6. Fenómenos ondulatorios

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 145)

- Las ondas mecánicas se definen como una perturbación que se propaga necesariamente a través de un medio material. La perturbación que transmiten es de tipo mecánico.

  Se define como onda transversal aquel movimiento ondulatorio en que la dirección de propagación de la perturbación y la dirección del movimiento de oscilación generado por la perturbación son perpendiculares.

  Se define como onda longitudinal aquel movimiento ondulatorio en que la dirección de propagación de la perturbación y la dirección del movimiento de oscilación generado por la perturbación son paralelas.

- La velocidad de propagación de una onda es la velocidad a la que se desplaza la perturbación a través del medio, mientras que la velocidad de vibración de una partícula afectada por la onda corresponde a la velocidad con que cada punto del medio afectado por la onda se mueve respecto de su punto de equilibrio.

- La velocidad de una onda en una cuerda tensa sólo depende de la tensión de la cuerda, T, y de su masa por unidad de longitud, μ: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

-

Ángulo φ	*sen φ*	*cos φ*
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	–1
$\frac{3\pi}{2}$	–1	0

- Datos: y = 0,5 sen (200t – 30x) (unidades SI)

  Determinamos la amplitud de la onda por comparación con la ecuación general de una onda armónica, y = A sen (ωt – kx):

  $$A = 0{,}5\ \text{m}$$

  De la misma manera, identificamos el número de ondas, $k = 30\ \text{m}^{-1}$, y la pulsación, $\omega = 200\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

  Hallamos la longitud de onda a partir del número de ondas:

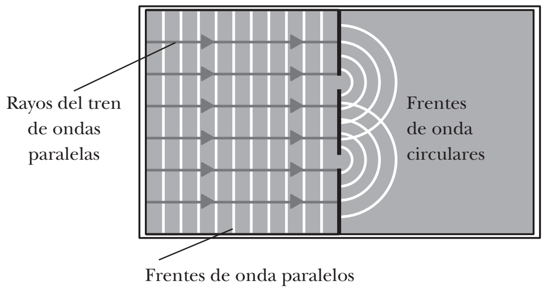
  $$k = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{30\ \text{m}^{-1}} = 0{,}21\ \text{m}$$

  Calculamos la velocidad de propagación de la onda a partir del número de ondas y de la pulsación:

  $$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{200\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{30\ \text{m}^{-1}} = 6{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1. FENÓMENOS BÁSICOS (págs. 147, 149 y 150)

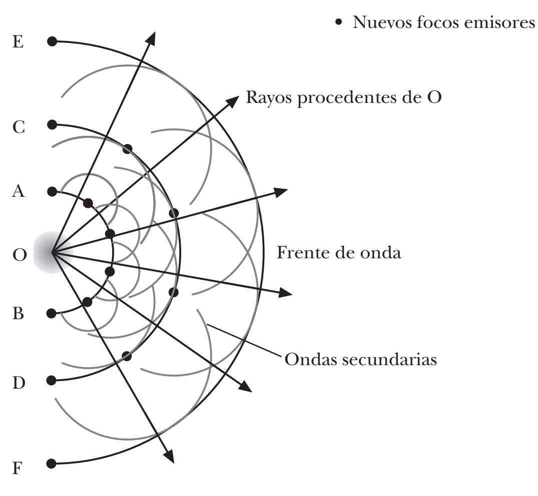
1.



2. *a)* **Falso.** De hecho, es cierto que siempre se produce difracción al interceptar la propagación de una onda. Pero sólo será apreciable cuando las dimensiones del objeto u orificio que intercepta la onda sean iguales o menores que la longitud de onda de la perturbación.

   b) **Cierto.** El principio de Huygens dice que todo punto de un frente de onda se convierte en un centro puntual productor de ondas secundarias.

3.



4. Datos: $n_{21} > 1$

— Como n_{21} es el cociente de velocidades, la velocidad en el nuevo medio es menor que en el medio 1:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} > 1; \quad v_1 > v_2$$

— La frecuencia se mantiene constante.

— El período, que es el inverso de la frecuencia, será también constante.

— La longitud de onda se relaciona con la velocidad y el período como $\lambda = v\,T$. Si T es constante y la velocidad v disminuye, también la longitud de onda será menor.

— El ángulo de refracción será menor que el ángulo de incidencia, ya que:

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = n_{21} > 1; \quad \text{sen}\, i > \text{sen}\, r; \quad i > r$$

5. Datos: $v_1 = 0{,}1\ m{\cdot}s^{-1}$; $\lambda_1 = 0{,}02$ m; i = 30°; $\lambda_2 = 0{,}01$ m

a) Hallamos la frecuencia de la onda a partir de su velocidad y su longitud de onda en el primer medio:

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{0{,}1\ m/s}{0{,}02\ m} = 5\ Hz$$

b) Determinamos la velocidad de la onda en el segundo medio a partir de la frecuencia, que se mantiene constante, y de la longitud de onda en este medio:

$$v_2 = \lambda_2\ f = 0{,}01\ m \cdot 5\ Hz = 0{,}05\ m/s$$

c) Calculamos el seno del ángulo de refracción a partir de la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\text{sen}\, r = \frac{v_2}{v_1} \cdot \text{sen}\, i = \frac{0{,}05\,m/s}{0{,}1\,m/s} \cdot \text{sen}\ 30° = 0{,}25$$

6. **Falso.** Esta afirmación es verdadera para las ondas polarizadas linealmente pero no en el caso de la polarización circular o elíptica. En éstas, las partículas del medio no vibran todas en el mismo plano, como en la polarización lineal, sino que cada una se mueve describiendo círculos en un plano perpendicular a la dirección de propagación.

7. La polarización es una característica de las ondas transversales porque consiste en limitar las direcciones de vibración de las partículas del medio. En el caso de las ondas longitudinales, la dirección de vibración está siempre limitada, ya que coincide con la dirección de propagación. Por tanto no tiene sentido hablar de polarización en ondas longitudinales.

8. No es posible polarizar las ondas sonoras ya que se trata de ondas longitudinales. Sólo es posible polarizar ondas transversales.

2. FENÓMENOS POR SUPERPOSICIÓN DE ONDAS (págs. 153, 155 y 160)

9. A pesar de que en el libro del alumno se ha estudiado el caso de la interferencia de ondas armónicas, la interferencia es un fenómeno propio de todos los tipos de movimiento ondulatorio.

10. Cuando dos ondas interfieren constructiva o destructivamente no se produce ninguna ganancia o pérdida de energía en el sistema, pero sí una redistribución de la energía. Los puntos donde las ondas interfieren constructivamente tendrán más energía, proveniente de los nodos o puntos de interferencia destructiva.

11. Datos: $y = 0{,}25 \cos [4\pi(10t - x)]$ (SI); r = 1,5 m; r'= 1,75 m

Si comparamos la ecuación del enunciado con la expresión de una onda armónica, obtenemos:

$$A = 0{,}25\ m;\ \omega = 40\pi\ rad{\cdot}s^{-1};\ k = 4\pi\ m^{-1}$$

a) Deducimos la longitud de onda a partir del número de ondas:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi\ m^{-1}} = 0{,}5\ m$$

b) Hallamos si la interferencia es constructiva o destructiva a partir del valor de la diferencia de recorridos:

$$r' - r = 1{,}75\ m - 1{,}5\ m = 0{,}25\ m$$

$$\frac{r' - r}{\lambda} = \frac{0{,}25\ m}{0{,}5\ m} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, como la diferencia de recorridos es un número impar de semilongitudes de onda, la interferencia en este punto es destructiva.

12. Datos: f = 40 Hz; $v = 20\ cm{\cdot}s^{-1} = 0{,}2\ m{\cdot}s^{-1}$

Calculamos la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0{,}2\ m/s}{40\ Hz} = 5 \cdot 10^{-3}\ m = 0{,}5\ cm$$

a) Determinamos el tipo de interferencia en el punto A a partir del valor de la diferencia de recorridos:

$$r' - r = 12\ cm - 10{,}5\ cm = 1{,}5\ cm$$

$$\frac{r' - r}{\lambda} = \frac{1{,}5\ cm}{0{,}5\ cm} = 3$$

Por tanto, como la diferencia de recorridos es un número entero de longitudes de onda, la interferencia en este punto es constructiva.

b) Determinamos el tipo de interferencia en el punto B a partir del valor de la diferencia de recorridos:

$$r' - r = 8\ cm - 6{,}25\ cm = 1{,}75\ cm$$

$$\frac{r' - r}{\lambda} = \frac{1{,}75\ cm}{0{,}5\ cm} = 3{,}5 = \frac{7}{2}$$

Por tanto, como la diferencia de recorridos es un número impar de semilongitudes de onda, la interferencia en este punto es destructiva.

c) Determinamos el tipo de interferencia en el punto C a partir del valor de la diferencia de recorridos:

$$r' - r = 9\ \text{cm} - 5\ \text{cm} = 4\ \text{cm}$$

$$\frac{r' - r}{\lambda} = \frac{4\ \text{cm}}{0{,}5\ \text{cm}} = 8$$

Por tanto, como la diferencia de recorridos es un número entero de longitudes de onda, la interferencia en este punto es constructiva.

13. Datos: r' = 26 cm = 0,26 m; r = 25,8 cm = 0,258 m; v = 1 200 m/s

La condición que cumple el primer nodo o mínimo de amplitud es:

$$r' - r = \frac{\lambda}{2}$$

Si tenemos en cuenta la relación entre la longitud de onda, la velocidad de propagación y la frecuencia, podemos escribir la condición del primer mínimo en la forma:

$$r' - r = \frac{v}{2f}; \quad f = \frac{v}{2\,(r' - r)}$$

$$f = \frac{1200\ \text{m/s}}{2\,(0{,}26\ \text{m} - 0{,}258\ \text{m})} = 3 \cdot 10^5\ \text{Hz}$$

14. a) **Cierto.**

b) **Cierto.** siempre que ambas tengan la misma velocidad de propagación, ya que en este caso tendrán también distinta frecuencia.

c) **Falso.** No aparecerán pulsaciones a no ser que también tengan frecuencias próximas.

d) **Falso.** Si tienen velocidades distintas pero próximas, y la misma frecuencia, no se producirán pulsaciones.

15. Datos: f_1 = 430 Hz; f_2 = 436 Hz

a) Calculamos la frecuencia de la onda resultante como el promedio de f_1 y f_2:

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{430\ \text{Hz} + 436\ \text{Hz}}{2} = 433\ \text{Hz}$$

b) Hallamos la frecuencia de la pulsación y su período:

$$f_p = f_2 - f_1 = 436\ \text{Hz} - 430\ \text{Hz} = 6\ \text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{6\ \text{Hz}} = 0{,}17\ \text{s}$$

16. Datos: f_1 = 349 Hz; 3 pulsaciones por segundo

La frecuencia correspondiente a 3 pulsaciones por segundo es de 3 Hz, f_p = 3 Hz. Por tanto, si suponemos que la frecuencia conocida es la mayor:

$$f_p = f_1 - f_2; \quad f_2 = f_1 - f_p$$

$$f_2 = 349\ \text{Hz} - 3\ \text{Hz} = 346\ \text{Hz}$$

Pero también es posible que la frecuencia conocida sea la menor. En tal caso:

$$f_p = f_2 - f_1; \quad f_2 = f_p + f_1 = 349\ \text{Hz} + 3\ \text{Hz} = 352\ \text{Hz}$$

17. Respuesta sugerida:

El período de las pulsaciones se relaciona con las frecuencias de los diapasones mediante la expresión:

$$T = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

Por lo tanto, cuanto más parecidas son ambas frecuencias, mayor será el período de las pulsaciones.

Al realizar la práctica se observa que cuanto más parecida es la posición de las piezas de modificación de frecuencia, el período de las pulsaciones es mayor. Así, podemos concluir que:

a) La frecuencia de los diapasones depende de la posición de las piezas de modificación.

b) Cuanto más parecida es la posición de estas piezas en ambos diapasones, más cercanos están los valores de sus frecuencias y mayor es el período de las pulsaciones.

18. a) Para que se produzca una onda estacionaria es necesaria la interferencia de dos ondas **armónicas** de **amplitud y frecuencia iguales** que se propaguen en la **misma dirección y sentido contrario.**

b) Todos los puntos de la cuerda en la que se produce una onda estacionaria, excepto los nodos, oscilan armónica y verticalmente y alcanzan a la vez la posición de equilibrio.

19. Datos: $y_1 = A\ \text{sen}\ (\omega t + kx)$; $y_2 = A\ \text{sen}\ (\omega t - kx + \varphi)$

a) La superposición de estas dos ondas será:

$$y_r = y_1 + y_2$$

$$y_r = A\,\text{sen}(\omega t + kx) + A\,\text{sen}(\omega t - kx + \varphi)$$

$$y_r = 2A\,\text{sen}\left[\frac{(\omega t + kx) + (\omega t - kx + \varphi)}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\frac{(\omega t + kx) - (\omega t - kx + \varphi)}{2}\right]$$

$$y_r = 2A\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y_r = A_r\,\text{sen}\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right); \quad A_r = 2A\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Se trata de una onda armónica de igual frecuencia que las ondas componentes y con una amplitud A_r independiente del tiempo, donde la fase de la oscilación es independiente del punto considerado. Por tanto, todos los puntos de la onda alcanzan a la vez la posición de equilibrio y los nodos se encuentran siempre en reposo. En definitiva, se trata de una onda estacionaria.

b) Si en x = 0 hay un nodo, la amplitud es siempre nula, para todo t. Por tanto:

$$\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right) = \cos\frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$$

c) La elongación máxima en cualquier punto se da en el momento en que $\text{sen}(\omega t + \pi/2) = 1$. Por tanto, en $x = \lambda/4$:

$$y_{max} = 2A\cos\left(k\frac{\lambda}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_{max} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 2A\cos 0 = 2A$$

Derivamos la elongación respecto del tiempo para hallar la velocidad:

$$v = \frac{dy}{dt} = 2A\,\omega\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v\,(x = \lambda/4) = 2A\,\omega\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v\,(x = \lambda/4) = 2A\,\omega\cos 0\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v\,(x = \lambda/4) = -2A\,\omega\,\text{sen}\,(\omega t)$$

20. Datos: $y = 0{,}3\cos\,(0{,}2x - 100t)$ (SI)

a) Si comparamos la ecuación del enunciado con la expresión de una onda armónica, obtenemos:

$A = 0{,}3$ m; $\omega = 100$ rad·s^{-1}; $k = 0{,}2$ m^{-1}

Hallamos la longitud de onda a partir del número de ondas; la frecuencia, a partir de la pulsación; y la velocidad de propagación a partir de la frecuencia y de la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}2\text{ m}^{-1}} = 10\pi\text{ m}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\text{ rad·s}^{-1}}{2\pi} = \frac{50}{\pi}\text{ Hz}$$

$$v = \lambda\,f = 10\pi\text{ m}\cdot\frac{50}{\pi}\text{ Hz} = 500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La onda que se propaga en el sentido contrario tiene por ecuación $y = 0{,}3\cos\,(0{,}2x + 100t)$. Por lo tanto, la ecuación de la onda estacionaria resultante será:

$$y_r = y_1 + y_2$$

$$y_r = 0{,}3\cos\,(0{,}2x - 100t) + 0{,}3\cos\,(0{,}2x + 100t)$$

$$y_r = 2\cdot 0{,}3\cos\left[\frac{(0{,}2x - 100t) + (0{,}2x + 100t)}{2}\right]\cdot$$

$$\cdot\cos\left[\frac{(0{,}2x - 100t) - (0{,}2x + 100t)}{2}\right]$$

$$y_r = 0{,}6\cos\,(0{,}2x)\cos\,(-100t)$$

$$y_r = 0{,}6\cos\,(0{,}2x)\cos\,(100t)\quad\text{(SI)}$$

c) La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2};\quad x_n - x_{n-1} = \frac{10\pi\text{ m}}{2} = 5\pi\text{ m}$$

21. En una cuerda con sus dos extremos fijos sólo pueden formarse ondas estacionarias de longitud de onda $\lambda = \frac{2L}{n}$, con L la longitud de la cuerda y n un número entero.

Si la cuerda está fija sólo por un extremo, la longitud de onda de las ondas estacionarias ha de ser $\lambda = \frac{4L}{n}$.

22. Datos: L = 2 m; A(x = 1 m) = 0,1 m; v = 4 m/s; cuerda sujeta por los dos extremos; n = 1

a) La longitud de onda de la onda estacionaria es:

$$\lambda = \frac{2L}{n};\quad \lambda = \frac{2\cdot 2\text{ m}}{1} = 4\text{ m}$$

b) Hallamos la frecuencia a partir de la velocidad de propagación y la longitud de onda:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{4\text{ m/s}}{4\text{ m}} = 1\text{ Hz}$$

c) Como la cuerda está fija en sus dos extremos, x = 0 y x = L deben ser nodos de la onda estacionaria. Su ecuación es:

$$y_r = 2A\,\text{sen}\,(kx)\cos\,(\omega t)$$

$$y_r = 2A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\,(2\pi f\,t)$$

$$y_r = 0{,}1\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}x\right)\cos\,(2\pi\cdot 1\cdot t)$$

$$y_r = 0{,}1\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\,(2\pi t)\quad\text{(SI)}$$

23. Datos: L = 1,2 m; v = 130 m·s^{-1}

Las frecuencias de la serie armónica en una cuerda fija por los dos extremos vienen dadas por la expresión:

$$f = n\,\frac{v}{2L}\qquad n = 1, 2, 3...$$

Calculamos las frecuencias correspondientes a los tres primeros armónicos, n = 1, 2, 3:

$$f_1 = 1\cdot\frac{v}{2L} = 1\cdot\frac{130\text{ m/s}}{2\cdot 1{,}2\text{ m}} = 54{,}2\text{ Hz}$$

$$f_2 = 2\cdot\frac{v}{2L} = 2\cdot\frac{130\text{ m/s}}{2\cdot 1{,}2\text{ m}} = 108{,}3\text{ Hz}$$

$$f_3 = 3\cdot\frac{v}{2L} = 3\cdot\frac{130\text{ m/s}}{2\cdot 1{,}2\text{ m}} = 162{,}5\text{ Hz}$$

24. Datos: L = 1 m; f_1 = 430 Hz; cuerda fija por un extremo

Hallamos la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda a partir de la expresión del primer armónico para una cuerda fija por un extremo:

$$f_1 = \frac{v}{4L};\quad v = 4L\,f_1$$

$$v = 4\cdot 1\text{ m}\cdot 430\text{ Hz} = 1\,720\text{ m/s}$$

25. Las longitudes de onda de cada uno de los modos normales de vibración son las mismas en la cuerda fija por

los dos extremos que en el tubo de la misma longitud abierto por los dos extremos: $\lambda = \frac{2L}{n}$

De la misma forma, la expresión de la longitud de onda de los modos normales de vibración de un tubo abierto por un extremo coincide con la de los de una cuerda fija por un extremo de la misma longitud: $\lambda = \frac{4L}{n}$

26. Datos: f_n = 300 Hz; f_m = 425 Hz

a) f_n y f_m son armónicos de la misma frecuencia fundamental f. Por tanto, f_n = n f y f_m = m f. Entonces, la frecuencia fundamental es el máximo común divisor de f_n y f_m:

$$f_n = 300\ \text{Hz} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2\ \text{Hz}$$
$$f_m = 425\ \text{Hz} = 5^2 \cdot 17\ \text{Hz}$$
$$f = 25\ \text{Hz}$$

b) Conocida la frecuencia fundamental, hallamos el orden de los armónicos:

$$n = \frac{f_n}{f};\quad n = \frac{300\ \text{Hz}}{25\ \text{Hz}} = 12$$
$$m = \frac{f_m}{f};\quad m = \frac{425\ \text{Hz}}{25\ \text{Hz}} = 17$$

27. Datos: L = 1,25 m; v = 342 m·s^{-1}

a) Hallamos la frecuencia de los tres primeros armónicos si el tubo está abierto por sus dos extremos:

$$f = n\frac{v}{2L},\quad n = 1, 2, 3...$$
$$f_1 = 1 \cdot \frac{342\ \text{m/s}}{2 \cdot 1{,}25\ \text{m}} = 136{,}8\ \text{Hz}$$
$$f_2 = 2 \cdot \frac{342\ \text{m/s}}{2 \cdot 1{,}25\ \text{m}} = 273{,}6\ \text{Hz}$$
$$f_3 = 3 \cdot \frac{342\ \text{m/s}}{2 \cdot 1{,}25\ \text{m}} = 410{,}4\ \text{Hz}$$

b) Calculamos la frecuencia de los tres primeros armónicos si el tubo está abierto sólo por uno de sus extremos:

$$f = n\frac{v}{4L};\quad n = 1, 3, 5...$$
$$f_1 = 1 \cdot \frac{342\ \text{m/s}}{4 \cdot 1{,}25\ \text{m}} = 68{,}4\ \text{Hz}$$
$$f_2 = 3 \cdot \frac{342\ \text{m/s}}{4 \cdot 1{,}25\ \text{m}} = 205{,}2\ \text{Hz}$$
$$f_3 = 5 \cdot \frac{342\ \text{m/s}}{4 \cdot 1{,}25\ \text{m}} = 342\ \text{Hz}$$

28. El sonido amplificado de la voz humana manteniendo cierto tono durante varios segundos es capaz de romper una copa de cristal debido a un fenómeno de resonancia. Este fenómeno sólo aparece en el caso de que la frecuencia correspondiente al tono de la voz humana coincida con la frecuencia de uno de los modos normales de vibración del cristal de la copa. En tal caso, la voz es capaz de estimular una vibración en el cristal cuya amplitud irá en aumento. Si la amplitud de la vibración del cristal llega a superar los límites de elasticidad de la estructura de la copa, ésta se romperá.

3. FENÓMENOS DEBIDOS AL MOVIMIENTO DE LA FUENTE Y DEL RECEPTOR (pág. 162)

29. El efecto Doppler es un fenómeno común a todas las ondas armónicas.

30. Si una fuente sonora y un observador se mueven con la misma velocidad, dirección y sentido, no habrá efecto Doppler. El efecto Doppler sólo aparece cuando existe un movimiento relativo entre el observador y la fuente y en la dirección de la línea que los une. Si la velocidad relativa es nula, no aparece el efecto Doppler.

31. Datos: v_F = 30 m·s^{-1}; f = 600 Hz; v = 340 m·s^{-1}

a) Si el automóvil se aproxima:

$$f_R = f\,\frac{v}{v - v_F}$$
$$f_R = 600\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} - 30\ \text{m·s}^{-1}} = 658{,}1\ \text{Hz}$$

b) Si la fuente se aleja del receptor:

$$f_R = f\,\frac{v}{v + v_F}$$
$$f_R = 600\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} + 30\ \text{m·s}^{-1}} = 551{,}4\ \text{Hz}$$

32. Datos: v_R = 15 m·s^{-1}; f = 1 000 Hz; v = 340 m·s^{-1}

a) Si el automóvil se aproxima a la sirena:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v}$$
$$f_R = 1\,000\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1} + 15\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1}} = 1\,044{,}1\ \text{Hz}$$

b) Si el conductor se aleja de la fuente:

$$f_R = f\,\frac{v - v_R}{v}$$
$$f_R = 1\,000\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1} - 15\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1}} = 955{,}9\ \text{Hz}$$

33. Datos: v_F = 40 m·s^{-1}; v_R = 20 m·s^{-1}; f = 980 Hz; v = 340 m·s^{-1}

a) Si el automóvil se aproxima a la ambulancia:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v - v_F}$$
$$f_R = 980\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1} + 20\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} - 40\ \text{m·s}^{-1}} = 1176\ \text{Hz}$$

b) Si el conductor y la fuente se alejan uno del otro:

$$f_R = f\,\frac{v - v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 980\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1} - 20\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} + 40\ \text{m·s}^{-1}} = 825{,}3\ \text{Hz}$$

34. Datos: $v = 340\ \text{m·s}^{-1}$; si el tren se acerca, $f_R = 704$ Hz; si el tren se aleja, $f_R = 619$ Hz

Si el tren se acerca, la frecuencia percibida por el receptor es:

$$f_R = f\,\frac{v}{v - v_F};\quad 704\ \text{Hz} = f\,\frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} - v_F}$$

Si el tren se aleja, la frecuencia percibida es:

$$f_R = f\,\frac{v}{v + v_F};\quad 619\ \text{Hz} = f\,\frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} + v_F}$$

Tenemos así un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Si dividimos la primera ecuación entre la segunda, obtenemos la velocidad de la fuente:

$$\frac{704\ \text{Hz}}{619\ \text{Hz}} = \frac{340\ \text{m·s}^{-1} + v_F}{340\ \text{m·s}^{-1} - v_F}$$

$$704 \cdot (340\ \text{m·s}^{-1} - v_F) = 619\ \text{m·s}^{-1}\ (340\ \text{m·s}^{-1} + v_F)$$

$$239\,360\ \text{m·s}^{-1} - 704\ v_F = 210\,460\ \text{m·s}^{-1} + 619\ v_F$$

$$1\,323\ v_F = 28\,900\ \text{m·s}^{-1}$$

$$v_F = 21{,}8\ \text{m·s}^{-1}$$

Hallamos la frecuencia a partir de la primera ecuación:

$$704\ \text{Hz} = f\,\frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} - 21{,}8\ \text{m·s}^{-1}}$$

$$704\ \text{Hz} \cdot 318{,}2\ \text{m·s}^{-1} = 340\ \text{m·s}^{-1} \cdot f$$

$$f = \frac{704\ \text{Hz} \cdot 318{,}2\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1}} = 659\ \text{Hz}$$

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS (pág. 165)

35. Datos: $y = 1{,}2 \cos\,(100t - 0{,}1x)$ (SI)

a) Si comparamos la ecuación del enunciado con la expresión de una onda armónica, obtenemos:

$A = 1{,}2$ m; $\omega = 100\ \text{rad·s}^{-1}$; $k = 0{,}1\ \text{m}^{-1}$

Hallamos la longitud de onda a partir del número de ondas; la frecuencia, a partir de la pulsación; y la velocidad de propagación, a partir de la frecuencia y de la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}1\ \text{m}^{-1}} = 20\pi\ \text{m}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\ \text{rad·s}^{-1}}{2\pi} = \frac{50}{\pi}\ \text{Hz}$$

$$v = \lambda\, f = 20\pi\ \text{m} \cdot \frac{50}{\pi}\ \text{Hz} = 1\,000\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La onda que se propaga en sentido contrario tiene por ecuación $y = 1{,}2 \cos\,(100t + 0{,}1x)$. Por lo tanto la ecuación de la onda estacionaria resultante será:

$$y_r = y_1 + y_2$$

$$y_r = 1{,}2 \cos\,(100t - 0{,}1x) + 1{,}2 \cos\,(100t + 0{,}1x)$$

$$y_r = 2 \cdot 1{,}2 \cos\left[\frac{(100t - 0{,}1x) + (100t + 0{,}1x)}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\frac{(100t - 0{,}1x) - (100t + 0{,}1x)}{2}\right]$$

$$y_r = 2{,}4 \cos\,(100t) \cos\,(-0{,}1x)$$

$$y_r = 2{,}4 \cos\,(0{,}1x) \cos\,(100t) \quad \text{(SI)}$$

c) Calculamos la posición de los nodos:

$$x = (2n+1)\,\frac{\lambda}{4} = (2n+1)\,\frac{20\pi\ \text{m}}{4}$$

$$x = (2n+1)\,5\pi\ \text{m}$$

d) La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2};\quad x_n - x_{n-1} = \frac{20\pi\ \text{m}}{2} = 10\pi\ \text{m}$$

36. Datos: $y_r = 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cos\,(40\pi t)$ (SI)

a) La ecuación general de una onda estacionaria generada por superposición de dos ondas iguales que se mueven en sentido contrario es $y_r = 2A\ \text{sen}\,(kx) \cos\,(\omega t)$. Si comparamos con la ecuación del problema, vemos que la amplitud de las ondas que pueden generarla por superposición es $A = 1$ m. Deducimos también que $k = \pi/3\ \text{m}^{-1}$ y $\omega = 40\pi\ \text{rad·s}^{-1}$. Por tanto, la velocidad de propagación de las ondas generadoras es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi\ \text{rad·s}^{-1}}{\frac{\pi}{3}\ \text{m}^{-1}} = 120\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La distancia entre dos nodos consecutivos será:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2}$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}\ \text{m}^{-1}} = 3\ \text{m}$$

c) Hallamos la velocidad en cualquier punto de la cuerda derivando la ecuación de la elongación:

$$v = \frac{dy}{dt} = -2 \cdot 40\pi\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cdot \text{sen}\,(40\pi t)$$

$$v = -80\pi\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \text{sen}\,(40\pi t) \quad \text{(SI)}$$

Para la partícula situada en $x = 1{,}5$ m cuando $t = 1{,}125$ s, la velocidad es:

$$v = -80\pi\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1{,}5\right) \cdot \text{sen}\,(40\pi \cdot 1{,}125) = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

37. Datos: $v_F = 33\ m{\cdot}s^{-1}$; $v_R = 25\ m{\cdot}s^{-1}$; $f = 400$ Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

Antes de ser adelantado, cuando la ambulancia se aproxima al automóvil y éste se aleja de ella:

$$f_R = f\,\frac{v - v_R}{v - v_F}$$

$$f_R = 400\ \text{Hz}\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1} - 25\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} - 33\ m{\cdot}s^{-1}} = 410{,}4\ \text{Hz}$$

Después de ser adelantado, la fuente se aleja del receptor pero éste se dirige hacia ella:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 400\ \text{Hz}\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1} + 25\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} + 33\ m{\cdot}s^{-1}} = 391{,}4\ \text{Hz}$$

38. Datos: $v_F = 30\ m{\cdot}s^{-1}$; $f = 150$ Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

a) El camionero que circula tras él con una velocidad de $v_R = 20\ m{\cdot}s^{-1}$ se acercaría a la fuente si ésta se encontrara en reposo. Al mismo tiempo, la fuente se aleja del receptor. Por lo tanto:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 150\ \text{Hz}\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1} + 20\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} + 30\ m{\cdot}s^{-1}} = 145{,}9\ \text{Hz}$$

b) El automovilista que circula en sentido contrario con una velocidad de $v_R = 28\ m{\cdot}s^{-1}$ se acerca a la fuente. Por tanto:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v - v_F}$$

$$f_R = 150\ \text{Hz}\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1} + 28\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} - 30\ m{\cdot}s^{-1}} = 178\ \text{Hz}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 166 y 167)

39. Principio de Huygens*:* todo punto de un frente de onda se convierte en un centro puntual productor de ondas elementales secundarias, de igual velocidad y frecuencia que la onda inicial, cuya superficie envolvente constituye un nuevo frente de onda.

El principio de Huygens es aplicable a todas las ondas, incluidas las electromagnéticas.

40. La difracción consiste en la desviación en la propagación rectilínea de las ondas cuando éstas atraviesan una abertura o pasan próximas a un obstáculo. La difracción se produce tanto en ondas longitudinales (por ejemplo, el sonido) como en ondas transversales (por ejemplo, la luz).

41. Podemos oír la conversación que mantienen unas personas al otro lado de la esquina de un edificio, sin que podamos verlas, porque las ondas sonoras se difractan en la esquina. Es decir, su trayectoria rectilínea se ve alterada y las ondas son capaces de «doblar» la esquina.

En cambio, si se sitúan detrás de una casa y delante de la fachada, la pared refleja todo el sonido. Si éste no llega a una esquina cercana, no se podrá difractar y llegar hasta nosotros.

42. El índice de refracción relativo de un medio respecto a otro se define como la razón entre las velocidades de propagación de un movimiento ondulatorio en los dos medios.

Las leyes de la refracción son:

1.ª El rayo refractado, la normal a la superficie en el punto de incidencia y el rayo incidente están en el mismo plano.

2.ª La razón entre el seno del angulo de incidencia y el del ángulo de refracción es una constante igual a la razón entre las respectivas velocidades de propagación del movimiento ondulatorio:

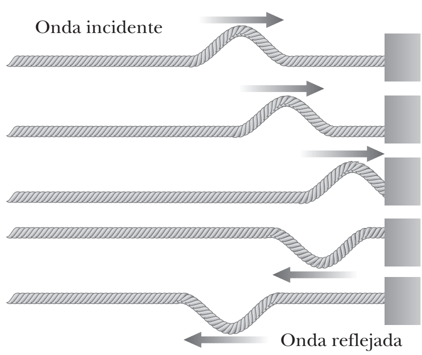
$$\frac{\text{sen}\ i}{\text{sen}\ r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

43. La velocidad de propagación de las ondas sonoras en el agua es mayor que en el aire. Por tanto, el índice de refracción relativo del agua respecto del aire será $n_{21} = \frac{v_1}{v_2} < 1$. Como el cociente del seno del ángulo incidente y el seno del ángulo refractado es igual al índice de refracción relativo n_{21}:

$$\frac{\text{sen}\ i}{\text{sen}\ r} = n_{21} < 1;\quad \text{sen}\ i < \text{sen}\ r \Rightarrow r > i$$

Por tanto, la onda refractada se alejará de la normal.

44. Una onda que viaja por una cuerda tensa, al reflejarse en una pared, sufre una inversión de fase. Por tanto, la onda reflejada está en oposición de fase con la onda incidente.



La inversión se debe a que la onda produce una fuerza hacia arriba sobre la pared que, debido a la tercera ley de Newton, provoca una fuerza de reacción hacia abajo sobre la cuerda, fuerza que genera la onda reflejada en oposición de fase con la incidente.

Si la ecuación de la onda incidente es $y = 0{,}02$ sen $(50t - 3x)$, la onda reflejada, que viajará en sentido contrario y con un desfase de $\pi/2$, será:

$$y' = 0{,}02\ \text{sen}\ (50t + 3x - \pi/2) = 0{,}02\ \cos\ (50t + 3x)$$

45. **Polarización:** limitación en la dirección o direcciones de vibración de los puntos afectados por una onda transversal.

Polarización rectilínea o lineal: una onda está polarizada rectilínea o linealmente si la vibración tiene lugar siempre siguiendo rectas con la misma dirección perpendicular a la dirección de propagación.

Polarización circular: hablamos de polarización circular cuando la vibración de un punto a lo largo del tiempo tiene lugar siguiendo círculos situados en planos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

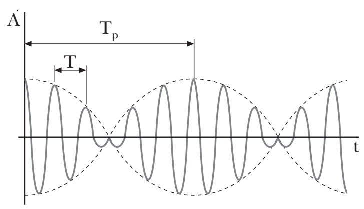
Polarización elíptica: hablamos de polarización elíptica cuando la vibración de un punto a lo largo del tiempo tiene lugar siguiendo elipses situadas en planos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

Podemos conseguir una onda polarizada linealmente si sacudimos arriba y abajo el extremo libre de una cuerda fija, de modo que sus puntos vibren siempre en el mismo plano. Si hacemos vibrar el extremo libre de la cuerda formando círculos o elipses, obtendremos una onda polarizada circular o elípticamente.

46. *a)* **Falso.** La interferencia es constructiva en los puntos donde las ondas llegan en concordancia de fase. Si las dos fuentes están separadas una distancia arbitraria, aunque emitan en fase, las ondas no llegarán a todos los puntos del espacio en fase, y la interferencia no será siempre constructiva.

b) **Falso.** Como la diferencia de fase entre ambas se mantiene constante, se trata de fuentes coherentes.

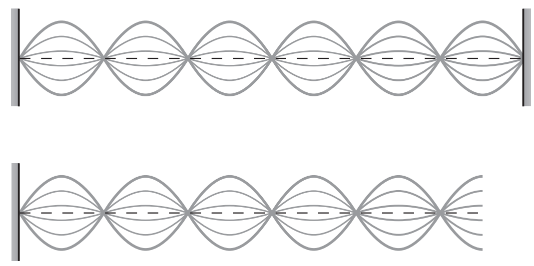
47.



48. Si dos violinistas separados dos metros tocan la misma nota, existirán puntos de la habitación donde la interferencia será destructiva. La nota no se oirá en esos puntos sólo si tocan los dos con la misma intensidad, de forma que las ondas tengan la misma amplitud.

49. Si una cuerda está vibrando con seis vientres, los nodos pueden tocarse sin perturbar el movimiento, ya que son puntos de vibración nula.

Si la cuerda tiene seis vientres y está fijada por los extremos (que también son nodos), habrá siete puntos en total que puedan tocarse sin perturbar el movimiento. Si sólo está fija por un extremo, los nodos serán seis.



50. La cuerda vibrará con la frecuencia fundamental y la correspondiente longitud de onda, determinadas ambas por la posición de los dedos del violinista (es decir, por la longitud efectiva de la cuerda). Pero, además, se superpondrán otros armónicos, que serán los responsables del timbre característico del violín.

51. Un tubo abierto por los dos extremos tiene como frecuencia fundamental $f_1 = \dfrac{v}{2L}$, mientras que un tubo abierto sólo por un extremo tiene por frecuencia fundamental $f_1' = \dfrac{v}{4L'}$. Si el segundo tubo tiene una longitud L'= L/2, las frecuencias fundamentales coincidirán.

52. El efecto Doppler en la luz sólo tiene efectos apreciables para movimientos con grandes velocidades. Además, como la longitud de onda de la luz visible es muy pequeña, los correspondientes desplazamientos Doppler son también pequeños.

Sin embargo, el efecto Doppler en la luz visible se puede apreciar en la luz de las estrellas, donde las velocidades implicadas son muy grandes.

53. Datos: t_1 = 8 s; t_2 = 12 s; v = 340 m·s^{-1}

Si tardamos 8 segundos en oír la explosión procedente del barco:

$$d_1 = v\ t_1 = 340\ \text{m·s}^{-1} \cdot 8\ \text{s} = 2\,720\ \text{m}$$

Es decir, estamos a 2 720 m del barco.

Si tardamos 12 segundos en oír el eco procedente de los acantilados, como a los 8 s el sonido nos había llegado desde el barco, las ondas han tardado t_3 = 12 s – 8 s = 4 s en viajar de nuestra barca al acantilado y volver. En este tiempo han recorrido $2d_2$, donde d_2 es la distancia que nos separa del acantilado:

$$2d_2 = v\ t_3; \quad d_2 = \frac{1}{2} v\ t_3 = \frac{1}{2} \cdot 340\ \text{m·s}^{-1} \cdot 4\ \text{s} = 680\ \text{m}$$

54. Datos: f = 225 Hz; v_1 = 120 m·s^{-1}; v_2 = 210 m·s^{-1}

a) Calculamos el índice de refracción del segundo medio respecto al primero:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{120\ \text{m·s}^{-1}}{210\ \text{m·s}^{-1}} = 0{,}57$$

b) Hallamos la longitud de onda en el primer medio, donde v_1 = 120 m·s^{-1}:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f}; \quad \lambda_1 = \frac{120\ \text{m·s}^{-1}}{225\ \text{Hz}} = 0{,}53\ \text{m}$$

En el segundo medio:

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f}; \quad \lambda_2 = \frac{210\ \text{m·s}^{-1}}{225\ \text{Hz}} = 0{,}93\ \text{m}$$

55. Datos: f = 50 Hz; A = 2 cm; v = 100 cm·s^{-1}; r = 5 cm; r'= 9 cm

Hallamos primero el número de ondas y la pulsación de estas ondas armónicas:

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 50\ \text{Hz} = 100\pi\ \text{rad·s}^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi\, f}{v} = \frac{\omega}{v}$$

$$k = \frac{100\pi\ \text{rad·s}^{-1}}{100\ \text{cm·s}^{-1}} = \pi\ \text{cm}^{-1}$$

Entonces, la ecuación resultante de la superposición será:

$$y_r = 2A\cos\left(k\frac{r'-r}{2}\right)\text{sen}\left(\omega t - k\frac{r'+r}{2}\right)$$

$$y_r = 2\cdot 2\cos\left(\pi\ \text{cm}^{-1}\cdot\frac{9\ \text{cm} - 5\ \text{cm}}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\text{sen}\left(100\pi t - \pi\ \text{cm}^{-1}\cdot\frac{9\ \text{cm} + 5\ \text{cm}}{2}\right)$$

$$y_r = 4\cos(2\pi)\,\text{sen}\,(100\pi t - 7\pi)$$

$$y_r = 4\,\text{sen}\,(100\pi t - 7\pi)\ \text{cm}$$

56. Datos: f = 100 Hz; r' = 83,4 m; r = 80 m; v = 340 m·s^{-1}

Únicamente no habrá sonido si en P se cumple la condición de interferencia destructiva:

$$r' - r = (2n+1)\,\frac{\lambda}{2}; \quad n = 0, 1, 2...$$

Calculamos λ:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\ \text{m·s}^{-1}}{100\ \text{Hz}} = 3{,}4\ \text{m}$$

En el punto donde hemos situado el aparato registrador, r' = 83,4 m y r = 80 m:

$$83{,}4\ \text{m} - 80\ \text{m} = (2n+1)\cdot 1{,}7\ \text{m}$$

$$3{,}4\ \text{m} = (2n+1)\cdot 1{,}7\ \text{m}$$

$$(2n+1) = 2; \quad 2n = 1; \quad n = \frac{1}{2} \neq 0, 1...$$

Por tanto, como este punto no verifica la condición para que la amplitud resultante sea nula, el aparato registrará sonido.

57. Datos: f_1 = 380 Hz; f_2 = 374 Hz

Calculamos la frecuencia de la pulsación, f_p, y la frecuencia, f, de la onda resultante de la interferencia:

$$f_p = f_1 - f_2 = 380\ \text{Hz} - 374\ \text{Hz} = 6\ \text{Hz}$$

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{380\ \text{Hz} + 374\ \text{Hz}}{2} = 377\ \text{Hz}$$

58. Datos: y_1 = 2 sen (1500t – 250x) (SI);
y_2 = 2 sen (1500t + 250x) (SI)

a) La superposición de estas dos ondas será:

$$y_r = y_1 + y_2$$

$$y_r = 2\,\text{sen}\,(1\,500t - 250x) + 2\,\text{sen}\,(1\,500t + 250x)$$

$$y_r = 4\cos(250x)\,\text{sen}\,(1\,500t) \quad \text{(SI)}$$

b) La distancia entre dos antinodos consecutivos será:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2} = \frac{2\pi/k}{2} = \frac{\pi}{k}$$

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\pi}{250\ \text{m}^{-1}} = \frac{\pi}{250}\ \text{m}$$

59. Datos: $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\cos(5\pi t)$ (SI)

a) Si comparamos la ecuación de la onda del problema con la ecuación general de una onda estacionaria, y = 2 A cos (kx) sen (ωt), obtenemos:

$$A = 1\ \text{m};\ k = \frac{\pi}{6}\ \text{m}^{-1};\ \omega = 5\pi\ \text{rad·s}^{-1}$$

Calculamos la longitud de onda y la velocidad de propagación:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\pi/6\text{m}^{-1}} = 12\ \text{m}$$

$$v = \lambda\, f = \lambda\,\frac{\omega}{2\pi}; \quad v = 12\ \text{m}\cdot\frac{5\pi\ \text{rad/s}}{2\pi} = 30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Calculamos la posición de los nodos:

$$x = (2n+1)\,\frac{\lambda}{4};\ n = 0, 1, 2...$$

$$x = (2n+1)\,\frac{12\ \text{m}}{4} = 3\,(2n+1)\ \text{m};\ n = 0, 1, 2...$$

La distancia entre dos nodos o dos vientres consecutivos es media longitud de onda. Por tanto, como λ = 12 m, la distancia entre dos nodos o dos vientres es de 6 m. Pero como nodos y vientres están alternados y equiespaciados, la distancia entre un nodo y el vientre siguiente será de un cuarto de longitud de onda, es decir, de 3 m.

c) Hallamos la velocidad en cualquier punto de la cuerda derivando la ecuación de la elongación:

$$v = \frac{dy}{dt} = -2\cdot 5\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\text{sen}\,(5\pi t)$$

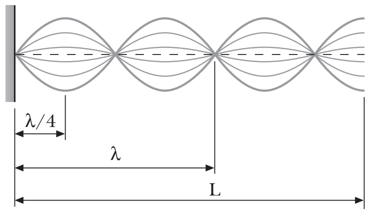
$$v = -10\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\text{sen}\,(5\pi t) \quad \text{(SI)}$$

Para la partícula situada en x = 6 m:

$$v = -10\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)\text{sen}\,(5\pi t) = 10\pi\,\text{sen}\,(5\pi t)\ \text{m·s}^{-1}$$

La velocidad máxima corresponde al instante en que sen $(5\pi t) = 1$; por tanto, $v_{max} = 10\pi\ m{\cdot}s^{-1}$.

60. Datos: L = 1,2 m; f = 120 Hz; 4 vientres



a) Si la cuerda está sujeta por un extremo, se generará un número impar de cuartos de longitud de onda, ya que el extremo sujeto será siempre un nodo y el libre, un vientre. Si vemos 4 vientres en la cuerda, se han generado 3 nodos además del extremo fijo. Por tanto, la longitud de la cuerda equivale a 7/4 de longitud de onda. Entonces:

$$L = \frac{7}{4}\lambda; \quad \lambda = \frac{4}{7}L = \frac{4}{7}\cdot 1{,}2\ m = 0{,}69\ m$$

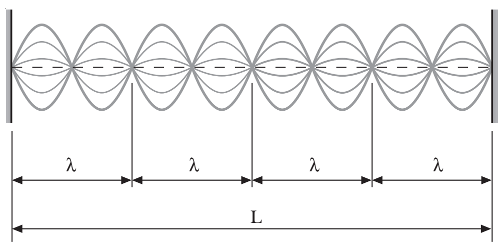
b) Como los modos normales de vibración de la cuerda fija en un extremo son de la forma $\lambda = 4\frac{L}{n}$, la vibración corresponde al séptimo armónico, n = 7:

$$f = n\frac{v}{4L}; f_1 = \frac{v}{4L}$$

Por lo tanto:

$$f_7 = 7\cdot\frac{v}{4L} = 7\,f_1; \quad f_1 = \frac{f_7}{7} = \frac{120\ Hz}{7} = 17{,}1\ Hz$$

61. Datos: L = 1 m; 9 nodos; A_{max} = 2 cm = 0,02 m; $v = 10\ m{\cdot}s^{-1}$



a) Si en la cuerda de guitarra, que está sujeta por los dos extremos, se forman 9 nodos, la longitud de onda corresponde a un cuarto de la longitud de la cuerda: $\lambda = \frac{L}{4} = \frac{1\ m}{4} = 0{,}25\ m$.

Para escribir la ecuación de la onda estacionaria, determinamos primero el número de ondas y la pulsación:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}25\ m} = 8\pi\ m^{-1}$$

$$\omega = 2\pi\,f = 2\pi\frac{v}{\lambda} = k\,v = 8\pi\ m^{-1}\cdot 10\ m{\cdot}s^{-1}$$

$$\omega = 80\pi\ rad{\cdot}s^{-1}$$

Como la cuerda está fija en sus dos extremos, x = 0 y x = L deben ser nodos de la onda estacionaria. Por lo tanto, su ecuación es:

$$y_r = 2A\ sen\ (kx)\ cos\ (\omega t)$$

$$y_r = 0{,}02\ sen\ (8\pi x)\ cos\ (80\pi t) \quad (SI)$$

b) Calculamos la frecuencia fundamental de vibración:

$$f = n\frac{v}{2L} = 1\cdot\frac{10\ m{\cdot}s^{-1}}{2\cdot 1\ m} = 5\ Hz$$

c) Hallamos la longitud de onda correspondiente a la frecuencia fundamental:

$$\lambda = \frac{2L}{n}; \quad \lambda = \frac{2\cdot 1\ m}{1} = 2\ m;\ \text{o también:}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{10\ m{\cdot}s^{-1}}{5\ Hz} = 2\ m$$

62. Datos: f = 250 Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

a) Calculamos la longitud del tubo si tiene los dos extremos abiertos:

$$f = n\frac{v}{2L}; \quad L = n\frac{v}{2f} = 1\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1}}{2\cdot 250\ Hz} = 0{,}68\ m$$

b) Hallamos la longitud del tubo si tiene un solo extremo abierto:

$$f = n\frac{v}{4L}; \quad L = n\frac{v}{4f} = 1\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1}}{4\cdot 250\ Hz} = 0{,}34\ m$$

63. Datos: $v_F = 60\ km/h = 16{,}7\ m{\cdot}s^{-1}$; f = 1 000 Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

a) Si el tren se aproxima:

$$f_R = f\,\frac{v}{v - v_F}$$

$$f_R = 1\,000\ Hz\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} - 16{,}7\ m{\cdot}s^{-1}} = 1051{,}7\ Hz$$

b) Si la fuente se aleja del receptor:

$$f_R = f\,\frac{v}{v + v_F}$$

$$f_R = 1\,000\ Hz\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1} + 16{,}7\ m{\cdot}s^{-1}} = 953{,}2\ Hz$$

64. Datos: $v_R = 30\ m{\cdot}s^{-1}$; f = 500 Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

Si el motorista se aproxima a la sirena:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v}$$

$$f_R = 500\ Hz\cdot\frac{340\ m{\cdot}s^{-1} + 30\ m{\cdot}s^{-1}}{340\ m{\cdot}s^{-1}} = 544{,}1\ Hz$$

65. Datos: $v_F = 30\ m{\cdot}s^{-1}$; $v_R = 24\ m{\cdot}s^{-1}$; f = 450 Hz; $v = 340\ m{\cdot}s^{-1}$

a) Antes de cruzarse, ambos se aproximan el uno al otro. Por lo tanto, la frecuencia percibida por el motorista es:

$$f_R = f\,\frac{v + v_R}{v - v_F}$$

$$f_R = 450\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1} + 24\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} - 30\ \text{m·s}^{-1}} = 528{,}4\ \text{Hz}$$

b) Después de cruzarse, ambos se alejan uno del otro. Por tanto:

$$f_R = f\,\frac{v - v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 450\ \text{Hz} \cdot \frac{340\ \text{m·s}^{-1} - 24\ \text{m·s}^{-1}}{340\ \text{m·s}^{-1} + 30\ \text{m·s}^{-1}} = 384{,}3\ \text{Hz}$$

66. Datos: L = 2 m; μ = 0,005 kg·m^{-1}; f_1 = 65 Hz

La velocidad de una onda en una cuerda tensa sólo depende de la tensión de la cuerda, T, y de su masa por unidad de longitud. Por tanto, si determinamos la velocidad a partir de la frecuencia del modo fundamental de vibración y la longitud de la cuerda, hallaremos la tensión.

Calculamos la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda:

$$f = n\,\frac{v}{2L};\quad v = \frac{2L\,f}{n} = \frac{2 \cdot 2\ \text{m} \cdot 65\ \text{Hz}}{1} = 260\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Con ella, hallamos la tensión:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}};\quad T = \mu\, v^2 = 0{,}005\ \text{kg·m}^{-1} \cdot \left(260\ \text{m·s}^{-1}\right)^2$$

$$T = 338\ \text{N}$$

67. Datos: λ_{roja} = 6,2 · 10^{-7} m; λ_{verde} = 5,4 · 10^{-7} m; c = 3 · 10^{8} m·s^{-1}

Hallamos las frecuencias de la luz roja y la luz verde:

$$f_{roja} = \frac{c}{\lambda_{roja}};\quad f_{roja} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1}}{6{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 4{,}84 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

$$f_{verde} = \frac{c}{\lambda_{verde}};\quad f_{verde} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1}}{5{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 5{,}56 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

Calculamos la velocidad a la que debe circular el vehículo para que el conductor vea verde ($f_R = f_{verde}$) la luz roja del semáforo ($f = f_{roja}$):

$$f_R = f\,\frac{c + v_R}{c};\quad c + v_R = c\,\frac{f_R}{f};\quad v_R = c\left(\frac{f_R}{f} - 1\right)$$

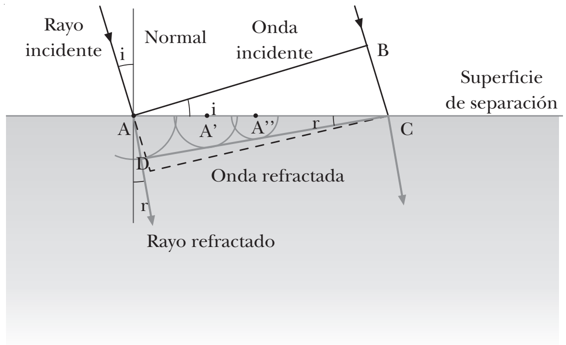
$$v_R = 3 \cdot 10^8\ \text{m·s}^{-1}\left(\frac{5{,}56 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}}{4{,}84 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}} - 1\right) = 4{,}46 \cdot 10^7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 167)

1. Principio de Huygens: todo punto de un frente de onda se convierte en un centro puntual productor de ondas elementales secundarias cuya superficie envolvente constituye un nuevo frente de onda.

Consideremos un frente de onda (representado por el segmento AB) que incide con un ángulo i sobre la superficie de separación de un medio, en que la onda se propaga con velocidad v_1, respecto de otro en que lo hace con velocidad v_2, siendo v_2 menor que v_1. Cada punto de la superficie donde incide el primer frente de onda, por el principio de Huygens, se convierte en un nuevo foco emisor.

Debido a la menor velocidad de propagación de la onda en el segundo medio, las ondas secundarias recorren una menor distancia en el mismo tiempo de la que recorrerían en el primer medio. Por ello, la onda se refracta, es decir, cambia de dirección. La envolvente de las ondas secundarias es el nuevo frente de la onda refractada, DC.



El rayo correspondiente al punto B del frente de onda incidente alcanzará la superficie en un tiempo t después de que lo haya hecho el rayo del mismo frente situado en A. Por tanto, para el triángulo ABC tenemos:

$$\text{sen}\ i = \frac{BC}{AC} = \frac{v_1 t}{AC} \Rightarrow AC = \frac{v_1 t}{\text{sen}\ i}$$

Por otro lado, cuando el rayo procedente de B incida sobre la superficie, el rayo refractado en A habrá avanzado v_2 t por el nuevo medio. Entonces, para el triángulo ACD podemos escribir:

$$\text{sen}\, r = \frac{AD}{AC} = \frac{v_2 t}{AC} \Rightarrow AC = \frac{v_2 t}{\text{sen}\, r}$$

Si igualamos los dos valores de AC, obtenemos la segunda ley de la refracción:

$$\frac{v_1 t}{\text{sen}\ i} = \frac{v_2 t}{\text{sen}\ r};\ \frac{\text{sen}\ i}{\text{sen}\ r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

2. El eco consiste en la reflexión del sonido sobre una superficie suficientemente alejada como para que seamos capaces de diferenciar el sonido emitido del reflejado. En el caso de la luz, al ser su velocidad de propagación muy grande, nuestra vista sólo sería capaz de distinguir la reflexión de la emisión si la superficie reflejante estuviera muy lejos. En ese caso podríamos observar, por ejemplo, que la imagen de nuestros movimientos ante un espejo lleva retraso respecto al propio movimiento real.

Para hacer una estimación de cuál sería la distancia necesaria, supondremos que la vista puede distinguir señales distanciadas por medio segundo. Entonces, si tenemos en cuenta que la velocidad de propagación de la luz en el aire es de 3 · 10^8 m/s:

$$d = v\ t = 3 \cdot 10^8\,\text{m·s}^{-1} \cdot 0{,}5\ \text{s} = 1{,}5 \cdot 10^8\ \text{m}$$

Es decir, la superficie debería encontrarse a x = d/2, x = 0,75 · 10^8 m = 75 000 km.

3. Datos: f = 50 Hz; A = 2 cm = 0,02 m; v = 1 m·s^{-1}; $\varphi = \pi/3$; propagación en el sentido positivo del eje OX

Hallamos la pulsación y el número de ondas:

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 100\, \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v}\, f = \frac{2\pi}{1 \text{ m·s}^{-1}} \cdot 50 \text{ Hz} = 100\pi \text{ m}^{-1}$$

Escribimos la ecuación de cada una de las ondas:

$$y = A \text{ sen } (\omega\, t - kx + \varphi)$$

$$y_1 = 0{,}02 \text{ sen } [100\pi(t - x)] \quad \text{(SI)}$$

$$y_2 = 0{,}02 \text{ sen}\left[100\pi\left(t - x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \quad \text{(SI)}$$

La onda resultante de su interferencia será:

$$y_r = y_1 + y_2 = A \text{ sen } (\omega t - kx) + A \text{ sen } (\omega t - kx + \varphi)$$

$$y_r = 2A \text{ sen}\left[\frac{(\omega t - kx) + (\omega\, t - kx + \varphi)}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\frac{(\omega t - kx) - (\omega t - kx + \varphi)}{2}\right]$$

$$y_r = 2A \text{ sen}\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y_r = 2A \text{ sen}\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y_r = 0{,}04 \text{ sen}\left[100\pi(t - x) + \frac{\pi}{6}\right]\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_r = 0{,}035 \text{ sen}\left[100\pi(t - x) + \frac{\pi}{6}\right] \quad \text{(SI)}$$

4. Datos: L = 2 m; v = 340 m·s^{-1}

a) Si el tubo está abierto en sus dos extremos:

$$f = n\, \frac{v}{2L}; \quad n = 1, 2, 3...$$

$$n = 1; \quad f_1 = 1 \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{2 \cdot 2 \text{ m}} = 85 \text{ Hz}$$

$$n = 2; \quad f_2 = 2 \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{2 \cdot 2 \text{ m}} = 170 \text{ Hz}$$

$$n = 3; \quad f_3 = 3 \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{2 \cdot 2 \text{ m}} = 255 \text{ Hz}$$

b) Si el tubo está abierto sólo por un extremo, sólo existen armónicos impares:

$$f = n\, \frac{v}{4L}; \quad n = 1, 3, 5...$$

$$n = 1; \quad f_1 = 1 \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{4 \cdot 2 \text{ m}} = 42{,}5 \text{ Hz}$$

$$n = 3; \quad f_3 = 3 \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{4 \cdot 2 \text{ m}} = 127{,}5 \text{ Hz}$$

$$n = 5; \quad f_5 = 5 \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{4 \cdot 2 \text{ m}} = 212{,}5 \text{ Hz}$$

5. Datos: v_F = 14 m·s^{-1}; v_R = 18 m·s^{-1}; f = 600 Hz; v = 340 m·s^{-1}

a) Si el tren A y el tren B están en movimiento acercándose el uno al otro:

$$f_R = f\, \frac{v + v_R}{v - v_F}$$

$$f_R = 600 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1} + 18 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1} - 14 \text{ m·s}^{-1}} = 658{,}9 \text{ Hz}$$

Si el pasajero y la sirena se alejan el uno del otro:

$$f_R = f\, \frac{v - v_R}{v + v_F}$$

$$f_R = 600 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1} - 18 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1} + 14 \text{ m·s}^{-1}} = 545{,}8 \text{ Hz}$$

b) Si el pasajero del tren A está en reposo (v_R = 0) y el tren B se aproxima:

$$f_R = f\, \frac{v}{v - v_F}$$

$$f_R = 600 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1} - 14 \text{ m·s}^{-1}} = 625{,}8 \text{ Hz}$$

Si la sirena, por el contrario, se aleja del receptor:

$$f_R = f\, \frac{v}{v + v_F}$$

$$f_R = 600 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m·s}^{-1}}{340 \text{ m·s}^{-1} + 14 \text{ m·s}^{-1}} = 576{,}3 \text{ Hz}$$