12. Relatividad

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 295)

- Sí es posible, porque los estados de movimiento o reposo se determinan respecto a un sistema de referencia concreto. Por tanto, dependiendo del sistema de referencia, un cuerpo puede estar en movimiento o en reposo.

  Por ejemplo, una persona sentada en un tren está en reposo respecto del sistema de referencia del tren, pero está en movimiento respecto de un sistema de referencia situado en la estación.

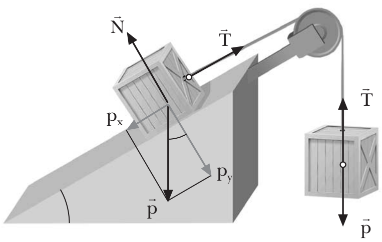
- $\vec{r}(t) = 15\,\vec{i} - 25t^2\,\vec{j} + (t^3 - 2t)\,\vec{k}$

  Derivamos respecto al tiempo para hallar la velocidad:

  $$\vec{v}(t) = -50t\,\vec{j} + (3t^2 - 2)\,\vec{k}$$

  Derivamos de nuevo para obtener la aceleración:

  $$\vec{a}(t) = -50\,\vec{j} + 6t\,\vec{k}$$

- 

— La tercera ley de Newton o principio de acción y reacción.

La fuerza que aparece es la *normal,* perpendicular a la superficie, que impide que el cuerpo se hunda.

— Aplicamos la segunda ley de Newton a los cuerpos A y B para calcular su aceleración y saber si se moverán.

$$\begin{cases} T - m_A\,g = m_A\,a \\ m_B\,g\,\text{sen}\,\alpha - T = m_B\,a \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_A\,a + m_A\,g \\ T = m_B\,g\,\text{sen}\,\alpha - m_B\,a \end{cases}$$

$$m_A\,a + m_A\,g = m_B\,g\,\text{sen}\,\alpha - m_B\,a$$

$$m_B\,g\,\text{sen}\,\alpha - m_A\,g = m_A\,a + m_B\,a$$

$$(m_A + m_B)\,a = (m_B\,\text{sen}\,\alpha - m_A)\,g$$

$$a = \frac{m_B\,\text{sen}\,\alpha - m_A}{m_A + m_B}\,g$$

$$a = \frac{25\text{ kg}\cdot\text{sen }30° - 10\text{ kg}}{25\text{ kg} + 10\text{ kg}}\cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}07\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

El cuerpo A se moverá hacia arriba con una aceleración de 0,07 m/s^2.

— La segunda ley de Newton.

- Datos: m = 25 g = 0,025 kg; $\vec{v} = 25\,000\,\vec{k}$ m/s

  Calculamos la cantidad de movimiento:

  $$\vec{p} = m\,\vec{v};\quad \vec{p} = 0{,}025\text{ kg}\cdot 25\,000\,\vec{k}\text{ m/s} = 625\,\vec{k}\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$$

  Calculamos la energía cinética:

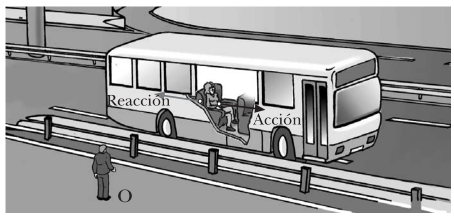
  $$Ec = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}025\text{ kg}\cdot(25\,000\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2$$

  $$Ec = 7{,}8125\cdot 10^6\text{ J}$$

1. SISTEMAS DE REFERENCIA (pág. 296)

1. *a)* El autobús.

   Sí, la fuerza que los pasajeros ejercen sobre el autobús.



   b) Una fuerza ficticia que me impulsa hacia atrás.

   No aparece ninguna fuerza de reacción.

2. Un sistema de referencia inercial es aquel que cumple la primera ley de Newton o principio de inercia, al contrario de lo que ocurre en los sistemas no inerciales.

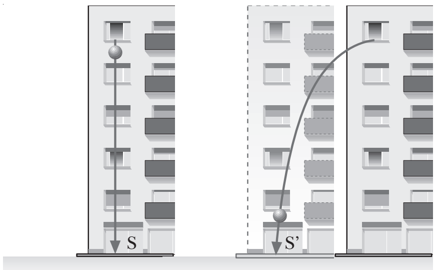
   Para distinguirlos es necesario observar si aparecen fuerzas ficticias, es decir, fuerzas que no tengan reacción. En este caso, estamos ante un sistema no inercial; en el caso contrario, se trata de un sistema inercial.

2. LA RELATIVIDAD EN LA MECÁNICA CLÁSICA
(págs. 298 y 299)

3. Ven la trayectoria igual que antes, ya que tanto el sistema de referencia del tren con MRU como el de la estación son sistemas de referencia inerciales.

4. *a)* El sistema S corresponde a la persona sentada en el banco y el S' al observador situado en el coche.

   b)



5. Utilizamos un sistema de referencia fijo en el suelo.

   — No, porque hemos cambiado el sistema de referencia. En el nuevo sistema, el primer coche está parado y el segundo circula a 38 km/h. Por tanto, el segundo coche circula a mayor velocidad que el primero.

6. Según las transformaciones de Galileo, la aceleración de un cuerpo es la misma en todos los sistemas inerciales; por tanto, la aceleración en S' es de 10 m/s^2.

7. Datos: v_2 = 80 km/h; v_1 = 90 km/h

   a) Calculamos la velocidad relativa:

$$u = (v_1 - v_2) = 90\ \text{km/h} - 80\ \text{km/h} = 10\ \text{km/h}$$

   b) Si circulan en sentidos contrarios, sus velocidades son:

$$v_1 = 90\ \text{km/h};\ v_2 = -80\ \text{km/h}$$

$$u = (v_1 - v_2) = 90\ \text{km/h} - (-80\ \text{km/h}) = 170\ \text{km/h}$$

   c) Los dos observadores medirán la misma velocidad para un móvil en el caso de que la velocidad relativa entre ellos sea nula.

8. Datos: v = 349 m/s; $v' = 340$ m/s

   a) La velocidad del viento respecto a la Tierra será la velocidad relativa entre el sistema de referencia Tierra y el sistema de referencia viento.

$$u = (v - v') = 349\ \text{m/s} - 340\ \text{m/s} = 9\ \text{m/s}$$

   b) Primero hemos de calcular el tiempo transcurrido, que será el mismo en ambos sistemas. Para ello, suponemos $x_0 = x_0' = 0$ y aplicamos la ecuación del MRU en el sistema S:

$$x = v\,t;\quad t = \frac{x}{v};\quad t = \frac{20\,000\ \text{m}}{349\ \text{m/s}} = 57{,}3\ \text{s}$$

   A continuación, aplicamos la ecuación del MRU, en el sistema S:

$$x' = v'\,t;\quad x' = 340\ \text{m/s} \cdot 57{,}3\ \text{s} = 19\,482\ \text{m}$$

$$x' = 19\,482\ \text{km}$$

Cuadro del margen (pág. 297)

La Tierra puede considerarse un sistema inercial en un trayecto por carretera y en el ascenso al Everest. Pero no puede ser considerada como tal en el descenso y aterrizaje de una nave espacial y en el desplazamiento de una tormenta por Asia.

Transformaciones inversas (pág. 299)

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= y \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= x' + ut \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

3. LIMITACIONES DE LA FÍSICA CLÁSICA
(págs. 300 y 301)

9. Los físicos del siglo XIX suponían que el universo estaba lleno de éter porque creían que la luz necesitaba un medio material para propagarse. Y, como la luz llega a todo el universo, este medio, el éter, debía de llenarlo todo.

10. Las transformaciones de Galileo no afectan a las leyes de Newton. Pero la física clásica considera que sí afectan a las leyes de Maxwel, ya que éstas son válidas únicamente en un sistema en reposo absoluto o sistema del éter, el único sistema en que la velocidad de la luz es c.

11. Respuesta sugerida:

    El primer esfuerzo por medir la velocidad de la luz se debe a Galileo. Éste intentó medirla situando a dos personas, en dos colinas distantes 1 km, cada una con una linterna. En el momento en que destapaba la linterna, el otro debía destapar la suya. El primero debía medir el tiempo transcurrido entre estas dos acciones. Este método no dio un valor razonable de la velocidad de la luz, dada la gran celeridad de ésta.

    En 1676 Ole Römer calculó la velocidad de la luz observando los tiempos de ocultación de los satélites de Júpiter.

    Cuando la Tierra se acerca a Júpiter, el eclipse se produce antes de lo esperado y, cuando la Tierra se aleja, se produce después. Midiendo las diferencias de tiempo entre el primer caso y el segundo se puede determinar la velocidad de la luz.

    La primera medida no astronómica de la velocidad de la luz fue realizada por el físico francés A. Fizeau en 1849 (método de la rueda dentada). El también físico francés J. Foucault mejoró la medida de la velocidad de la luz en 1850 (método del espejo giratorio).

    Los dos métodos anteriores se basaron en dividir la luz en destellos, después de rebotar en un espejo lejano, y medir su desfase con los destellos incidentes.

El método actual se basa en principios similares, aunque los destellos los proporciona un oscilador eléctrico (método de la célula de Kerr).

12. **Observación.** La Tierra se mueve en el universo.

Hipótesis. La Tierra se mueve con una velocidad determinada respecto de un sistema en reposo absoluto denominado sistema del éter.

Experiencia. El experimento de Michelson-Morley intentó medir la variación de la velocidad de la luz debida al movimiento de la Tierra para, de esta manera, hallar la velocidad de la Tierra respecto al sistema del éter.

Resultado. La velocidad de la luz respecto al éter no depende del movimiento de la Tierra.

Nueva hipótesis, coherente con los resultados experimentales. La velocidad de la luz es constante e independiente del movimiento del observador y del movimiento de la fuente emisora. La comprobación experimental de las hipótesis permite descartar hipótesis falsas y elaborar otras nuevas coherentes con los datos experimentales.

13. El sistema de referencia S' corresponde a la Tierra.

El sistema de referencia S' corresponde al éter.

Por tanto, la velocidad de la luz respecto a S' se calcula de la siguiente manera:

Recorrido P $\rightarrow$ M_1:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} = \vec{c} - \vec{u}$$

Recorrido M_1 $\rightarrow$ P:

$$\vec{v}' = \vec{v} - (-\vec{u}) = \vec{c} + \vec{u}$$

14. *a)* No, no puede explicarse. Si la luz es una onda parecida al sonido, necesita un medio material de propagación y su velocidad se suma, o se resta, a la de este medio.

b) No puede existir un sistema del éter, ya que la velocidad de la luz no depende del sistema de referencia en que se mida. Así, no es necesario un sistema de referencia privilegiado, el sistema del éter, y la luz no nos permite medir velocidades absolutas.

c) Estos resultados permiten concluir que la hipótesis inicial no era correcta. Aunque puede ocurrir que la resolución de los instrumentos de medida sea insuficiente, que el éter se mueva con la Tierra, o que los objetos se contraigan en el sentido del movimiento, hay que estar abierto para aceptar nuevas hipótesis que sí estén de acuerdo con los resultados experimentales.

4. MECÁNICA RELATIVISTA: RELATIVIDAD ESPECIAL

(págs. 302, 303, 305, 306, 307, 308, 309, 310 y 311)

15. Según las transformaciones de Galileo, si dos sistemas de referencia S' y S se mueven con una velocidad relativa v', cada uno mide una velocidad de la luz diferente: si el primero mide una velocidad c, el segundo mide una velocidad c + u. Por tanto, las transformaciones de Galileo no dejan invariante el valor de la velocidad de la luz.

16. **Postulado 1.** Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

Este postulado señala que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes en la descripción de cualquier fenómeno físico.

Postulado 2. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, cualesquiera que sean las velocidades de la fuente y del observador.

Este postulado nos indica que el valor de la velocidad de la luz, medido desde un sistema inercial, es siempre el mismo.

Estos postulados no son compatibles con la teoría del éter, ya que considera equivalentes todos los sistemas de referencia inerciales y, por tanto, no cree en la existencia de ningún sistema de referencia absoluto.

— El valor de la velocidad de la luz no cambia tanto si nos dirigimos hacia la fuente luminosa como si nos alejamos de ella (segundo postulado). Así pues, no podemos aplicar las transformaciones de Galileo a la velocidad de la luz.

17. Datos: u = 0,6c

Calculamos las constantes β, $\dfrac{\beta}{c}$ y γ:

$$\beta = \frac{u}{c} = 0{,}6; \quad \frac{\beta}{c} = 2 \cdot 10^{-9}\ \frac{s}{m}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}25$$

Transformaciones de Galileo:

$$x' = x - 0{,}6c\ t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Transformaciones de Lorentz:

$$x' = 1{,}25\ (x - 0{,}6c\ t)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = 1{,}25\ (t - 2 \cdot 10^{-9}\ x)$$

No, las transformaciones no son equivalentes.

18. No es necesario utilizar las transformaciones de Lorentz en la vida cotidiana, ya que las velocidades a que nos movemos son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Por tanto:

$$\beta = \frac{u}{c} \approx 0 \quad y \quad \gamma \approx 1$$

Entonces, las transformaciones de Lorentz se reducen a las de Galileo.

19. Datos: x = 100 m; t = 10 s; u = 0,5c

$$\beta = \frac{u}{c} = 0{,}5; \quad \frac{\beta}{c} = 1{,}7 \cdot 10^{-9}\ \frac{s}{m}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}155$$

Calculamos la nueva distancia y el tiempo gracias a las transformaciones de Lorentz:

$$x' = 1{,}155\ (x - 0{,}5c\ t)$$

$$x' = 1{,}155\ (100\ m - 0{,}5 \cdot c \cdot 10\ s)$$

$$x' = -1{,}73 \cdot 10^9\ m$$

La distancia recorrida es el valor absoluto del resultado: $1{,}73 \cdot 10^9$ m

Calculamos el tiempo:

$$t' = 1{,}155 \left(10\,s - 1{,}7 \cdot 10^{-9}\ \frac{s}{m} \cdot 100\ m\right) = 11{,}5\ s$$

20. *a)* Sí, ya que el tiempo es el mismo para todos los sistemas de referencia.

b) No, ya que el tiempo depende del sistema de referencia.

21. Si la velocidad del globo es cercana a la velocidad de la luz, desde la tierra no verán simultáneamente los relámpagos. Primero verán el que ha caído bajo el globo y, después, el que ha caído sobre el globo.

22. Datos: l' = 60 m; d = $\frac{l'}{2}$ = 30 m; u = 0,8c

a) El observador fijo en la Tierra ve los rayos simultáneamente, pues la velocidad de la luz es constante y ambos rayos recorren la misma distancia.

b) El vagón situado en el sistema de referencia S' se mueve hacia el relámpago anterior y se aleja del posterior. Por ello, verá antes el relámpago anterior. Ambos relámpagos no serán simultáneos para él.

Si el primer relámpago llega al pasajero cuando ha pasado un tiempo t', ha recorrido un espacio: x' = u t'; por tanto, el relámpago ha recorrido el espacio: $d - u\,t_1$

Calculamos el tiempo que tarda el relámpago en recorrer este espacio:

$$d - u\,t_1 = c\,t_1;\ d = c\,t_1 + u\,t_1;\ d = (c + u)\ t_1$$

$$t_1 = \frac{d}{c+u} = \frac{d}{c+0{,}8c} = \frac{30\ m}{1{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s}$$

$$t_1 = 5{,}56 \cdot 10^{-8}\ s$$

En cambio, el relámpago posterior ha recorrido un espacio:

$$x + u\,t_2$$

siendo t_2 el tiempo que tarda en llegar el segundo relámpago.

Calculamos t_2 a partir de la expresión:

$$x + u\,t_2 = c\,t_2$$

$$t_2 = \frac{x}{c-u} = \frac{d}{c-0{,}8c} = \frac{30\ m}{0{,}2 \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s}$$

$$t_2 = 5 \cdot 10^{-7}\ s$$

La diferencia de tiempo que percibe O' es:

$$t_2 - t_1 = 5 \cdot 10^{-7}\ s - 5{,}56 \cdot 10^{-8}\ s$$

$$t_2 = 4{,}4 \cdot 10^{-7}\ s$$

23. Datos: Δt = 5 min = 300 s; $\beta = \frac{u}{c} = 0{,}7$;

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}4$$

Calculamos Δt' para el viajero:

$$\Delta t' = \gamma\ \Delta t = 1{,}4 \cdot 300\,s = 420\,s$$

$$420\,s \cdot \frac{1\ min}{60\,s} = 7\ min$$

24. Datos: Δt' = 8,4 s; u = 0,8c; $\beta = \frac{u}{c} = 0{,}8$;

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}67$$

a) Calculamos el período visto en la Tierra:

$$\Delta t = \gamma\ \Delta t'; \quad \Delta t = 1{,}67 \cdot 8{,}4\,s = 14\,s$$

b) El período propio se mide desde un sistema solidario con el péndulo; en nuestro caso, el tren. Por tanto, el período propio será de 8,4 s.

25. Datos: u = 0,6c; Δx' = 340 m; Δy' = 21 m

Calculamos las constantes β y γ:

$$\beta = \frac{u}{c} = \frac{0{,}6c}{c} = 0{,}6; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}25$$

Calculamos las longitudes que mediría un observador fijo en la Tierra:

$$\Delta y = \Delta y' = 21\ m \text{ de alto}$$

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\ \Delta x'; \quad \Delta x = \frac{1}{1{,}25}\ 340\ m = 272\ m \text{ de largo}$$

26. Datos: u = 0,8c; Δx = 150 m; Δy = 18 m

Calculamos las constantes β y γ:

$$\beta = \frac{0{,}8c}{c} = 0{,}8; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}667$$

Calculamos las longitudes que mediría un observador fijo en la Tierra:

$$\Delta y' = \Delta y = 18\ m \text{ de alto}$$

$$\Delta x' = \gamma\ \Delta x = 1{,}667 \cdot 150\ m = 250\ m \text{ de largo}$$

27. *a)* Datos: $\vec{u} = (-0{,}9c, 0)$; $\vec{v} = (0{,}9c, 0)$

$$\beta = \frac{u}{c} = 0{,}9 \text{ para las dos naves}$$

Calculamos v' a partir de la fórmula relativista de adición de velocidades:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\, u}{c^2}} = \frac{0{,}9c - (-0{,}9c)}{1 - \dfrac{0{,}9c\,(-0{,}9c)}{c^2}}$$

$$v'_x = 0{,}994c$$

Por tanto: $\vec{v}' = (0{,}994c, 0)$

b) $\vec{u} = (-0{,}9c, 0)$; $\vec{v} = (0, 0{,}9c)$

Calculamos v' a partir de la fórmula de la adición relativista de velocidades:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\, u}{c^2}} = \frac{0{,}9c - 0}{1 - \dfrac{0 \cdot 0{,}9c}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)}{1 - \dfrac{v_x\, u}{c^2}} = \frac{0{,}9c\left(\sqrt{1-0{,}9^2}\right)}{1 - \dfrac{0 \cdot 0{,}9c}{c^2}}$$

$$v'_y = 0{,}392c$$

La velocidad de la nave A, vista desde B, será (0,9c, 0,392c).

28. Respuesta sugerida:

Aspectos sorprendentes de la mecánica relativista:

— La longitud de los cuerpos depende del sistema de referencia en que se miden.

— El tiempo también depende del sistema de referencia en que lo midamos.

— La suma de velocidades relativista no es una suma de las componentes de las velocidades iniciales.

— La simultaneidad depende del sistema de referencia desde el que miro los sucesos.

Simultaneidad

Mecánica clásica:

— La simultaneidad no depende del sistema de referencia desde el que observemos los sucesos, ya que el tiempo es el mismo para todos los observadores.

Mecánica relativista:

— Dos sucesos simultáneos en un sistema de referencia no tienen por qué serlo en otro.

Dilatación del tiempo

Mecánica clásica:

— El transcurso del tiempo es independiente del observador que lo mida.

Mecánica relativista:

— La dilatación del tiempo es consecuencia de las transformaciones de Lorentz.

Contracción de longitudes

Mecánica clásica:

— La longitud de un cuerpo no depende del observador que lo mida.

Mecánica relativista:

— Debido a las transformaciones de Lorentz, un cuerpo situado en un sistema inercial parece contraído si se observa desde otro sistema de referencia inercial en movimiento respecto al primero, aunque únicamente en la dirección del desplazamiento relativo.

Adición de velocidades

Mecánica clásica:

— La adición de velocidades se efectúa como suma vectorial de las velocidades iniciales. Por tanto, si tiramos una pelota con velocidad c desde un tren que viaja a la velocidad de la luz c, la pelota saldría disparada con velocidad 2c.

Mecánica relativista:

— A causa de las transformaciones de Lorentz, la adición de velocidades relativista no es suma vectorial de las velocidades iniciales. No podríamos, en este caso, tirar una pelota con velocidad c porque ningún cuerpo con masa puede alcanzarla.

29. Al acelerar 1 g de oro hasta una velocidad de 0,9c, la mecánica relativista determina que un observador en reposo que vea el oro moviéndose a 0,9c no lo verá con una masa de 1 g, sino con una de 2,3 g. Pero esto no significa que aumente su número de átomos, que seguirá siendo siempre el mismo, sino que la masa de cada átomo, vista en movimiento a esa velocidad, aumenta en un factor 2,3.

30. *a)* Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; v = 0,9c

Calculamos β y γ, y la masa vista desde el observador en reposo:

$$\beta = \frac{v}{c} = 0{,}9; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2{,}294$$

$$m = \gamma\, m_e = 2{,}294 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg} = 2{,}09 \cdot 10^{-30}\text{ kg}$$

b) Datos: v = 0,99c

Determinamos β y γ para hallar la masa relativista:

$$\beta = \frac{v}{c} = 0{,}99; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 7{,}089$$

$$m = \gamma\, m_e = 7{,}089 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg} = 6{,}45 \cdot 10^{-30}\text{ kg}$$

c) Datos: v = 250 m/s

Para calcular γ, tomaremos $c = 3 \cdot 10^8\ m{\cdot}s^{-1}$:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{250\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{3\cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}} = 8{,}33\cdot 10^{-7}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1;\quad m \approx m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

La velocidad en este caso es mucho más pequeña que la velocidad de la luz, por lo que los efectos relativistas son despreciables y la masa es prácticamente la misma que en reposo.

31. Datos: $m_0 = 270$ kg; $v = 0{,}8c$

a) Consideramos el Sol en reposo y el meteorito moviéndose respecto a él a $v = 0{,}8c$. Las constantes β y γ serán:

$$\beta = \frac{v}{c} = 0{,}8;\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1{,}667$$

y la masa del meteorito:

$$m = \gamma\, m_0 = 1{,}667 \cdot 270\ \text{kg} = 450\ \text{kg}$$

b) La masa propia del meteorito es su masa en reposo:

$$m_0 = 270\ \text{kg}$$

c) Si queremos que la masa en movimiento parezca el doble de la masa en reposo, debemos imponer $m = 2\ m_0$, de donde se deduce que $\gamma = 2$. Entonces, obtendremos la velocidad a partir de β:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2$$

Despejando β:

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2^2}} = 0{,}866$$

Como sabemos que $\beta = \dfrac{u}{c}$:

$$v = \beta\ c = 0{,}866c$$

Es decir, la masa parecerá el doble de la masa en reposo si se mueve a un 86,6 % de la velocidad de la luz.

32. Datos: $m_0 = 5\ 000$ kg; $u = 0{,}9c$; $\beta = \dfrac{u}{c} = 0{,}9$;

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 2{,}29$$

Calculamos la masa relativista:

$$m = \gamma\, m_0 = 2{,}29 \cdot 5\ 000\ \text{kg} = 11\ 450\ \text{kg}$$

Calculamos el incremento de masa:

$$\Delta m = m - m_0 = 11\ 450\ \text{kg} - 5\ 000\ \text{kg} = 6\ 450\ \text{kg}$$

— Aplicamos la expresión de la energía cinética para hallar la energía suministrada:

$$Ec = \Delta m\ c^2 = 6\ 450\ \text{kg}\ (3\cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2$$

$$Ec = 5{,}8 \cdot 10^{20}\ \text{J}$$

33. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $u = 0{,}3c$; $\beta = 0{,}3$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}3^2}} = 1{,}048$$

Calculamos el incremento de masa:

$$m = \gamma\, m_0 = 1{,}048 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

$$m = 9{,}54 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

$$\Delta m = m - m_0 = 4{,}4 \cdot 10^{-32}\ \text{kg}$$

El incremento de energía será:

$$E = \Delta m\ c^2 = 3{,}96 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

El incremento de energía cinética clásica será:

$$\Delta Ec = \frac{1}{2}\, m_c\, v^2 = \frac{1}{2}\, m_c\ (0{,}3c)^2$$

$$\Delta Ec = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\ (0{,}3 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2$$

$$\Delta Ec = 3{,}69 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$$

Las dos energías son parecidas debido a que la velocidad final del electrón es pequeña respecto a la velocidad de la luz.

34. La energía de un cuerpo en reposo no es nula desde el punto de vista relativista, ya que tiene una energía debida a su masa en reposo e igual a $m_0\ c^2$.

35. Al proporcionar energía a un cuerpo, éste la utiliza para aumentar su velocidad y su masa. Así, parece posible aumentar la masa de un cuerpo proporcionándole energía. Sin embargo, cada vez necesitará más energía para aumentar su masa y su velocidad:

$$m = \gamma\, m_0$$

36. $m_{01} = m_{02} = 0{,}003$ kg

$$v_1 = v_2 = 0{,}8c;\ \beta = \frac{v'}{c} = 0{,}8$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67$$

a) Calculamos la masa relativista antes del choque:

$$m_1 = m_2 = \gamma\, m_0 = 1{,}67 \cdot 0{,}003\ \text{kg}$$

$$m_1 = m_2 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} = 5\ \text{g}$$

b) Calculamos la energía de las dos partículas antes del choque:

$$E_1 = \Delta m_1\ c^2 = 0{,}002\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2$$

$$E_1 = 1{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{J}$$

$$E_2 = \Delta m_2\ c^2 = 1{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{J}$$

c) La masa final será la suma de las masas relativistas:

$$M_0 = \frac{E}{c^2} = \frac{E_1 + E_2}{c^2} = \frac{m_1\, c^2 + m_2\, c^2}{c^2}$$

$$M_0 = m_1 + m_2 = 5\ \text{g} + 5\ \text{g} = 10\ \text{g}$$

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 312)

a) Respuesta sugerida:

El problema principal es que la idea puede ser falsa o parcialmente incorrecta y no ajustarse, por tanto, a la realidad.

b) Respuesta sugerida:

No, las teorías científicas de Newton fueron un gran avance para la ciencia y para la humanidad. De hecho, las teorías de Einstein son las únicas válidas para los cuerpos con velocidades próximas a la de la luz pero se reducen a las ecuaciones de Newton para velocidades más pequeñas.

c) Respuesta sugerida:

Es importante destacar que, por mucho que una teoría se ajuste a los hechos experimentales, siempre puede existir un nuevo experimento o descubrimiento que exija una teoría más completa. También ha de tenerse en cuenta que es necesario que esta teoría más completa incluya la anterior como caso particular.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS
(págs. 314 y 315)

37. Datos: $\vec{u} = (0{,}7c, 0);\ \vec{v}' = (0{,}8c, 0)$

— Aplicamos la ley de adición de velocidades clásica:

$$v_x = v_x' + u_x = 0{,}7c + 0{,}8c = 1{,}5c$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} = (1{,}5c,\ 0)$$

Por tanto, el electrón saldría despedido a una velocidad mayor que la de la luz.

— Aplicamos la adición relativista de velocidades:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\, u}{c^2}}$$

$$v'_x \left(1 - \frac{v_x\, u}{c^2}\right) = v_x - u$$

$$v'_x - v_x \frac{v'_x\, u}{c^2} = v_x - u$$

$$v'_x + u = v_x + v_x \frac{v'_x\, u}{c^2}$$

$$v'_x + u = v_x \left(1 - \frac{v'_x\, u}{c^2}\right)$$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \dfrac{v'_x\, u}{c^2}} = \frac{0{,}8c + 0{,}7c}{1 + \dfrac{0{,}8c \cdot 0{,}7c}{c^2}} = 0{,}962c$$

Por tanto, la velocidad respecto al laboratorio es:

$$\vec{v} = (0{,}962c, 0)$$

38. Datos: $\vec{u} = (0{,}8c, 0);\ \vec{v}' = (0, 0{,}4c)\ ;\ \beta = \dfrac{u}{c} = 0{,}8$

Debemos hallar la velocidad v del módulo espacial respecto a la Tierra:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \dfrac{v'_x\, u}{c^2}} = \frac{0 + 0{,}8c}{1 + \dfrac{0{,}8c \cdot 0}{c^2}} = 0{,}8c$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \dfrac{v_x\, u}{c^2}};\quad v'_y \left(1 - \frac{v_x\, u}{c^2}\right) = v_y \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$v_y = v'_y \frac{1 - \dfrac{v_x\, u}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0{,}4c \frac{1 - \dfrac{0{,}8c \cdot 0{,}8c}{c^2}}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} = 0{,}24c$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (0{,}8c, 0{,}24c)$$

39. Datos: $\Delta t' = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ s; $v = 0{,}9c$; $u = v = 0{,}9\ c$; $\beta = 0{,}9$

a) Aplicamos la dilatación temporal:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}};\quad \Delta t = \frac{2{,}6 \cdot 10^{-8}\ s}{\sqrt{1 - 0{,}9^2}} = 6{,}0 \cdot 10^{-8}\ s$$

Calculamos la distancia recorrida:

$$x = v\, \Delta t = 0{,}9c \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-8}\ s$$

$$x = 0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^8\ m{\cdot}s^{-1} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-8}\ s = 16{,}2\ m$$

b) Desde el punto de vista del pion, el laboratorio se mueve a 0,9c. Para determinar la distancia recorrida por el pion en S' aplicamos la contracción de longitudes:

$$x' = x \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = 16{,}2\ m \cdot \sqrt{1 - 0{,}9^2} = 7{,}1\ m$$

40. Datos: $v = 0{,}95c$; $\beta = 0{,}95$; $\Delta x = 2$ m; $\Delta y = 1$ m; $\Delta t = 6{,}4$ s

a) Aplicamos la fórmula de contracción de longitudes:

$$\Delta x' = \Delta x\ \sqrt{1 - \beta^2} = 2\ m \cdot \sqrt{1 - 0{,}95^2}$$

$$\Delta x' = 0{,}6\ m \text{ de largo}$$

$$\Delta y' = \Delta y = 2\ m \text{ de ancho}$$

b) Calculamos el tiempo visto desde un observador de la estación, Δt'. Tenemos en cuenta que éste habrá observado la contracción relativista del tiempo según la fórmula relativista:

$$\Delta t' = 6{,}4\ s$$

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \beta^2} = 6{,}4\ s \cdot \sqrt{1 - 0{,}95^2} = 2\ s$$

41. Datos: $E = 500$ N/C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $Q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

a) Calculamos el valor de la fuerza eléctrica:

$$\left|\vec{F}\right| = \left|Q\ E\right| = \left|-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 500\ \frac{N}{C}\right|$$

$$\left|\vec{F}\right| = 8 \cdot 10^{-17}\ N$$

b) Aplicamos el teorema del impulso en la dirección del movimiento:

$$F\ t = \Delta p = m_0\ c - m_0\ v_0;\ F\ t = m_0\ c$$

$$t = \frac{m_0\ c}{F} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 3 \cdot 10^{8}\ m{\cdot}s^{-1}}{8 \cdot 10^{-17}\ N}$$

$$t = 3{,}4 \cdot 10^{-6}\ s$$

c) Aplicamos de nuevo el teorema del impulso, teniendo en cuenta que en la mecánica relativista la masa varía con la velocidad:

$$F\ t = m\ v;\ \text{donde}\ v = c\ \beta\ \text{y}\ m = \gamma\ m_0$$

$$F\ t = \frac{m_0\ c\ \beta}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \frac{F^2\ t^2}{m_0^{\ 2}\ c^2} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

Despejamos β y sustituimos los datos del enunciado:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_0^{\ 2}\ c^2}{F^2\ t^2}}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg)^2\ (3 \cdot 10^{8}\ m{\cdot}s^{-1})^2}{(8 \cdot 10^{-17}\ N)^2\ (3{,}4 \cdot 10^{-6}\ s)^2}}} = 0{,}71$$

El electrón alcanza el 71 % de la velocidad de la luz.

42. $E = 1\,000\ N/C$; $t = 1\ ms = 10^{-3}\ s$; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg$; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$

a) Calculamos el valor de la fuerza eléctrica:

$$F = Q\ E = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 1\,000\ N/C$$

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-16}\ N$$

b) Para calcular la velocidad final del protón aplicamos de nuevo el teorema del impulso, teniendo en cuenta que en la mecánica relativista la masa varía con la velocidad:

$$F\ t = m\ v,\ \text{donde}\ v = c\ \beta\ \text{y}\ m = \beta\ m_0$$

$$F\ t = \frac{m_0\ c\ \beta}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \frac{F^2\ t^2}{m_0^{\ 2}\ c^2} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

Despejamos β y sustituimos los datos del enunciado:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_0^{\ 2}\ c^2}{F^2\ t^2}}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg)^2\ (3 \cdot 10^{8}\ m{\cdot}s^{-1})^2}{(1{,}6 \cdot 10^{-16}\ N \cdot 10^{-3}\ s)^2}}} = 0{,}3$$

Es decir, el cuerpo alcanza el 30 % de la velocidad de la luz.

43. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$

a) La energía mínima se obtiene cuando todas las partículas quedan en reposo después del choque:

$$E_{inicial} = E_{final} = 4\ m_e\ c^2$$

$$E_{inicial} = 4 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg\ (3 \cdot 10^{8}\ m{\cdot}s^{-1})^2$$

$$E_{inicial} = 3{,}28 \cdot 10^{-13}\ J$$

La energía relativista de cada electrón es:

$$E = \frac{E_{\ inicial}}{2} = \frac{3{,}28 \cdot 10^{-13}\ J}{2} = 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ J$$

b) Calculamos la masa relativista de un electrón a partir de su energía relativista:

$$E = m\ c^2$$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{2\ m_e\ c^2}{c^2} = 2\ m_e = 1{,}82 \cdot 10^{-30}\ kg$$

Por lo tanto, es el doble de la masa en reposo.

c) Para hallar la velocidad del electrón, igualamos la masa obtenida con la definición de masa relativista:

$$m = 2\ m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \sqrt{1-\beta^2} = 0{,}5$$

de donde β = 0,87. Es decir, la velocidad de cada electrón es igual al 87 % de la velocidad de la luz.

44. Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg$

a) La energía mínima se obtiene cuando las seis partículas quedan en reposo. Aplicando la conservación de la energía:

$$E_{inicial} = E_{final} = 6\ m_p\ c^2$$

$$E_{inicial} = 6 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg\ (3 \cdot 10^{8}\ m{\cdot}s^{-1})^2$$

$$E_{inicial} = 9 \cdot 10^{-10}\ J$$

La energía mínima ha de ser de $9 \cdot 10^{-10}$ J.

La energía mínima de cada protón ha de ser, por tanto:

$$E = \frac{6\ m_p\ c^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-10}\ J}{2} = 4{,}5 \cdot 10^{-10}\ J$$

b) Calculamos la masa relativista del protón a partir de su energía relativista: $E = m\ c^2$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{3\ m_p\ c^2}{c^2} = 5{,}01 \cdot 10^{-27}\ J$$

c) Hallamos la energía cinética de cada protón incidente a partir del incremento de masa:

$$\Delta Ec = \Delta m\ c^2 = (3\ m_p - m_p)\ c^2 = 2\ m_p\ c^2$$

$$\Delta Ec = 3 \cdot 10^{-10}\ J$$

d) Para hallar la velocidad del protón igualamos la masa obtenida con la definición de masa relativista:

$$m = 3\ m_p = \frac{m_p}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{3}$$

de donde β = 0,94. Por tanto, v = 0,94c.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 316 y 317)

45. Decimos que un coche se pone en marcha cuando se mueve respecto a un sistema de referencia fijo en el suelo. Como nosotros somos solidarios con este sistema de referencia por estar parados respecto a él, decimos que el otro coche es el que se mueve.

No se vulnera el principio de relatividad, puesto que la afirmación que es el otro coche el que se mueve es cierta en el sistema de referencia fijo en el suelo.

46. Por el principio de relatividad de Einstein, la velocidad de la luz no depende del observador; por tanto, no depende de su dirección ni de la velocidad relativa entre fuente y receptor.

47. Las principales consecuencias de las transformaciones de Lorentz son la dilatación del tiempo, la contracción de longitudes y la relativización del concepto de simultaneidad.

48. Para que un cuerpo alcanzara la velocidad de la luz deberíamos aplicarle una fuerza infinita, según la mecánica relativista.

49. El principio de equivalencia entre la masa y la energía afirma que la masa y la energía son dos aspectos del mismo fenómeno y que, por tanto, la masa puede presentarse en forma de energía, y viceversa.

50. Datos: $\vec{u} = 100\ \text{km/h};\ \vec{v}\,'_1 = 10\ \text{km/h}$

$\Delta t = 10\ \text{s} = 2{,}78 \cdot 10^{-3}\ \text{h};\ \vec{v}\,'_2 = 12\ \text{km/h}$

a) Aplicamos las transformaciones de Galileo para calcular la velocidad de la motocicleta respecto a la autopista:

$$\vec{v}\,'_1 = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}\,'_1 + \vec{u} = 10\ \text{km/h} + 100\ \text{km/h}$$

$$\vec{v}_1 = 110\ \text{km/h}$$

La velocidad $\vec{v}\,'_2$ de la motocicleta 10 s después es:

$$\vec{v}\,'_2 = 12\ \text{km/h}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}\,'_2 + \vec{u} = 12\ \text{km/h} + 100\ \text{km/h}$$

$$\vec{v}_2 = 112\ \text{km/h}$$

b) Calculamos la aceleración de la motocicleta respecto al automóvil:

$$a' = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{12\ \text{km/h} - 10\ \text{km/h}}{2{,}78 \cdot 10^{-3}\ \text{h}} = 719\ \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

$$719\ \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot \frac{1\ \text{h}^2}{(3\,600\ \text{s})^2} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 0{,}06\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Utilizamos las transformaciones de Galileo para hallar la aceleración respecto a la autopista:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' = 719\ \frac{\text{km}}{\text{h}^2} = 0{,}06\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) Utilizamos las ecuaciones de la cinemática para calcular el tiempo que tarda en superar la velocidad límite de la autopista.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\ t$$

$$t = \frac{v - v_0}{a};\ \text{en nuestro caso, } v = 120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_0 = 112\ \text{km/h};\ a = 719\ \text{km/h}^2$$

$$t = \frac{120\ \text{km/h} - 112\ \text{km/h}}{719\ \text{km/h}^2}$$

$$t = 0{,}01\ \text{h} = 40\ \text{s}$$

51. Datos: $m = 10$ kg

$\vec{r}(t) = (10\ t + t^2,\ 8\ t - t^2)$

$\vec{u} = (10,\ 0)$ m/s

Aplicamos las transformaciones de Galileo:

$$x' = x - u\ t = 10\ t + t^2 - 10\ t = t^2$$

$$y' = y = 8\ t - t^2$$

Por tanto:

$$\vec{r}(t) = (t^2,\ 8t - t^2)\ \text{m}$$

Derivamos el vector posición para calcular la velocidad:

$$\vec{v}(t) = (10 + 2t,\ 8 - 2t)\ \text{m/s}$$

Calculamos v' utilizando las transformaciones de Galileo:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u} = (10 + 2t,\ 8 - 2t) - (10,\ 0)$$

$$\vec{v}\,' = (2t,\ 8 - 2t)\ \text{m/s}$$

Calculamos la aceleración, que será la misma para los dos sistemas de referencia:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2, -2)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = (2, -2)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

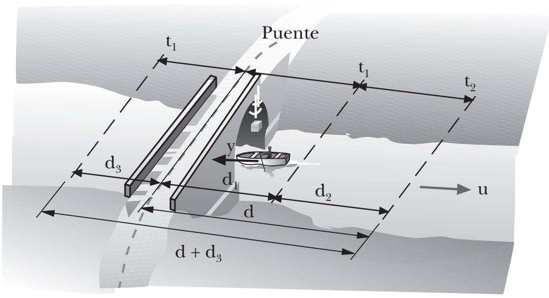
Calculamos la fuerza, que será igual para los dos observadores:

$$\vec{F}\,' = \vec{F} = m\ \vec{a} = 10\ \text{kg}\ (2, -2)\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{F}\,' = (20, -20)\ \text{N}$$

52. Datos: $t_1 = 15$ min = 900 s

d = 1 km = 1000 m



$$\left.\begin{array}{l} d_1 = u\,t_1;\quad d = u\,t_2 \\ d_3 = (v-u)\,t_1 \\ d_3 + d = (v+u)\,(t_2 - t_1) \end{array}\right\}$$

$$(v-u)\,t_1 + u\,t_2 = (v+u)\,(t_2-t_1)$$

$$v\,t_1 - u\,t_1 + u\,t_2 = v\,t_2 v\,t_1 + u\,t_2 - u\,t_1$$

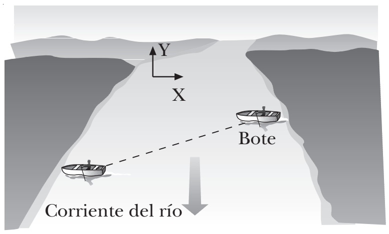
$$2v\,t_1 = v\,t_2$$

$$t_2 = 2t_1; t_2 = 2\cdot 15\text{ min};\quad t_2 = 30\text{ min}$$

$$d = u\,t_2;\quad u = \frac{1\,000\text{ m}}{30\text{ min}\,\dfrac{60\text{ s}}{1\text{ min}}};\quad u = 0{,}55\text{ m/s}$$

$$u = \frac{1\text{ km}}{30\text{ min}\,\dfrac{1\text{ h}}{60\text{ min}}} = 2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

53. Datos: $l = 2$ km; $\vec{v}_r = -3\vec{j}$ km/h; $\vec{v}_b = -4\vec{i}$ km/h



a) Calculamos la velocidad del bote visto desde la orilla:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_b = (4, -3)\text{ km/h}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2}\text{ km h}$$

$$|\vec{v}| = 5\text{ km/h}$$

b) Utilizamos las leyes de la cinemática para calcular el tiempo que tarda en atravesar el río:

$$x = x_0 + v_{0x}\,t$$

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} = \frac{2\text{ km}}{4\text{ km/h}} = \frac{1}{2}\text{ h} = 30\text{ min}$$

54. Datos: $d = 9$ años luz $= 9c \cdot$ año; $v = 0{,}8c$;

$$\beta = 0{,}8;\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67$$

a) Calculamos el tiempo que tarda para un observador de la Tierra:

$$v = \frac{d}{t};\quad t = \frac{d}{v} = \frac{9c\cdot a}{0{,}8c} = 11{,}25\text{ a}$$

Calculamos el tiempo para un observador de la nave:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = \frac{11{,}25}{1{,}67}\text{ a} = 6{,}75\text{ a}$$

Desde el punto de vista del astronauta, la distancia Tierra-Sirio será inferior a la distancia propia del sistema. Por ello, la distancia recorrida también será menor:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{9\text{ a.l.}}{1{,}67} = 5{,}4\text{ a.l.}$$

55. Datos: $\Delta x' = 115$ cm $= 1{,}15$ m; $\Delta y' = 89$ cm $= 0{,}89$ m; $v = 0{,}8c$; $\beta = 0{,}8$;

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67$$

a) Calculamos las dimensiones de la alfombra medidas por B:

$$\Delta y = \Delta y' = 0{,}89\text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \frac{1{,}15\text{ m}}{1{,}67} = 0{,}69\text{ m}$$

b) Calculamos el tiempo que observa A si para B ha transcurrido 1 min:

$$\Delta t = 1\text{ min}$$

$$\Delta t' = \gamma\,\Delta t = 1{,}67 \cdot 1\text{ min} = 1{,}67\text{ min}$$

Por tanto, el genio A mide:

$$\frac{85\text{ pulsaciones}}{1{,}67\text{ min}} = 51\,\frac{\text{pul}}{\text{min}}$$

56. *a)* $\vec{u} = (0{,}8c, 0)$; $\vec{v} = (0{,}9c, 0)$

Calculamos la velocidad de B medida desde A:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0{,}9c - 0{,}8c}{1 - \dfrac{0{,}8\cdot 0{,}9\,c^2}{c^2}} = 0{,}357c$$

b) $\vec{u} = (0{,}8c, 0)$; $\vec{v} = (-0{,}9c, 0)$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{-0{,}9c - 0{,}8c}{1 - \dfrac{0{,}8\cdot(-0{,}9)\,c^2}{c^2}} = -0{,}988c$$

c) $\vec{v} = (0, 0{,}9c)$; $\vec{u} = (0{,}8c, 0)$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0 - 0{,}8c}{1 - \dfrac{0\cdot 0{,}8\,c^2}{c^2}} = -0{,}8c$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0{,}9c\sqrt{1-0{,}8^2}}{1 - \dfrac{0\cdot 0{,}8c}{c^2}} = 0{,}54c$$

El módulo de la velocidad será:

$$v' = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2} = c\,\sqrt{0{,}8^2 + 0{,}54^2} = 0{,}965c$$

57. Datos: $\vec{v}_x = (0{,}6c, 0$; $\vec{u} = (0{,}4c, 0)$

Aplicamos la fórmula de adición relativista de velocidades:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{v_x\,u}{c^2}} = \frac{0{,}6c - 0{,}4c}{1 - \dfrac{0{,}6c\cdot 0{,}94c}{c^2}} = 0{,}26c$$

58. Datos: $m = 9m_0$

La expresión de la masa relativista es:

$$m = \gamma\, m_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, m_0$$

Por lo tanto, comparando con la expresión anterior:

$$m = 9m_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, m_0$$

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{9};\quad 1-\beta^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^2$$

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{9}\right)^2} = 0{,}994$$

Esto significa que la velocidad ha de ser:

$$u = 0{,}994c$$

No, porque la masa inicial no se anula. Sólo depende del factor en que incrementemos la masa.

59. Datos: $E = 4\, m_p\, c^2$

Calculamos la energía cinética a partir del incremento de masa:

$$Ec = 4\, m_p\, c^2 - m_p\, c^2 = 3\, m_p\, c^2$$

$$Ec = 3 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2$$

$$Ec = 4{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Calculamos la masa relativista a partir de su energía relativista:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{4\, m_p\, c^2}{c^2} = 4\, m_p$$

$$m = 4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} = 6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

60. La velocidad de un cuerpo en el sistema S' es:

$$v'_x = \frac{x'}{t'}$$

A partir de las ecuaciones de transformaciones de Lorentz sabemos que:

$$x' = \gamma(x - u\, t)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

La velocidad en S es, por lo tanto:

$$v'_x = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma\,(x-ut)}{\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right)}$$

Dividimos el numerador y el denominador por t:

$$v'_x = \frac{\frac{x}{t} - u\frac{t}{t}}{\frac{t}{t} - \frac{\beta}{c}\frac{x}{t}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{\beta}{c}v_x} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u\,v}{c^2}}$$

De la misma manera podemos deducir el valor de v' y a partir de las transformaciones de Lorentz:

$$y' = y$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

$$v'_x = \frac{y'}{t'} = \frac{y}{\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right)} = \frac{\frac{y}{t}}{\gamma\,\frac{t}{t} - \frac{\beta}{c}\frac{x}{t}}$$

$$v'_x = \frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{\beta}{c}v_x\right)} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v_x\, u}{c^2}}$$

61. Datos: $p = m\, v = \gamma\, m_0 v$; $E = m\, c^2 = \gamma\, m_0\, c^2$

Elevamos al cuadrado la energía:

$$E^2 = m^2\, c^4 = \gamma^2\, m_0^2\, c^4$$

Como $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-\beta^2}$

$$E^2 = \frac{m_0^2\, c^4}{1-\beta^2};\quad E^2 - E^2\,\beta^2 = m_0^2\, c^4$$

Sustituimos el valor de $E = \gamma\, m_0\, c^2$:

$$E^2 - \gamma^2\, m_0^2\, c^4\,\frac{v^2}{c^2} = m_0^2\, c^4$$

$$E^2 = \gamma^2\, m_0^2\, c^2\, v^2 + m_0^2\, c^4$$

Y recordamos la definición del momento, $p = \gamma\, m_0\, v$:

$$E^2 = p^2\, c^2 + m_0^2\, c^4$$

Ésta es la relación que buscábamos.

62. Datos: $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s

a) Consideramos que toda la energía proporcionada se utiliza en aumentar la velocidad:

$$E_{proporcionada} = Ec$$

$$|q|\,\Delta V = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

Despejamos el incremento de potencial:

$$\Delta V = \frac{m\, v^2}{2\,|q|} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1})^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}$$

$$\Delta V = 2{,}6 \cdot 10^5\ \text{V}$$

b) Aplicamos la expresión relativista de la energía:

$$E = \gamma\, m_0\, c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, m_0\, c^2$$

Despejamos β:

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0\ c^2}{E}\right)^2}$$

La energía es debida tanto a la masa en reposo como a la diferencia de potencial aplicada; por tanto:

$$E = m_0\ c^2 + |q|\ \Delta V$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0\ c^2}{m_0\ c^2 + |q|\ \Delta V}\right)^2}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 + 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}559 \cdot 10^5}\right)^2}$$

$\beta = 0{,}745$, por tanto; $v = 0{,}745c$

c) Calculamos la masa relativista del electrón:

$$\frac{m}{m_e} = \frac{\gamma\ m_e}{m_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}745)^2}} = 1{,}5$$

Por lo tanto:

$$m = 1{,}5\ m_e$$

63. Datos: $\Delta V = 400\,000$ V

a) Calculamos la energía cinética relativista y observamos que el resultado coincide con la energía cinética clásica:

$$Ec = \Delta m\ c^2 = (q\ \Delta V + m_0\ c^2) - m_0\ c^2$$

$$Ec = q\ \Delta V = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 400\,000\ \text{V}$$

$$Ec = 6{,}41 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

$$Ec = 6{,}41 \cdot 10^{-14}\ \text{J}\ \frac{1\ \text{eV}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 0{,}4\ \text{MeV}$$

b) Calculamos la velocidad que adquiere desde el punto de vista clásico:

$$Ec = \frac{1}{2}\ m\ v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\ Ec}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}41 \cdot 10^{-14}\ \text{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}}$$

$$v = 3{,}75 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 1{,}250c$$

Efectuamos ahora los cálculos desde el punto de vista relativista:

$$m = \gamma\ m_0\ c^2 = \frac{m_0\ c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Despejamos β:

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0\ c^2}{E}\right)^2}$$

La energía es debida tanto a la masa en reposo como a la diferencia de potencial. Por tanto:

$$E = m_0\ c^2 + |q|\ \Delta V$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0\ c^2}{m_0\ c^2 + |q|\ \Delta V}\right)^2}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 + 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 400\,000}\right)^2}$$

$$\beta = 0{,}828c$$

c) Calculamos la masa relativista:

$$m = \gamma\ m_0; \quad \frac{m}{m_0} = \gamma$$

$$\frac{m}{m_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}828^2}} = 1{,}783$$

Por tanto:

$$m = 1{,}783\ m_0$$

Calculamos la energía relativista:

$$E = \Delta m\ c^2 = 1{,}783\ m_0\ c^2 - m_0\ c^2$$

$$E = m_0\ c^2\ (1{,}783 - 1)$$

$$E = m\ c^2 = 1{,}783\ m_0\ c^2$$

$$E = 1{,}783 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\ (3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1})^2$$

$$E = 1{,}46 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

$$E = 1{,}46 \cdot 10^{-13}\ \text{J}\ \frac{1\ \text{MeV}}{1{,}602 \cdot 10^{-13}\ \text{J}} = 0{,}912\ \text{MeV}$$

64. Datos: $E = 80$ V/m; $t = 5$ s; $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_0 = 2 \cdot 10^{-26}$ kg

a) Calculamos la fuerza aplicada al ion:

$$F = q\ E = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 80\ \text{V/m} = 1{,}3 \cdot 10^{-17}\ \text{N}$$

b) Aplicamos el teorema del impulso para hallar la velocidad, teniendo en cuenta que en mecánica relativista la masa varía con la velocidad:

$$F\ t = m\ v_1 \text{ donde } v = c\ \beta,\ m = \gamma\ m_0$$

$$F\ t = \frac{m_0\ c\ \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \frac{F^2\ t^2}{m_0^{\ 2}\ c^2} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$$

Despejando β y sustituyendo los datos del enunciado:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_0^{\ 2}\ c^2}{F^2\ t^2}}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(2 \cdot 10^{-26}\ \text{kg})^2\ (3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1})^2}{(1{,}3 \cdot 10^{-17}\ \text{N})^2\ (5\ \text{s})^2}}} = 0{,}996$$

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad v = 0{,}996c$$

c) Calculamos la masa relativista:

$$\frac{m}{m_0} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}996)^2}} = 11{,}2$$

Por lo tanto: $m = 11{,}2\ m_0$

$$m = 11{,}2 \cdot 2 \cdot 10^{-26}\ kg = 2{,}24 \cdot 10^{-25}\ kg$$

Calculamos la energía cinética relativista:

$$Ec = \Delta m\ c^2 = \gamma\ m_0\ c^2 - m_0\ c^2 = m_0\ c^2\ (\gamma - 1)$$

$$Ec = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\ J$$

65. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg;

Reacción: $(e^- + e^-) \rightarrow (e^- + e^-) + 3\ (e^- + e^+)$

a) La energía mínima relativista se obtiene cuando las partículas quedan en reposo después del choque. Aplicamos el principio de conservación de la energía relativista:

$$E_{inicial} = E_{final} = 8\ m_e\ c^2$$

$$E_{inicial} = 8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg\ (3 \cdot 10^8\ m{\cdot}s^{-1})^2$$

$$E_{inicial} = 6{,}55 \cdot 10^{-13}\ J$$

Luego la energía relativista de cada electrón será:

$$E = \frac{E_{inicial}}{2} = \frac{8\ m_e\ c^2}{2} = 4\ m_e\ c^2$$

$$E = 3{,}28 \cdot 10^{-13}\ J = 2{,}05\ Mev$$

b) Calculamos la masa relativista de un electrón a partir de su energía relativista:

$$E = m\ c^2; \quad m = \frac{E}{c^2}; \quad m = \frac{4\ m_e\ c^2}{c^2} = 4\ m_e$$

$$m = 3{,}6 \cdot 10^{-30}\ kg$$

c) Hallamos la energía cinética de cada protón incidente a partir de su incremento de masa:

$$Ec = \Delta m\ c^2 = (4\ m_e - m_e)\ c^2 = 3\ m_e\ c^2$$

$$Ec = 3 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg\ (3 \cdot 10^8\ m{\cdot}s^{-1})^2$$

$$Ec = 2{,}5 \cdot 10^{-13}\ J = 1{,}5\ MeV$$

Para hallar la velocidad del electrón igualamos la masa obtenida con la definición de masa relativista:

$$m = 4\ m_e = \frac{m_e}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{4}$$

de donde β = 0,97. Por tanto, su velocidad será v = 0,97c.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 317)

1. *a)* Si el cohete se mueve a velocidad constante respecto de la Tierra, ambos pueden considerarse sistemas de referencia inerciales.

b) Las leyes de Newton se cumplen en el sistema S' únicamente si éste es un sistema inercial, es decir, si su velocidad es constante.

2. Datos: d = 6 km; t_s = 1 h; t_b = 36 min = 0,6 h

a) Aplicamos las leyes de la cinemática al subir:

$$d = (v - u)\ t_s$$

donde v es la velocidad del bote, y u es la velocidad del río.

Aplicamos las leyes de la cinemática al bajar:

$$d = (v + u)\ t_b$$

De esta manera, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, del que despejamos u:

$$\begin{cases} d = (v-u)\ t_s \\ d = (v+u)\ t_b \end{cases} \qquad \begin{cases} 6\ km = (v-u)\ 1\ h \\ 6\ km = (v+u)\ 0{,}6\ h \end{cases}$$

$$v = 6\ km/h + u$$

$$v = 10\ km/h - u$$

$$6\ km/h + u = 10\ km/h - u;\ 2\ u = 4\ km/h$$

$$u = 2\ km/h$$

b) Despejamos ahora la velocidad propia del bote, v:

$$v = 10\ km/h - u = 8\ km/h$$

3. El principio de relatividad de Galileo está de acuerdo con la invariabilidad de las leyes de la mecánica clásica entre sistemas inerciales; mientras que el de Einstein está de acuerdo también con la invariabilidad de las leyes electromagnéticas.

El primero sólo puede aplicarse en sistemas cuya velocidad sea muy inferior a la de la luz.

4. La teoría de la relatividad especial nació al estudiar las transformaciones de las leyes electromagnéticas entre sistemas inerciales. En concreto, el experimento de Michelson-Morley hizo necesarias la constancia de la velocidad de la luz y la no dependencia del sistema de referencia en que se mida.

5. Datos: $m = 2\ m_0$

La fórmula que relaciona la masa en reposo con la masa relativista es: $m = \gamma\ m_0$. Por tanto, $\gamma = 3$

Como $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\gamma^2}}$

entonces:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} = 0{,}942$$

La velocidad deberá ser de 0,866c.

6. — Veríamos los objetos cotidianos en movimiento más cortos, debido a la contracción de longitudes.

— Los movimientos de los objetos con una cierta velocidad se verían como a cámara lenta debido a la dilatación del tiempo.

— El concepto de simultaneidad no sería válido.

7. Datos: $m = 7m_0$

La energía relativista final ha de ser igual a la energía relativista inicial:

$$E_{inicial} = E_{final} = 7\ m_0\ c^2$$

Por tanto, la energía inicial de cada partícula ha de ser:

$$E = \frac{E_{final}}{2} = \frac{7}{2}\ m_0\ c^2$$

Para hallar la velocidad de la partícula, igualamos la energía obtenida con la definición de energía relativista:

$$E = \gamma\, m_0\ c^2 = \frac{7}{2}\ m_0\ c^2;\ \gamma = \frac{7}{2}\ ;\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{7}{2}\right)^2}} = 0{,}958$$

La velocidad de choque necesaria es de 0,958c, y es independiente de las partículas que choquen.

La energía cinética sí cambia porque depende de las partículas que colisionan:

$$Ec = \Delta m\ c^2 = (m - m_0)\ c^2 = (\gamma\, m_0 - m_0)\ c^2$$

$$Ec = (\gamma - 1\ )\ m_0\ c^2$$