R_{Luna}} - \frac{1}{r};\ \frac{1}{r} = \frac{1}{4\cdot R_{Luna}}$$

Por tanto la distancia pedida es: $r = 4 \cdot R_{Luna}$

16. Un satélite artificial está situado en una órbita circular en torno a un planeta. ¿Por qué valor hay que multiplicar su velocidad para que se escape de la atracción gravitatoria en esa posición?

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}_n;\ G\frac{M_{planeta}\cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite}\cdot\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G\cdot M_{planeta}}{r}}$$

Que es la velocidad del satélite cuando la órbita es estable.

Para que el satélite se escape desde esa posición se tiene que cumplir que su energía mecánica es igual a cero.

$$E_{mecánica} = E_{cinética} + E_{potencial} = \frac{1}{2}m\cdot v^2_{escape} - \frac{G\cdot M_{Planeta}\cdot m}{r} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_{Planeta}}{r}}$$

Comparando los dos valores de la velocidad: $\frac{v_{escape}}{v} = \frac{\sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_{Planeta}}{r}}}{\sqrt{\frac{G\cdot M_{Planeta}}{r}}} = \sqrt{2} \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{2}\cdot v$

Si se multiplica la velocidad orbitad por $\sqrt{2}$ el satélite se escapa desde su posición.

17. El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre y su masa la mitad. Calcule la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta, en función de sus correspondientes valores terrestres.

La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta es:

$$g = \frac{G\cdot m}{R^2} = \frac{G\cdot\frac{M_{Tierra}}{2}}{\left(\frac{R_{Tierra}}{3}\right)^2} = \frac{9}{2}\frac{G\cdot M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}} = \frac{9}{2}g_{0,\ Tierra}$$

Se denomina velocidad de escape a la que hace igual a cero a la energía mecánica de una partícula situada en la superficie del planeta.

$$E_{mecánica} = E_{cinética} + E_{potencial} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_{Planeta} \cdot m}{R_{Planeta}} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Planeta}}{R_{Planeta}}}$$

La velocidad de escape en la superficie de la Tierra es:

$$v_{escape,Tierra} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Tierra}}{R_{Tierra}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Tierra} \cdot R_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}} = \sqrt{2 \cdot g_{0,\,Tierra} \cdot R_{Tierra}}$$

Y la velocidad de escape en el planeta es:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{Planeta}}{R_{Planeta}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot \frac{M_{Tierra}}{2}}{\frac{R_{Tierra}}{3}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot G \cdot M_{Tierra}}{R_{Tierra}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot G \cdot M_{Tierra} \cdot R_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}} = \sqrt{3 \cdot g_{0,\,Tierra} \cdot R_{Tierra}}$$

Y en función de la velocidad de escape de la Tierra: $v_{escape} = \sqrt{3 \cdot \frac{2}{2} \cdot g_{0,\,Tierra} \cdot R_{Tierra}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot v_{escape,\,Tierra}$

18. Un satélite de 350 kg de masa se encuentra en una órbita circular de 15000 km de radio alrededor de la Tierra. Calcula la energía del satélite en la órbita. R_T = 6370 km

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ G \frac{M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Tierra}}{r}}$$

El satélite en su órbita tiene energía cinética y energía potencial gravitatoria.

$$E_{órbita} = E_{p,\,órbita} + E_{c,\,órbita} = -\frac{G \cdot M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r} + \frac{1}{2} m_{satélite} \cdot v^2_{órbita}$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor:

$$E_{orbita} = -\frac{G \cdot M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r} + \frac{1}{2} \cdot m_{satélite} \cdot \frac{G \cdot M_{Tierra}}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r}$$

Operando y sustituyendo:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R^2_{tierra} \cdot m_{satélite}}{r} = -\frac{1}{2} 9{,}8\,m/s^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\,m)^2 \frac{350\,kg}{15000 \cdot 10^3\,m} = -4{,}64 \cdot 10^9\,J$$

19. Una estación espacial se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra. Su masa es de 10000 kg y su velocidad de 4,2 km/s. Calcula el radio de la órbita y la energía potencial gravitatoria de la estación. $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; R_T = 6370 km

La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene a la estación en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ G \frac{M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Despejando: $r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg}{(4{,}2 \cdot 10^3\,m/s)^2} = 2{,}26 \cdot 10^7\,m$

La energía potencial gravitatoria asociada a la posición de la nave es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg \cdot 10000\,kg}{2{,}26 \cdot 10^7\,m} = -1{,}76 \cdot 10^{11}\,J$$

20. Para observar la Tierra, un satélite de 1000 kg de masa, que está inicialmente en una órbita circular a 630 km de la superficie, pasa a otra que está solo a 130 km. Calcula el cociente entre los períodos de revolución en cada órbita. El cambio en la energía potencial del satélite debido al campo gravitatorio terrestre. La energía potencial, ¿aumenta o disminuye? R_T = 6370 km; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg

Aplicando la tercera ley de Kepler a las dos órbitas del satélite:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3};\ \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}} = \sqrt{\frac{(6370 \cdot 10^3\ m + 630 \cdot 10^3)^3}{(6370 \cdot 10^3\ m + 130 \cdot 10^3)^3}} = 1{,}12$$

La energía potencial gravitatoria en las respectivas órbitas es:

$$E_{p1} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1000 kg}{6370 \cdot 10^3 m + 630 \cdot 10^3\ m} = -5{,}72 \cdot 10^{10}\ J$$

$$E_{p2} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_2} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1000 kg}{6370 \cdot 10^3 m + 130 \cdot 10^3\ m} = -6{,}16 \cdot 10^{10}\ J$$

La variación de la energía potencial gravitatoria es:
$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = -6{,}16 \cdot 10^{10}\ J + 5{,}72 \cdot 10^{10}\ J = -4{,}4 \cdot 10^9\ J$

La variación es negativa ya que la energía potencial gravitatoria disminuye según se acerca el objeto a la superficie de la Tierra.

21. ¿Qué relación existe entre las energías cinética y potencial gravitatoria de una satélite que gira en una órbita circular en torno a un planeta? ¿Cuál es la relación entre la energía potencial gravitatoria y la energía mecánica?

La velocidad de un satélite que describe una órbita circular de radio r, alrededor de un planeta tal como la Tierra, se determina aplicando la segunda ley de Newton.

$$\Sigma \vec{F} = m_{satélite} \cdot \vec{a}_n;\ \frac{G \cdot M_{planeta} \cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite} \cdot \frac{v_{órbita}^2}{r} \Rightarrow v_{órbita} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{planeta}}{r}}$$

La energía cinética del satélite es: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m_{satélite} \cdot v^2 = \frac{1}{2} m_{satélite} \frac{G \cdot M_{planeta}}{r}$

La energía potencial gravitatoria en la posición de la órbita es: $E_p = -\frac{G \cdot M_{planeta} \cdot m_{satélite}}{r}$

La energía cinética siempre tiene el signo positivo, mientras que la energía potencial gravitatoria tiene siempre signo negativo.

Dividiendo ambas expresiones, se tiene:

$$\frac{E_c}{E_p} = \frac{\frac{1}{2} m_{satélite} \frac{G \cdot M_{planeta}}{r}}{-\frac{G \cdot M_{planeta} \cdot m_{satélite}}{r}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow E_c = -\frac{1}{2} E_p$$

La energía mecánica es igual a la suma de la energía cinética y la potencial gravitatoria.

$$E_{Total} = E_c + E_p = -\frac{1}{2} E_p + E_p = \frac{1}{2} E_p$$

22. Un pequeño satélite de 1500 kg de masa, gira alrededor de la Luna orbitando en una circunferencia de 3 veces el radio de la Luna. Si la masa de la Luna es de 7,35 · 10^{22} kg y su radio 1740 km, calcula la energía mecánica asociada al satélite en su órbita. ¿Cuánto vale la velocidad de escape desde la superficie de la Luna? La masa de la Luna es 7,35· 10^{22} kg y su radio 1740 km.

a) Aplicando la ley de Gravitación Universal y la segunda ley de Newton al movimiento circular, se tiene, con M la masa de la Luna:

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}_n;\ \frac{G\cdot M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{G\cdot M}{r} = v^2$$

Utilizando la relación entre la velocidad y el período: $v = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$,

$$T = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot M}} = 2\pi\sqrt{\frac{(3\cdot R_L)^3}{G\cdot M_{Luna}}} = 6\cdot\pi\sqrt{\frac{3\cdot R_{Luna}^3}{G\cdot M_{Luna}}}$$

La energía mecánica asociada al satélite en su posición, energía de enlace, es igual a la suma de su energía cinética y de su energía potencial gravitatoria.

$$E_{mecánica} = E_{cinética} + E_{potencial} = \frac{1}{2}m\cdot v^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} = \frac{1}{2}m\cdot\frac{G\cdot M}{r} - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{G\cdot M\cdot m}{r}$$

Sustituyendo: $E_{mecánica} = -\frac{1}{6}\frac{G\cdot M_{Luna}\cdot m_{satelite}}{R_{Luna}}$

Se denomina velocidad de escape a la que hace igual a cero a la energía mecánica de una partícula situada en la superficie de la Luna.

$$\frac{1}{2}m\cdot v_{escape}^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} = 0 \Rightarrow v_{escape} = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_{Luna}}{R_{Luna}}}$$

23. Un satélite de masa 200 kg se encuentra en órbita circular de radio r alrededor del centro de la Tierra. Si la energía potencial a esa distancia es de –2 · 10^9 J. Calcular la velocidad del satélite. Datos: R_T = 6 400 km.

La energía potencial gravitatoria de un satélite a una distancia r del centro de la Tierra es:

$$E_p = -\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r} = -\frac{G\cdot M_T\cdot m\cdot R_T^2}{r\cdot R_T^2} = -\frac{g\cdot m\cdot R_T^2}{r}$$

Despejando: $r = -\frac{g\cdot m\cdot R_T^2}{E_p} = -\frac{9{,}8\,m/s^2\cdot 200\,kg\cdot(6400\cdot 10^3\,m)^2}{-2\cdot 10^9\,J} = 4{,}0\cdot 10^7\,m$

La velocidad de un satélite que describe una órbita circular de radio r, alrededor de un planeta tal como la Tierra, se determina aplicando la segunda ley de Newton.

$$\Sigma\vec{F} = m_{satélite}\cdot\vec{a}_n;\ \frac{G\cdot M_T\cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite}\cdot\frac{v_{órbita}^2}{r} \Rightarrow v_{órbita} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}}$$

Operando: $v_{órbita} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G\cdot M_T\cdot R_T^2}{r\cdot R_T^2}} = \sqrt{\frac{g\cdot R_T^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8\,m/s^2\cdot(6400\cdot 10^3\,m)^2}{4{,}0\cdot 10^7\,m}} = 3{,}17\cdot 10^3\,m/s$

24. Se desea poner en órbita un satélite geoestacionario de 25 kg. Calcula el radio de la órbita y las energías cinética, potencial y mecánica del satélite en la órbita. M_T = 5,98 · 10^{24} kg

Se denomina órbita geoestacionaria a la órbita en la que el período de traslación de un satélite es igual al período de rotación de la Tierra.
T = 24 h = 8,6 · 10^4 s
Estos satélites mantienen su posición relativa respecto de un punto de la Tierra, por lo que se utilizan como repetidores de las señales electromagnéticas en comunicación.
Aplicando la segunda ley de Newton a la órbita, de radio r, y como: $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ y $g_0 = \frac{G \cdot m_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}$, se tiene que:

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n; G\frac{m_{Tierra} \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{m_{Tierra}}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2}$$

Despejando: $r^3 = \frac{G \cdot m_{Tierra} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R^2_{Tierra} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$

Sustituyendo se tiene que el radio de la órbita es:

$$r = \sqrt[3]{\frac{9{,}8\,m/s^2 \cdot (6\ 370 \cdot 10^3\,m)^2 \cdot (8{,}64 \cdot 10^4\,s)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4{,}22 \text{ A } 10^7\text{ m} = 42\ 200\text{ km}$$

El valor de la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{G \cdot M_T}{r} = \frac{1}{2}50\,kg\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2/kg^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg}{42200 \cdot 10^3\,m} = 1{,}18 \cdot 10^8\,J$$

Y el de la energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,N \cdot m^2/kg^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg \cdot 50\,kg}{42200 \cdot 10^3\,m} = -2{,}36 \cdot 10^8\,J$$

La energía mecánica es igual a la suma de la energía cinética y de la potencial gravitatoria.
$E_{total} = E_c + E_p$ = 1,18 · 10^8 J – 2,36 · 10^8 J = - 1,18 · 10^8 J
Que tiene signo negativo ya que el satélite está enlazado con la Tierra.

25. Se desea poner en órbita circular un satélite meteorológico de 1000 kg de masa a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre. Calcula la velocidad, el periodo y aceleración que debe tener en la órbita. ¿Qué trabajo hay que realiza para poner en órbita el satélite?
La interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite es la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita. Aplicando al satélite la Segunda ley de Newton, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n;\ G\frac{M_{Tierra} \cdot m_{satélite}}{r^2} = m_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G \cdot M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}$, se tiene que la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Tierra}}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2_{Tierra}}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8\,m/s^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\,m)^2}{6{,}37 \cdot 10^6\,m + 300 \cdot 10^3\,m}} = 7{,}72 \cdot 10^3\,m/s$$

El período de revolución es: $T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\,m + 300 \cdot 10^3\,m)}{7{,}72 \cdot 10^3\,m/s} = 5\ 429\,s = 1{,}51\,horas$

La aceleración normal en la órbita es: $a = \frac{v^2}{r} = \frac{(7{,}72 \cdot 10^3\,m/s)^2}{6{,}37 \cdot 10^6\,m + 300 \cdot 10^3\,m} = 8{,}94\,m/s^2$

Para calcular el trabajo: aplicando la ley de la conservación de la energía entre la superficie de la Tierra y la órbita del satélite, se tiene que el trabajo realizado por los motores es igual a la variación de la energía mecánica del satélite.

$W_{realizado} = \Delta E_c + \Delta E_p = E_{mecánica\ final} - E_{mecánica\ inicial} = E_{órbita} - E_{superficie}$

La energía asociada al satélite en órbita es:

$$E_{órbita} = E_{p,\,órbita} + E_{c,\,órbita} = -\frac{G\cdot M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{r} + \frac{1}{2}\,m_{satélite}\cdot v^2_{orbita}$$

Sustituyendo la velocidad orbital por su valor: $v^2_{orbital} = \frac{G\cdot M_{Tierra}}{r}$

$$E_{orbita} = -\frac{G\cdot M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{r} + \frac{1}{2}\cdot m_{satélite}\cdot\frac{G\cdot M_{Tierra}}{r} = -\frac{1}{2}\frac{G\cdot M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{r}$$

Operando y sustituyendo:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{g_0\cdot R^2_{tierra}\cdot m_{satélite}}{r} = -\frac{1}{2}9{,}8\ m/s^2\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ m)^2\frac{1000\ kg}{6{,}37\cdot 10^6\ m + 300\cdot 10^3\ m} = -2{,}98\cdot 10^{10}\ J$$

Si se considera que el satélite se lanza siguiendo la vertical, sin aprovechar el movimiento de rotación de la Tierra, la velocidad inicial en la superficie de la Tierra es igual a cero y la energía asociada a la posición del satélite sobre la superficie de la Tierra es solamente potencial gravitatoria.

$$E_{superficie} = E_{p,superficie} = -\frac{G\,M_{Tierra}\cdot m_{satélite}}{R_{Tierra}} = -g_0\cdot R_{Tierra}\cdot m_{satélite}$$

Sustituyendo: $E_{superficie} = -9{,}8\ m/s^2\cdot 6{,}37\cdot 10^6\ m\cdot 1000\ kg = -6{,}24\cdot 10^{10}\ J$

Por tanto, la energía transformada para poner al satélite en órbita es:

$$W_{realizado} = \Delta E = E_{órbita} - E_{superficie} = -2{,}98\cdot 10^{10}\ J - (-6{,}24\cdot 10^{10}\ J) = 3{,}26\cdot 10^{10}\ J$$

26. La Estación Espacial Internacional (ISS) describe alrededor de la Tierra una órbita prácticamente circular a una altura h = 390 km sobre la superficie terrestre, siendo su masa m = 415 toneladas. a) Calcule su período de rotación en minutos así como la velocidad con la que se desplaza. b) ¿Qué energía es necesitaría para llevarla desde su órbita actual a otra a una altura el doble? ¿Cuál sería el período de rotación en esa nueva órbita?

a) El radio de la órbita es: $r = R_T + 390\ km = 6{,}37\cdot 10^6\ m + 390\cdot 10^3\ m = 6{,}76\cdot 10^6\ m$

Aplicando la segunda ley de Newton y considerando a la órbita circular, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m_{ISS}\cdot\vec{a}_n;\ G\frac{m_T\cdot m_{ISS}}{r^2} = m_{ISS}\frac{v^2}{r} \Rightarrow G\frac{m_T}{r} = v^2 = \frac{4\cdot\pi^2\cdot r^2}{T^2}$$

Despejando y como $g_0 = \frac{G\cdot m_T}{R_T^2}$, resulta que la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{G\cdot m_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0\cdot R_T^2}{r}} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{r}} = 6{,}37\cdot 10^6\ m\sqrt{\frac{9{,}8\ m/s^2}{6{,}76\cdot 10^6\ m}} = 7{,}67\cdot 10^3\ m/s$$

De igual forma, se tiene que el período de rotación es:

$$T = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\cdot m_T}} = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0\cdot R_T^2}} = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{(6{,}76\cdot 10^6\ m)^3}{9{,}8\ m/s^2\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ m)^2}} = 5{,}54\cdot 10^3\ s = 92\ min$$

b) La energía asociada a un satélite en órbita es igual a su energía de enlace, es decir, a la suma de la energía cinética y potencial.

$$E_{órbita} = E_c + E_p = ½\cdot m_{ISS}\cdot v^2 - \frac{G\cdot m_T\cdot m_{ISS}}{r}$$

Sustituyendo a la velocidad orbital por $v^2 = \frac{G\cdot m_T}{r}$, y como $g_0 = \frac{G\cdot m_T}{R_T^2}$ se tiene que:

$$E_{órbita} = \frac{1}{2}m_{ISS}\cdot\frac{G\cdot m_T}{r} - \frac{G\cdot m_T\cdot m_{ISS}}{r} = -\frac{1}{2}\frac{G\cdot m_T\cdot m_{ISS}}{r} = -\frac{1}{2}\cdot g_0\cdot R_T^2\frac{m_{ISS}}{r}$$

Al trasladar a un satélite desde una órbita de radio r_1 a otra de radio r_2, se cumple que:
$W_{\text{cambio de órbita}} = \Delta E = E_{\text{órbita 2}} - E_{\text{órbita 1}} =$

$$-\frac{1}{2}\cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_{ISS}}{r_2} - \left(-\frac{1}{2}\cdot g_0 \cdot R_T^2 \frac{m_{ISS}}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_{ISS}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Los radios de las dos órbitas son:
$r_1 = R_T + 390$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m $+ 390 \cdot 10^3$ m $= 6{,}76 \cdot 10^6$ m
$r_2 = R_T + 2 \cdot 390$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m $+ 2 \cdot 390 \cdot 10^3$ m $= 7{,}15 \cdot 10^6$ m

Sustituyendo, la energía involucrada en el proceso es:

$$W_{cambioórbita} = \frac{1}{2}\cdot 9{,}8\, m/s^2 \cdot \left(6{,}37\cdot 10^6\, m\right)^2 \cdot 415\cdot 10^3\, kg\left(\frac{1}{6{,}76\cdot 10^6\, m} - \frac{1}{7{,}15\cdot 10^6\, m}\right) = 6{,}7 \cdot 10^{11}\text{ J}$$

Lógicamente de signo positivo, la energía mecánica a asociada a una órbita es mayor cuanto más externa es.
El período es la nueva órbita es:

$$T = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0\cdot R_T^2}} = 2\cdot\pi\sqrt{\frac{(7{,}15\cdot 10^6\, m)^3}{9{,}8\, m/s^2\cdot(6{,}37\cdot 10^6\, m)^2}} = 6{,}02 \cdot 10^3\text{ s} = 100\text{ min}$$

Cuanto más alejada está la órbita más tiempo se tarda en recorrerla, de acuerdo con la tercera ley de Kepler.

27. La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es 3,7 m/s^2. El radio de la Tierra es 6370 km y la masa de Marte es un 11% la de la Tierra. Calcula el radio de Marte y la velocidad de escape desde su superficie.

La aceleración de la gravedad (intensidad del campo gravitatorio) en la superficie terrestre es:

$$g_T = \frac{G\cdot M_T}{R_T^2} = 9{,}8\text{ m/s}^2$$

Y en la superficie de Marte: $g_M = \frac{G\cdot M_M}{R_M^2}$

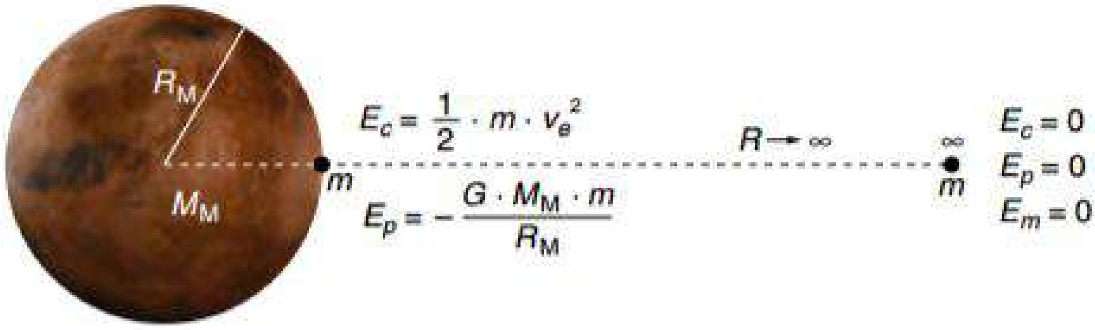
Si dividimos ambas expresiones entre sí, despejamos el radio de Marte y sustituimos los datos de que disponemos, se obtiene:

$$\frac{\frac{G\cdot M_T}{R_T^2}}{\frac{G\cdot 0{,}11 M_T}{R_M^2}} = \frac{9{,}8}{3{,}7} \quad \text{de donde: } R_M = \sqrt{\frac{9{,}8\cdot R_T^2\cdot 0{,}11}{3{,}7}}$$

Como $R_T = 6370 \cdot 10^3$ m, entonces $R_M = 3438{,}3 \cdot 10^3$ m

La velocidad de escape es la velocidad que hay que comunicar a un objeto para que pueda salir de la influencia gravitatoria de un planeta.

En la superficie del planeta, el objeto tiene energía potencial negativa. Para que escape, hay que transmitirle una energía cinética suficiente para que la energía mecánica en la superficie del planeta sea igual a la energía mecánica en el infinito:



Lo que se corresponde con la siguiente expresión: $(E_m)_{sup} = (E_m)_4$. Por tanto:

$$-G\frac{M_M \cdot m}{R_M} + \frac{1}{2} m\, v_e^2 = 0$$

De donde la expresión de la velocidad de escape resulta: $v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_M}{R_M}}$

Teniendo en cuenta ahora que: $g_M = \frac{G \cdot M_M}{R_M^2} \Rightarrow G \cdot M_M = g_M\, R_M^2$

Al sustituir en la expresión de la velocidad de escape: $v_e = \sqrt{2\,g_M\,R_M}$, con lo que:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 3{,}7\ m/s^2 \cdot 3438{,}3 \cdot 10^3\ m} = 5044{,}2\ m/s$$