3. Gravitación en el universo

PREPARACIÓN DE LA UNIDAD (pág. 75)

- *a)* 0,000003 km = $3 \cdot 10^{-6}$ km

  b) 25 000 000 mg = $2,5 \cdot 10^{7}$ mg

  c) 4 537 000 kg = $4,537 \cdot 10^{6}$ kg

  d) 12 425, 65 s = $1,242\,565 \cdot 10^{4}$ s

- Datos: m = 25 kg

  Llamamos peso a la fuerza gravitatoria con la que la Tierra atrae a los cuerpos. Esta fuerza se expresa como p = m g, y es un vector dirigido hacia el centro de la Tierra. En la superficie terrestre, g = 9,8 m/s^2. Por tanto:

  $$p = m\,g = 25 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 245 \text{ N}$$

- Datos: m = 2 kg; v = 20 m/s; y_0 = 0 m

  a) Por la conservación de la energía mecánica, la energía potencial gravitatoria que adquirirá será igual a la energía cinética inicial:

  $$Ep = Ec_0 = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot (20 \text{ m/s})^2 = 400 \text{ J}$$

  b) A partir de la expresión para la energía potencial en puntos cercanos a la superficie terrestre, podemos calcular la altura a la que llegará el cuerpo:

  $$Ep = m\,g\,h;\; h = \frac{Ep}{m\,g}$$

  $$h = \frac{400 \text{ J}}{2 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 20{,}4 \text{ m}$$

- Datos: M = $5 \cdot 10^{14}$ kg; r_1 = 3 000 m; r_2 = 15 000 m;

  m = 75 kg; G = $6,67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

  a) Calculamos el potencial gravitatorio a las dos distancias:

  $$V_1 = -G\frac{M}{r_1} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{14} \text{ kg}}{3\,000 \text{ m}}$$

  $$V_1 = -11{,}12\ \frac{\text{J}}{\text{Kg}}$$

  $$V_2 = -G\frac{M}{r_2} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{14} \text{ kg}}{15\,000 \text{ m}}$$

  $$V_2 = -2{,}22\ \frac{\text{J}}{\text{Kg}}$$

  b) El trabajo que realiza el campo para llevar una masa del punto 1 al punto 2 es igual a la diferencia de energía potencial entre los dos puntos.

  Como podemos escribir la energía potencial en términos del potencial gravitatorio:

  $$Ep = m\,V$$

  el trabajo será:

  $$W = Ep_1 - Ep_2 = m\,V_1 - m\,V_2 = m\,(V_1 - V_2)$$

  $$W = 75 \text{ kg} \cdot [(-11{,}12 \text{ J/Kg} - (-2{,}22 \text{ J/Kg})]$$

  $$W = -667{,}5 \text{ J}$$

1. CAMPO GRAVITATORIO DE LA TIERRA (págs. 79 y 81)

1. Existe un campo gravitatorio alrededor de la Tierra debido a la masa de ésta. Todos los cuerpos, por el hecho de tener masa, crean a su alrededor un campo gravitatorio. En el caso de la Tierra, como en el de todos los planetas y estrellas, al ser su masa muy grande, el campo es más importante que el generado por otros cuerpos.

   — La intensidad del campo gravitatorio terrestre en un punto del espacio representa la fuerza con que la Tierra atraería un objeto de masa unidad situado en ese punto.

2. La masa de un cuerpo es una propiedad intrínseca de éste e independiente del lugar donde se encuentra. Por tanto, aunque el cuerpo se aleje de la superficie terrestre, su masa no cambia, es la misma que en cualquier otro lugar.

   Su peso, por el contrario, es la fuerza con que la Tierra lo atrae. Esta fuerza es inversamente proporcional a la distancia al centro de la Tierra. Por lo tanto, si el cuerpo se aleja de la superficie (asciende), su peso disminuye.

3. Datos: h = 200 km = $2 \cdot 10^5$ m; R_T = $6,37 \cdot 10^6$ m;

   G = $6,67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$; M_T = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg

   Hallamos el módulo del campo gravitatorio terrestre a una distancia del centro de la Tierra r = R_T + h:

   $$g = G\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

   $$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6{,}37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5)^2 \text{ m}^2}$$

   $$g = 9{,}24\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

4. Datos: m = 4 500 kg; h = 10 000 km; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

a) En la superficie terrestre, el peso del avión p_0 será:

$$p_0 = m\,g = 4\,500 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ N/kg} = 44\,100 \text{ N}$$

b) Hallamos el peso a una altura h = 10 000 km = 10^7 m, mediante la expresión de la variación del peso con la altura:

$$p = \frac{p_0}{\left(1+\dfrac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{44\,100 \text{ N}}{\left(1+\dfrac{10^7 \text{ m}}{6{,}37\cdot 10^6 \text{ m}}\right)^2} = 6\,678 \text{ N}$$

5. Datos: m = 4 kg; $M_M = 6{,}45 \cdot 10^{23}$ kg;

$R_M = 3\,380$ km $= 3{,}38 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$

a) La aceleración con que caen los cuerpos en caída libre coincide con la intensidad del campo gravitatorio. Por tanto, en la superficie de Marte:

$$a = g_M = G\,\frac{M_M}{R_M{}^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{6{,}45\cdot 10^{23} \text{ kg}}{(3{,}38\cdot 10^6 \text{ m})^2}$$

$$g_M = 3{,}8\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

b) El peso de un objeto de m = 4 kg será el producto de su masa por la intensidad del campo gravitatorio:

$$p = m\,g_M = 4 \text{ kg}\cdot 3{,}8 \text{ N/kg} = 15{,}2 \text{ N}$$

6. Datos: $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

Hallamos la altura a la cual el peso se reduce a la cuarta parte, $p = \dfrac{1}{4}\,p_0$, a partir de la expresión:

$$p = \frac{p_0}{\left(1+\dfrac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{1}{4}\,p_0;\ \left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2 = 4$$

$$1+\frac{h}{R_T} = 2;\ h = (2-1)\,R_T = R_T;\ h = R_T = 6{,}37\cdot 10^6 \text{ m}$$

7. *a)* Los astronautas en órbita alrededor de la Tierra están en estado de ingravidez porque su peso, es decir, la fuerza con que la Tierra los atrae, es la fuerza que necesitan para describir su órbita circular. La intensidad de campo gravitatorio en su órbita coincide con la aceleración centrípeta de su movimiento circular.

b) Los planetas no caen sobre el Sol ni las lunas sobre sus respectivos planetas por la misma razón que los astronautas están en estado de ingravidez. La fuerza gravitatoria que actúa sobre ellos se emplea en hacerles describir su trayectoria circular.

8. **Ep = m g h**. Esta expresión es válida sólo para puntos próximos a la superficie terrestre y para variaciones de altura pequeñas comparadas con el radio terrestre. El origen de la energía potencial se toma en la superficie de la Tierra.

$\mathbf{Ep = -G\,\dfrac{M_T\ m}{R_T + h}}$. Esta expresión es la más general y es válida para cualquier punto del espacio. El origen de energía potencial está, en este caso, en el infinito.

9. Datos: m = 500 kg; h = 2 000 km = $2 \cdot 10^6$ m;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$

A una altura de 2 000 km, la expresión de la energía potencial para cuerpos situados cerca de la superficie ya no es válida.

Si tomamos el origen de la energía potencial en el infinito:

$$Ep = -G\,\frac{M_T\ m}{R_T + h}$$

$$Ep = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24} \text{ kg}\cdot 500 \text{ kg}}{6{,}37\cdot 10^6 \text{ m} + 2\cdot 10^6 \text{ m}}$$

$$Ep = -2{,}38\cdot 10^{10} \text{ J}$$

10. Datos: $h_A = 4\,200$ km $= 4{,}2 \cdot 10^6$ m;

$h_B = 5\,800$ km $= 5{,}8 \cdot 10^6$ m; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; m = 7 500 kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$

Si tomamos el origen del potencial en el infinito, el potencial gravitatorio creado por la Tierra en cada uno de los dos puntos será:

$$V_A = -G\,\frac{M_T}{R_T + h_A}$$

$$V_A = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24} \text{ kg}}{6{,}37\cdot 10^6 \text{ m} + 4{,}2\cdot 10^6 \text{ m}}$$

$$V_A = -3{,}77\cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$V_B = -G\,\frac{M_T}{R_T + h_B}$$

$$V_B = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24} \text{ kg}}{6{,}37\cdot 10^6 \text{ m} + 5{,}8\cdot 10^6 \text{ m}}$$

$$V_B = -3{,}28\cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

— El trabajo realizado por el campo es igual a la variación de energía potencial. Podemos expresar la energía potencial gravitatoria como el producto de la masa del satélite por el potencial. Por tanto:

$$W = Ep_A - Ep_B = m\,(V_A - V_B)$$

$$W = 7\,500 \text{ kg}\cdot[-3{,}77\cdot 10^7 \text{ J/kg} - (-3{,}28\cdot 10^7 \text{ J/kg})]$$

$$W = -3{,}68\cdot 10^{10} \text{ J}$$

2. MOVIMIENTO DE PLANETAS Y SATÉLITES
(págs. 83, 85 y 87)

11. Cuesta más situar en órbita un satélite pesado que uno ligero. Aunque una vez en órbita ambos tendrán la misma velocidad, tanto la energía potencial como la energía cinética de cada uno será proporcional a su masa. Por tanto, cuanto más pesado sea, más energía se necesita para situarlo a determinada altura y darle la velocidad correspondiente a esa órbita.

12. La altura sobre el ecuador de un satélite geoestacionario es fija e invariable. Su período debe ser igual al período orbital de la Tierra (24 h). Esta condición establece una única velocidad y altura posibles para el satélite. Estas características de la órbita se han calculado en el ejemplo 7.

13. Datos: r = 8 500 km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la velocidad orbital del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{8{,}5 \cdot 10^6\ m}}$$

$$v = 6{,}85 \cdot 10^3\ m\ s$$

Hallamos el período de revolución:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi \cdot 8{,}5 \cdot 10^6\ m}{6{,}85 \cdot 10^3\ m/s} = 7{,}8 \cdot 10^3\ s$$

14. Datos: $v = 2{,}52 \cdot 10^4$ km/h = 7 000 m/s;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Despejamos el radio de la órbita de la ecuación de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}};\ r = \frac{G\,M_T}{v^2}$$

$$r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(7\,000\ m/s)^2} = 8{,}14 \cdot 10^6\ m$$

b) Determinamos el período de revolución de la órbita:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi \cdot 8{,}14 \cdot 10^6\ m}{7\,000\ m/s} = 7{,}3 \cdot 10^3\ s$$

15. La energía mecánica de un satélite en órbita alrededor de la Tierra es siempre negativa, ya que el satélite está ligado al campo gravitatorio terrestre. Si su energía mecánica no fuera negativa, el satélite escaparía de la órbita.

16. Datos: v_0 = 1 000 m/s; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

En ausencia de rozamiento, la energía mecánica se conserva: $Ec_0 + Ep_0 = Ec + Ep$;

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - G\,\frac{M_T\,m}{R_T} = -G\,\frac{M_T\,m}{R_T + h}$$

$$h = \frac{2\,G\,M_T\,R_T}{2\,G\,M_T - R_T\,v_0^2} - R_T$$

$$h = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} - 6{,}37 \cdot 10^6\,(1\,000)^2} -$$

$$- 6{,}37 \cdot 10^6\ m = 5{,}12 \cdot 10^4\ m$$

17. Datos: h = 2 000 km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

La distancia al centro de la Tierra es:

$r = h + R_T = 2 \cdot 10^6\ m + 6{,}37 \cdot 10^6\ m = 8{,}37 \cdot 10^6\ m$

Calculamos la correspondiente velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{8{,}37 \cdot 10^6\ m}}$$

$$v_e = 9{,}8 \cdot 10^3\ m\ s$$

18. La órbita de los planetas tiene forma elíptica, con el Sol en uno de sus focos. La órbita de los satélites es igualmente elíptica, con el planeta en uno de los focos.

19. La velocidad de un planeta es mayor cerca del Sol que lejos de éste. Teniendo en cuenta la segunda ley de Kepler, la velocidad será máxima cuando la distancia al Sol sea mínima, ya que con menos radio tiene que barrer la misma área que en los otros puntos de la órbita.

20. La existencia de los planetas puede predecirse a partir de su interacción gravitatoria con otros cuerpos celestes conocidos.

— Las masas de los planetas se determinan a partir del radio y el período de alguno de sus satélites. Gracias a la tercera ley de Kepler, podemos relacionar el período y el radio de la órbita del satélite con la masa del objeto alrededor del cual orbitan.

21. Datos: T = 16,7 días = $1{,}44 \cdot 10^6$ s; $r = 1{,}88 \cdot 10^9$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Hallamos la masa de Júpiter a partir de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M}\,r^3;\ M = \frac{4\pi^2\,r^3}{G\,T^2}$$

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot (1{,}88 \cdot 10^9\ m)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot (1{,}44 \cdot 10^6\ s)^2} = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg$$

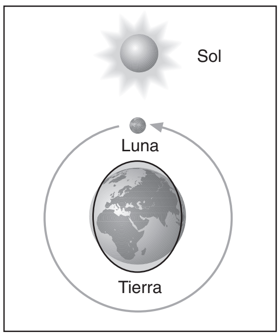
22. Éstos son los planetas del Sistema Solar y los datos de sus órbitas alrededor del Sol:

Nombre del planeta	*Distancia media al Sol ($\cdot 10^6$ km)*	*Período de revolución*	*Velocidad orbital ($\cdot 10^3$ m/s)*	*Masa ($\cdot 10^{24}$ kg)*
Mercurio	58	88 días	47,93	0,36
Venus	108	225 días	34,91	4,84
Tierra	150	1 año	29,89	5,98
Marte	228	1,9 años	23,91	0,65
Júpiter	778	11,9 años	13,02	1 900,98
Saturno	1 427	29,5 años	9,64	568,94
Urano	2 870	84 años	6,81	86,83
Neptuno	4 497	164,8 años	5,44	103,16
Plutón	5 899	247,7 años	4,74	0,60

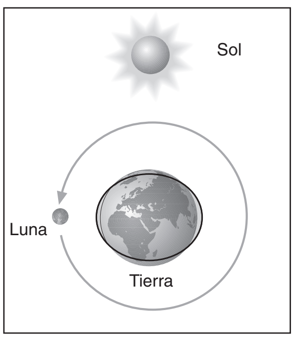
23. Respuesta sugerida:

Las mareas consisten en el ascenso y descenso sucesivo del nivel del agua del mar por efecto de la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol.

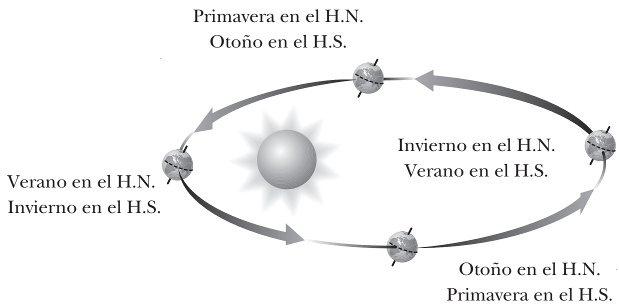
— En las **mareas vivas**, la Tierra, la Luna y el Sol están alineados. Las atracciones gravitatorias del Sol y la Luna se suman.



— En las **mareas muertas**, la Luna, la Tierra y el Sol forman ángulo recto con la Tierra en el vértice. Las atracciones gravitatorias del Sol y la Luna se restan.



24. — Las estaciones del año son debidas a la inclinación del eje de rotación terrestre respecto al plano de su órbita.



Como consecuencia de esta inclinación, en diferentes puntos de la órbita el ángulo con que inciden los rayos de luz solares en los dos hemisferios y la superficie de éstos iluminada cambian.

Cuando la Tierra muestra al Sol uno de los hemisferios, la superficie de éste iluminada es mayor, los rayos inciden más perpendiculares y calientan más; estamos en verano. Al mismo tiempo, en el otro hemisferio es invierno.

En épocas en las que los dos hemisferios están expuestos por igual a la radiación solar, hablamos de primavera y de otoño.

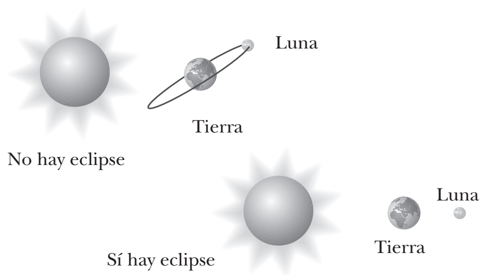
Las estaciones del año son claramente distinguibles en las latitudes medias (zonas templadas). En la zona ecuatorial no se distinguen estaciones, pues los rayos del Sol inciden siempre muy perpendiculares, justo lo contrario de lo que ocurre en las zonas polares.

— La Luna no emite luz propia, sino que refleja la luz proveniente del Sol. Los eclipses de Luna se producen cuando ésta entra en la zona de sombra de la Tierra.

Al dejar de estar iluminada por el Sol, veremos cómo se oscurece, produciéndose un eclipse lunar. La Tierra se interpone entre el Sol y la Luna.

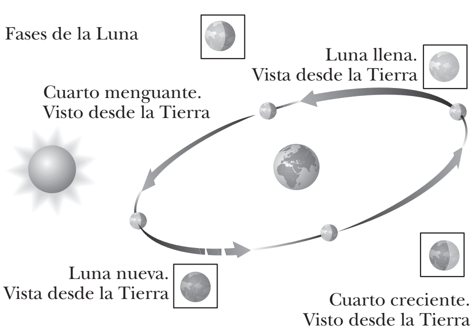
En el caso de los eclipses de Sol, es la Luna la que se interpone entre el Sol y la Tierra. La Luna pasa por delante del Sol y proyecta su sombra sobre la Tierra.

En los dos casos, el fenómeno no se produce en cada órbita. El plano de la órbita de la Luna está inclinado respecto al plano de la órbita de la Tierra.



Ello es la causa de que la orientación relativa de los tres cuerpos vaya variando con el tiempo. En los momentos en que coinciden los tres cuerpos alineados y además la Luna pasa por delante o por detrás de la Tierra, se produce un eclipse de Sol o de Luna, según el caso.

— La Luna tiene distintas fases según la orientación de su cara iluminada respecto a la Tierra.



A medida que nuestro satélite describe su órbita entorno a la Tierra, va orientando su cara iluminada en distintas direcciones. Cuando muestra su cara iluminada a la Tierra, vemos la Luna llena, mientras que si nos muestra la cara en sombra, estamos en Luna nueva. Las otras dos fases son posiciones intermedias.

FÍSICA Y SOCIEDAD (pág. 88)

a) La última expedición tripulada a la Luna fue la del *Apolo XVII,* lanzado el 7 de diciembre de 1972. Alunizó cinco días más tarde. El comandante de la misión fue Eugene Cernan y estuvo acompañado por Roland Evans, piloto del módulo de mando, y Harrison Schmitt, piloto del módulo lunar y primer científico tripulante de una misión *Apolo*. Fue considerada la misión más cara del proyecto.

Entre los objetivos del *Apolo XVII* destacan el estudio de la composición de la corteza lunar, la investigación de las ondas de gravedad y la detección de posibles signos de existencia de agua en la Luna. Realizaron tres salidas para estudiar la superficie y el subsuelo lunares, recogiendo 150 kg de piedras y polvo lunar; instalaron una nueva estación transmisora de datos y utilizaron un detector de minerales por debajo de los 1 300 m de profundidad.

La nave amaró en el Pacífico el 19 de diciembre, obteniendo así un récord de permanencia en el espacio y poniendo fin al proyecto que llevó al hombre a la Luna.

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS
(págs. 90 y 91)

25. Datos: h = 500 km; $M_L = 7{,}47 \cdot 10^{22}$ kg;

$R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m; m = 200 kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Determinamos la intensidad del campo gravitatorio a 500 km de la superficie:

$$g = G\,\frac{M_L}{(R_L + h)^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{7{,}47 \cdot 10^{22}\ kg}{(1{,}74 \cdot 10^6\ m + 5 \cdot 10^5\ m)^2}$$

$$g = 1{,}0\ N/kg$$

b) El valor de la aceleración de la gravedad coincide con el de la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = 1{,}0\ m/s^2$$

c) La fuerza con que la Luna atrae a un objeto es el peso de éste en la Luna:

$$p = m\,g = 200\ kg \cdot 1{,}0\ N/kg = 200\ N$$

26. Datos: m = 4 800 kg; h = 3 400 km;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Calculamos el potencial gravitatorio a 3 400 km de la superficie terrestre:

$$V = -G\,\frac{M_T}{R_T + h}$$

$$V = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 3{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}}$$

$$V = -4{,}1 \cdot 10^7\ \text{J/kg}$$

b) Hallamos la energía potencial gravitatoria de la nave:

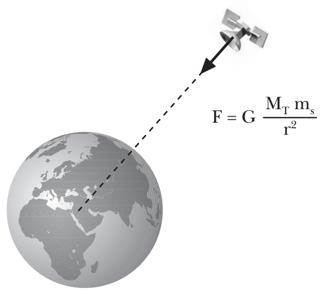
$$Ep = m\,V = 4\,800\ \text{kg} \cdot (-4{,}1 \cdot 10^7\ \text{J/kg})$$

$$Ep = -1{,}97 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

27. Datos: $p_0 = 8\,330$ N; $r = 1{,}5\ R_T$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

a)



Tierra

b) Calculamos la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{1{,}5 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}}$$

$$v = 6{,}5 \cdot 10^3\ \text{m s}$$

c) Determinamos el peso en la órbita a partir de su peso en la superficie terrestre mediante la expresión de la variación del peso con la altura:

$$p = \frac{p_0}{\left(1 + \dfrac{h}{R_T}\right)^2};\ p = \frac{8\,330\ \text{N}}{\left(1 + \dfrac{1{,}5\ R_T - R_T}{R_T}\right)^2}$$

$$p = \frac{8\,330\ \text{N}}{(1 + 0{,}5)^2} = 3\,702{,}2\ \text{N}$$

28. Datos: $r = R_T$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

Determinamos la velocidad orbital de un satélite a $r = R_T$, o primera velocidad cósmica:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}}$$

$$v = 7{,}9 \cdot 10^3\ \text{m s}$$

Calculamos su período de revolución:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}{7{,}9 \cdot 10^3\ \text{m/s}} = 5{,}1 \cdot 10^3\ \text{s}$$

29. Datos: $p_0 = 735$ N (en la Tierra); $h = 50$ km;

$M_L = 0{,}01\ M_T$; $R_L = 0{,}25\ R_T$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

a) A partir del peso del cuerpo en la superficie terrestre, determinamos su masa:

$$p_0 = m\,g_T;\ m = \frac{p_0}{g_T} = \frac{735\ \text{N}}{9{,}8\ \dfrac{\text{N}}{\text{kg}}} = 75\ \text{kg}$$

Calculamos el peso del cuerpo cerca de la superficie lunar, aprovechando que conocemos su peso en la Tierra (p_0) y las relaciones entre los radios y las masas de ambos cuerpos celestes:

$$\left.\begin{aligned} p &= G\,\frac{M_L\,m}{{R_L}^2} = G\,\frac{0{,}01\ M_T\,m}{(0{,}25\ R_T)^2} \\ p_0 &= m\,g_T = m\,G\,\frac{M_T}{{R_T}^2} \end{aligned}\right\}\ p = \frac{0{,}01}{(0{,}25)^2}\,p_0$$

$$p = \frac{0{,}01}{(0{,}25)^2} \cdot 735\ \text{N} = 117{,}6\ \text{N}$$

b) Aplicamos el principio de la conservación de la energía mecánica para determinar la velocidad del cuerpo, que cae desde una altura de 50 km, cuando llegue a la superficie de la Luna:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B;$$

$$0 - \frac{G\,M_L\,m}{R_L + h} = \frac{1}{2}\,m\,{v_B}^2 - \frac{G\,M_L\,m}{R_L}$$

$$v_B = \sqrt{2\,G\,M_L\left(-\frac{1}{R_L + h} + \frac{1}{R_L}\right)} = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L\,(R_L + h - R_L)}{R_L\,(R_L + h)}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L\,h}{R_L\,(R_L + h)}} = \sqrt{\frac{2\,G\,0{,}01\,M_T\,h}{0{,}25\ R_T\,(0{,}25\ R_T + h)}}$$

$$v_B = 390{,}5\ \text{m s}$$

30. Datos: $v_0 = 750$ km/h $= 208{,}3$ m/s; $M_S = 324\,440\ M_T$;

$R_S = 108\ R_T$; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2}$

a) Calculamos la relación entre el peso del cuerpo en el Sol y en la Tierra:

$$\left.\begin{array}{l} p_S = G\,\dfrac{M_S\,m}{R_S^{\,2}} = G\,\dfrac{324\,440\,M_T\,m}{(108\,R_T)^2} \\[2ex] p_T = G\,\dfrac{M_T\,m}{R_T^{\,2}} \end{array}\right\}$$

$$\frac{p_S}{p_T} = \frac{324\,440}{(108)^2} = 27{,}8;\, p_S = 27{,}8\; p_T$$

b) Determinamos la altura máxima alcanzada por el proyectil aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$Ec_0 + Ep_0 = Ec + Ep$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^{\,2} - G\,\frac{M_S\,m}{R_S} = -G\,\frac{M_S\,m}{R_S + h}$$

$$h = \frac{2\,G\,M_S\,R_S}{2\,G\,M_S - R_S\,v_0^{\,2}} - R_S$$

$$h = \frac{2\,G \cdot 324\,440\,M_T \cdot 108\,R_T}{2\,G \cdot 324\,440\,M_T - 108\,R_T\,v_0^{\,2}} - 108\,R_T$$

$$h = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 324\,440 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 108 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 324\,440 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} - 108 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6} \cdot (208{,}3)^2} -$$

$$- 108 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{6}\ \text{m} = 79\ \text{m}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS (págs. 92 y 93)

31. — La aceleración de la gravedad varía con la altura a la superficie de la Tierra porque varía con la distancia al centro de la Tierra. La aceleración de la gravedad es la intensidad del campo gravitatorio, es decir, la fuerza con que la Tierra atraería un cuerpo de masa unidad situado en ese punto. Como la fuerza gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la aceleración de la gravedad disminuye con la altura de la misma manera.

— El peso de un cuerpo no tiene el mismo valor en la Tierra que en la Luna. El peso es la fuerza con que la Tierra o la Luna atraen al objeto, y es proporcional a la masa del planeta o del satélite. Por tanto, no tienen el mismo peso.

32. La intensidad del campo gravitatorio y la aceleración de la gravedad coinciden en cada punto debido a que la masa inercial y la masa gravitatoria de cualquier cuerpo son iguales. La intensidad del campo g es la fuerza por unidad de masa gravitatoria que la Tierra ejerce sobre todo cuerpo. Entonces, un cuerpo de masa gravitatoria m_g siente una fuerza (peso):

$$p = m_g\, g$$

Por otro lado, debido a esta fuerza, el cuerpo experimentará una aceleración a, proporcional a su masa inercial m_i:

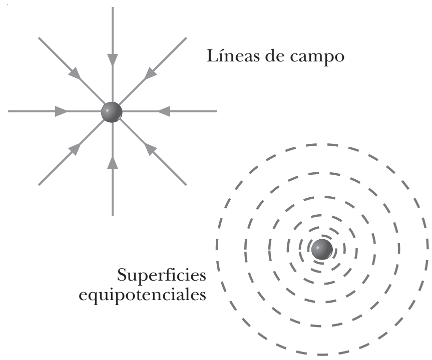
$$p = m_i\, a$$

Como la fuerza es la misma y la masa inercial coincide con la gravitatoria, $m_i = m_g$, la aceleración del cuerpo coincide con la intensidad del campo gravitatorio en ese punto.

33. El peso es la fuerza con que la Tierra atrae a los objetos en su superficie por el hecho de tener masa. Es inversamente proporcional a la distancia al centro de la Tierra, de modo que no es una magnitud constante.

La masa, en cambio, es una propiedad inherente a los cuerpos. Es fija e invariable. Representa la intensidad con que el cuerpo participa en las interacciones gravitatorias, por una parte, y, por otra, la resistencia que opone a ser acelerado bajo la acción de una fuerza.

34.



35. Cuando un cuerpo se eleva cierta altura sobre la superficie de la Tierra, gana energía potencial. Si se deja caer el cuerpo desde esta altura, la ganancia de energía potencial implica que llegará a la superficie con mayor velocidad.

— La pérdida (o ganancia) de energía potencial significa que el cuerpo queda más (o menos) ligado al campo gravitatorio terrestre.

36. Lo consigue describiendo un movimiento con el mismo período que el período de rotación de la Tierra, 24 horas. Para ello debe describir una órbita con una velocidad y altura concretas. Así, su velocidad angular coincide con la de giro de nuestro planeta.

37.

Energía mecánica	*Tipo de órbita*
$E > 0$	Abierta: hipérbola
$E = 0$	Abierta: parábola
$E < 0$	Cerrada: circular o elíptica

— Para que un cuerpo abandone el campo gravitatorio terrestre, es necesario que su energía mecánica sea igual o superior a cero. Esto se conseguirá si se lanza desde la superficie a una velocidad igual o superior a la velocidad de escape.

38. La trayectoria de los planetas del Sistema Solar debe ser plana por la conservación del momento angular.

El momento angular es una magnitud vectorial perpendicular a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Como sobre los planetas no actúa ningún momento de fuerzas, el momento angular debe conservarse. Así, tendrá la misma dirección en cualquier punto de la órbita, y $\vec{r}$ y $\vec{v}$ estarán siempre en el mismo plano perpendicular a $\vec{L}$.

39. Datos: h = 450 km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la intensidad del campo gravitatorio terrestre a 450 km de la superficie:

$$g = \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(6{,}37 \cdot 10^6\ m + 4{,}5 \cdot 10^5\ m)^2}$$

$$g = 8{,}57\ N/kg$$

40. Datos: m = 25 kg; $g_0 = 9{,}8$ m/s^2; h = 3 000 km;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

a) Determinamos el peso del cuerpo en la superficie terrestre, donde conocemos el valor de la intensidad del campo gravitatorio:

$p_0 = m\, g_0 = 25\ kg \cdot 9{,}8\ N/kg = 245\ N$

b) A 3 000 km de altura ya no es válida la expresión utilizada en el problema anterior. Para calcular el peso utilizaremos la fórmula de la variación del peso con la altura:

$$p = \frac{p_0}{\left(1 + \dfrac{h}{R_T}\right)^2}; p = \frac{245\ N}{\left(1 + \dfrac{3 \cdot 10^6\ m}{6{,}37 \cdot 10^6\ m}\right)^2} = 113{,}2\ N$$

41. Datos: $p_0 = 19{,}6$ N (en la Tierra); $M_L = 7{,}47 \cdot 10^{22}$ kg;

$R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$; $g_0 = 9{,}8$ N/kg

a) Calculamos la masa del objeto a partir de su peso en la Tierra y de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre:

$$p_0 = m\, g_0$$

$$m = \frac{p_0}{g_0} = \frac{19{,}6\ N}{9{,}8\ \dfrac{N}{kg}} = 2\ kg$$

b) El valor de la masa en la Luna será el mismo que en la Tierra y que en cualquier otro lugar, m = 2 kg.

El peso en la superficie lunar es la fuerza gravitatoria con que la Luna atrae el objeto:

$$p_L = G\,\frac{M_L\, m}{{R_L}^2}$$

$$p_L = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{7{,}47 \cdot 10^{22}\ kg \cdot 2\ kg}{(1{,}74 \cdot 10^6\ m)^2} = 3{,}3\ N$$

42. Datos: $g_0 = 9{,}8$ m/s^2; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

Para determinar el punto sobre la superficie terrestre donde la gravedad es dos tercios de g_0, despejamos h de la expresión de la variación de la gravedad con la altura:

$$g = \frac{2}{3}\,g_0 = \frac{g_0}{\left(1 + \dfrac{h}{R_T}\right)^2}; \frac{3}{2} = \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2$$

$$1 + \frac{h}{R_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}; h = R_T\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right) = 6{,}37 \cdot 10^6\ m\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

$$h = 1{,}43 \cdot 10^6\ m$$

43. Datos: m = 600 kg; r = 10 000 km;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la energía potencial del satélite a 10 000 km del centro de la Tierra:

$$Ep = -G\,\frac{M_T\, m}{r}$$

$$Ep = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 600\ kg}{10^7\ m}$$

$$Ep = -2{,}39 \cdot 10^{10}\ J$$

44. Datos: $V = -2 \cdot 10^7$ J/kg; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Despejamos de la expresión general del potencial gravitatorio la distancia r al centro de la Tierra:

$$V = -G\,\frac{M_T}{r}; r = -G\,\frac{M_T}{V}$$

$$r = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(-2 \cdot 10^7\ J/kg)} = 1{,}99 \cdot 10^7\ m$$

Por tanto, la distancia a la superficie terrestre será:

$h = r - R_T = 1{,}99 \cdot 10^7\ m - 6{,}37 \cdot 10^6\ m = 1{,}35 \cdot 10^7\ m$

45. Datos: m = 2 500 kg; r_1 = 8 000 km; r_2 = 10 000 km;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

El trabajo necesario para trasladar el satélite coincidirá con la variación de su energía potencial:

$$W = Ep_1 - Ep_2 = m\,V_1 - m\,V_2 = m\,(V_1 - V_2)$$

$$W = m\left(G\,\frac{M_T}{r_1} - G\,\frac{M_T}{r_2}\right) = m\,G\,M_T\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$W = 2\,500 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{1}{8 \cdot 10^6} - \frac{1}{10^7}\right)$$

$$W = 2{,}5 \cdot 10^{10}\ J$$

46. Datos: $r = 7\ 000$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la velocidad orbital en una órbita de 7 000 km de radio:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{7 \cdot 10^6\ m}}$$

$$v = 7{,}5 \cdot 10^3\ m\ s$$

47. Datos: $m = 1\ 250$ kg; $h = 1\ 400$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Determinamos su energía potencial:

$$Ep = -G\,\frac{M_T\,m}{R_T + h}$$

$$Ep = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1\,250\ kg}{6{,}37 \cdot 10^6\ m + 1{,}4 \cdot 10^6\ m}$$

$$Ep = -6{,}42 \cdot 10^{10}\ J$$

b) Para determinar la energía cinética del satélite, calculamos primero su velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{6{,}37 \cdot 10^6\ m + 1{,}4 \cdot 10^6\ m}}$$

$$v = 7{,}2 \cdot 10^3\ m\ s$$

$$Ec = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,250\ kg\ (7{,}2 \cdot 10^3\ m/s)^2 = 3{,}24 \cdot 10^{10}\ J$$

c) Hallamos el período de revolución a partir de la velocidad y el radio de la órbita:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ m + 1{,}4 \cdot 10^6\ m)}{7{,}2 \cdot 10^3\ m/s} = 6{,}8 \cdot 10^3\ s$$

48. Datos: $h = 5\ 000$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Para que el satélite llegue a 5 000 km de altura, es necesario lanzarlo con una velocidad tal que su energía mecánica inicial sea igual a la energía potencial que tendrá a esa altura, a donde llegaría con velocidad nula:

$$\frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2 - G\,\frac{M_T\,m}{R_T} = -G\,\frac{M_T\,m}{R_T + h}$$

$${v_0}^2 = \frac{2}{m}\,G\,M_T\,m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$${v_0}^2 = 2\,G\,M_T\,\frac{R_T + h - R_T}{R_T\,(R_T + h)};\ v_0 = \sqrt{2\,G\,M_T\,\frac{h}{R_T\,(R_T + h)}}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg\ \cdot}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 10^6\ m}{6{,}37 \cdot 10^6\ m \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ m + 5 \cdot 10^6\ m)}}$$

$$v_0 = 7{,}4 \cdot 10^3\ m\ s$$

49. Datos: $M_L = 7{,}47 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la velocidad de escape desde la superficie de la Luna:

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_L}{R_L}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 7{,}47 \cdot 10^{22}\ kg}{1{,}74 \cdot 10^6\ m}} = 2{,}4 \cdot 10^3\ \frac{m}{s}$$

50. Datos: $r = 6{,}7 \cdot 10^5$ km; $M_J = 318{,}4\ M_T$;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos el período de revolución de Europa a partir de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_J}\,r^3$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G\,M_J}\,r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot 318{,}4\ M_T}\,r^3}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (6{,}7 \cdot 10^8\ m)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 318{,}4 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}}$$

$$T = 3{,}0 \cdot 10^5\ s$$

51. Datos: $T = 1$ día $= 24$ h $= 8{,}64 \cdot 10^4$ s;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Para determinar el radio de la órbita aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}\,r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ kg\cdot (8{,}64\cdot 10^4\ s)^2}{4\pi^2}}$$

$$r = 4{,}22\cdot 10^7\ m$$

52. Datos: $R = 1{,}25\ R_T$; $g_0 = 14{,}7\ m/s^2$ (en el planeta);

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$

a) Para calcular la relación entre las masas de la Tierra y el planeta, escribimos las expresiones del campo gravitatorio en la superficie de cada uno de ellos y las dividimos:

$$g_0\ (\text{en la Tierra}) = G\,\frac{M_T}{R_T^{\,2}} = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$$

$$g_0\ (\text{en el planeta}) = G\,\frac{M}{R^2} = G\,\frac{M}{(1{,}25\ R_T)^2} = 14{,}7\ \frac{m}{s^2}$$

$$\frac{g_0\ (\text{en el planeta})}{g_0\ (\text{en la Tierra})} = \frac{G\,\frac{M}{(1{,}25\ R_T)^2}}{G\,\frac{M_T}{R_T^{\,2}}} = \frac{M}{(1{,}25)^2\ M_T}$$

$$\frac{M}{M_T} = (1{,}25)^2\cdot\frac{g_0\ (\text{en el planeta})}{g_0\ (\text{en la Tierra})} = (1{,}25)^2\cdot\frac{14{,}7\ \frac{m}{s^2}}{9{,}8\ \frac{m}{s^2}} = 2{,}34$$

b) A 275 m sobre la superficie, podemos escribir la energía potencial como Ep = m g h.

Aplicamos la conservación de la energía mecánica para calcular la velocidad con que el objeto llegaría a la superficie:

$$Ec_0 + Ep_0 = Ec + Ep;\ m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$v = \sqrt{2\,g\,h}$$

Imponemos que las velocidades sean las mismas en los dos planetas para determinar la altura desde la cual debemos soltar el objeto en el otro planeta:

$$v = v_t$$

$$\sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2\,g_T\,h_T}$$

$$h = \frac{g_T}{g}\,h_T;\ h = \frac{9{,}8\ \frac{m}{s^2}}{14{,}7\ \frac{m}{s^2}}\cdot 275\ m = 183{,}3\ m$$

53. Datos: m = 1 500 kg; h = 500 km;

$M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37\cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$

a) Calculamos la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}} = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T + h}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ kg}{6{,}37\cdot 10^6\ m + 5\cdot 10^5\ m}} = 7{,}6\cdot 10^3\ m\ s$$

b) Determinamos el período orbital a partir de la velocidad y el radio de la órbita:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v} = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi\cdot(6{,}37\cdot 10^6\ m + 5\cdot 10^5\ m)}{7{,}6\cdot 10^3\ m/s} = 5{,}7\cdot 10^3\ s$$

c) Hallamos la energía mecánica de traslación del satélite:

$$E = -\frac{1}{2}\,\frac{G\,M_T\,m}{r} = -\frac{1}{2}\,\frac{G\,M_T\,m}{R_T + h}$$

$$E = -\frac{1}{2}\cdot\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ kg\cdot 1\,500\ kg}{6{,}37\cdot 10^6\ m + 5\cdot 10^5\ m}$$

$$E = -4{,}35\cdot 10^{10}\ J$$

d) Calculamos la aceleración centrípeta, que debe coincidir con la aceleración de la gravedad a esa altura, pues el campo gravitatorio es el responsable de que el satélite describa una órbita circular:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T + h}$$

$$a_c = \frac{(7{,}6\cdot 10^3\ m/s)^2}{6{,}37\cdot 10^6\ m + 5\cdot 10^5\ m} = 8{,}4\ m/s^2$$

$$g = \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$g = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\ kg}{(6{,}37\cdot 10^6\ m + 0{,}5\cdot 10^6\ m)^2}$$

$$g = 8{,}4\ N/kg$$

54. Datos: $r_{Umbriel} = 2{,}67\cdot 10^8$ m; $T_{Umbriel} = 3{,}\ 58\cdot 10^5$ s;

$r_{Ober.} = 5{,}86\cdot 10^8$ m; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$

a) Determinamos la masa de Urano a partir de la tercera ley de Kepler, aplicada a su satélite Umbriel:

$$T^2_{Umbriel} = \frac{4\pi^2}{G\,M_{Urano}}\,r^3_{Umbriel}$$

$$M_{Urano} = \frac{4\pi^2}{G\,T_{Umbriel}^{\,2}}\,r^3_{Umbriel}$$

$$M_{Urano} = \frac{4\pi^2\cdot(2{,}67\cdot 10^8\ m)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot(3{,}58\cdot 10^5\ s)^2} = 8{,}79\cdot 10^{25}\ kg$$

b) Conocida la masa, aplicamos la misma ley para determinar el período de revolución de Oberón a partir de su distancia al centro del planeta:

$$T_{Ober.} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G\,M_{Urano}}\, r_{Ober.}^{\;3}}$$

$$T_{Ober.} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (5{,}86 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N·m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 8{,}79 \cdot 10^{25} \text{ kg}}} = 1{,}16 \cdot 10^6 \text{ s}$$

55. — **Los agujeros negros** son el resultado final de la evolución de algunas estrellas muy masivas en las que, debido a su propia atracción gravitatoria, la estrella se contrae de forma que su masa se concentra en un volumen muy pequeño.

El campo gravitatorio en su interior es tan intenso que ningún objeto que caiga en él, ni siquiera la luz, puede llegar a escapar nunca.

— **Púlsares y quásares**. Los **púlsares** se observan como una corta emisión periódica de ondas de radio de gran energía y período muy exacto. Son la última etapa de algunas estrellas que explotan expulsando la materia de las capas más externas. La visión de esta explosión recibe el nombre de supernova. El núcleo de la estrella, que sobrevive a la explosión, es un objeto muy denso que rota a gran velocidad y posee un intenso campo magnético. Recibe el nombre de estrella de neutrones, pues éstos son sus principales componentes. Cada vez que uno de los polos magnéticos de la estrella de neutrones, al girar, apunta en nuestra dirección, observamos un pulso de radiación.

Los **quásares** son galaxias lejanas cuyo núcleo despide repentinamente una gran cantidad de luz y/o ondas de radiofrecuencia, como si se tratara de una explosión. Este fenómeno puede llegar a hacer que la luminosidad de la galaxia aumente en un factor 100 respecto a lo que es normal.

— **Evolución de las estrellas**. Las estrellas se forman a partir de gas y polvo interestelar. El material se va compactando, debido a su propio campo gravitatorio, hasta llegar a presiones y temperaturas suficientemente elevadas como para iniciar la fusión del hidrógeno. La energía de las reacciones termonucleares impide que el material siga compactándose y la estrella empieza a brillar. La mayor parte de la vida de una estrella consiste en la combustión de todo su hidrógeno. Cuando éste se acaba, al faltar la energía que impedía que se contrajera, la estrella empieza otra vez a compactarse. El resultado de esta compresión dependerá de la masa de la estrella: puede que llegue a las condiciones de fusión de otros elementos distintos del hidrógeno y prolongue un tiempo así su vida; o puede acabar convirtiendo su núcleo en un objeto muy compacto (enana blanca, estrella de neutrones o agujero negro, según el caso) y expulsando sus capas más externas al espacio exterior (nebulosa planetaria —sin explosión— o supernova —con explosión—).

— **El origen del universo.** En los años veinte, el astrónomo E. Hubble descubrió que las otras galaxias que pueblan el universo se alejan de nosotros a una velocidad proporcional a la distancia que las separa de nuestra galaxia. Ello implica que desde otra galaxia cualquiera también veríamos que las demás galaxias se alejan. Toda galaxia se aleja del resto de las galaxias como en una especie de explosión. Esta observación, sumada a la teoría de la relatividad de Einstein, sugiere que, en algún momento del pasado, las distancias entre todos los puntos del universo eran nulas. A partir de esa situación inicial, el universo empezó a expandirse, como si hubiera estallado una bomba. Por eso esta teoría recibe el nombre del *big bang*, la gran explosión.

56. El principal efecto de la ingravidez sobre el cuerpo humano es la alteración de la presión sanguínea y su flujo. La sangre tiende a concentrarse en las partes superiores del cuerpo, lo que perjudica a los miembros inferiores. Además, los huesos sufren descalcificación y los músculos atrofia, especialmente los de las piernas. Los astronautas que realizan estancias prolongadas en el espacio necesitan una adaptación de entre diez y quince días a las condiciones de ingravidez, mediante ejercicios diarios y medicación. Antes de volver a la Tierra, se someten a una readaptación a la gravedad, con un dispositivo que reproduce las condiciones de gravedad de la Tierra, para normalizar la presión sanguínea.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO (pág. 93)

1. El peso de un cuerpo es la fuerza con que éste es atraído por la Tierra o por el planeta sobre el que se encuentre.

   Depende directamente de la masa del cuerpo y de la masa del planeta, y es inversamente proporcional a la distancia al centro del planeta al cuadrado.

$$p = m\,g = m\,G\,\frac{M}{r^2}$$

2. Para hallar la expresión de la velocidad de escape, imponemos que su energía mecánica final sea igual a cero. Por tanto, por la conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 - G\,\frac{M\,m}{r} = 0$$

$$\frac{1}{2}\,v^2 - G\,\frac{M}{r}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}}$$

3. **Leyes de Kepler:**

   1. Todos los planetas describen órbitas elípticas con el Sol situado en uno de sus focos.

   2. La recta que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

   3. El cuadrado del período de la órbita de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol:

$$T^2 = C\,R^3$$

— Para demostrar la tercera ley de Kepler partimos de las expresiones para la velocidad orbital y para el período:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}\,;\,T^2 = \frac{2\pi\,r}{v}$$

Sustituimos la expresión de v en T y elevamos al cuadrado:

$$T = \frac{2\pi\,r}{\sqrt{\frac{G\,M}{r}}}\,;\,T^2 = \frac{4\pi^2\,r^2}{\frac{G\,M}{r}} = \frac{4\pi^2}{G\,M}\,r^3$$

4. Datos: h = 275 km; g_0 = 9,8 N/kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Calculamos la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(6{,}37 \cdot 10^6\ m + 2{,}75 \cdot 10^5\ m)^2}$$

$$g = 9{,}03\ N/kg$$

— Determinamos la altura en que $g = g_0 - 0{,}15\,g_0 = 0{,}85\,g_0$ a partir de la expresión de la variación de la gravedad con la altura:

$$g = 0{,}85\,g_0 = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}\,;\,1 + \frac{h}{R_T} = \sqrt{\frac{1}{0{,}85}}$$

$$h = R_T\left(\sqrt{\frac{1}{0{,}85}} - 1\right) = 6{,}37 \cdot 10^6\ m \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{0{,}85}} - 1\right)$$

$$h = 5{,}4 \cdot 10^5\ m$$

5. Datos: t = 3 s; $M_L = 7{,}47 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

La aceleración de una partícula en caída libre coincide con la intensidad del campo gravitatorio en ese punto. Determinamos, pues, el campo gravitatorio de la Luna cerca de su superficie:

$$g = \frac{G\,M_L}{R_L^{\,2}}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{7{,}47 \cdot 10^{22}\ kg}{(1{,}74 \cdot 10^6\ m)^2} = 1{,}65\ m/s^2$$

Para determinar la distancia que recorre la partícula en tres segundos, aplicamos la ecuación correspondiente del MRUA:

$$x = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = \frac{1}{2}\,g\,t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}65\ m/s^2 \cdot (3\ s)^2 = 7{,}4\ m$$

6. Datos: m = 5 kg

Si la balanza se equilibra en la Tierra con pesas por valor de 5 kg, la masa del cuerpo es de 5 kg. La balanza está equilibrada porque el peso en los dos platillos es el mismo: es el producto de la gravedad en la superficie terrestre por la masa en los platillos. Como la gravedad es la misma en los lados de la balanza, ésta se equilibra con masas iguales.

En la Luna, lo único que cambia es la intensidad del campo gravitatorio o gravedad en la superficie. Como en los dos platillos la gravedad que actúa es la misma, la balanza se equilibrará también con masas iguales. Por tanto, en la Luna necesitaremos 5 kg de pesas.

7. Datos: m = 1 000 kg; T = 2 días = 48 h = $1{,}73 \cdot 10^5$ s

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

a) Calculamos el radio de la órbita mediante la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}\,r^3;\,r = \sqrt[3]{\frac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot (1{,}73 \cdot 10^5\ s)^2}{4\pi^2}}$$

$$r = 6{,}71 \cdot 10^7\ m$$

b) Su aceleración normal coincide con la aceleración de la gravedad en la órbita:

$$a_n = g = G\,\frac{M_T}{r^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(6{,}71 \cdot 10^7\ m)^2}$$

$$g = 0{,}09\ N/kg = 0{,}09\ m/s^2$$

c) Determinamos la energía potencial gravitatoria:

$$Ep = -G\,\frac{M_T\,m}{r}$$

$$Ep = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg \cdot 1\,000\ kg}{6{,}71 \cdot 10^7\ m}$$

$$Ep = -5{,}94 \cdot 10^9\ J$$

8. Datos: r = $9{,}4 \cdot 10^6$ m; T = 460 min = 27 600 s;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2}$

Para determinar la masa de Marte aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\,M_M}\,r^3;\,M_M = \frac{4\pi^2}{G\,T^2}\,r^3$$

$$M_M = \frac{4\pi^2 \cdot (9{,}4 \cdot 10^6\ m)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N{\cdot}m^2}{kg^2} \cdot (27\,600\ s)^2} = 6{,}45 \cdot 10^{23}\ kg$$