12 Física cuántica

Actividades del interior de la unidad

1. Calcula la temperatura de un hierro al rojo vivo para el cual $\lambda_{máx}$ = 2,1 µm.

Para calcular la temperatura que solicita el enunciado, aplicamos la ley del desplazamiento de Wien:

$$T \cdot \lambda_{máx} = 2{,}896 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \rightarrow T = \frac{2{,}896 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{\lambda_{máx}}$$

Al sustituir el valor de la longitud de onda para la que la energía radiada es máxima, $\lambda_{máx}$, se obtiene:

$$T = \frac{2{,}896 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{2{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{m}} = 1\,379\ \text{K}$$

2. Razona si es correcta la afirmación: «Un cuerpo negro tiene ese color a todas las temperaturas». Indica cuál será el color de un cuerpo negro a 5 000 K.

La afirmación no es correcta; el cuerpo negro emite radiación que puede ser visible a determinadas temperaturas.

Si aplicamos la ley del desplazamiento de Wien, obtenemos la longitud de onda de la radiación emitida a 5 000 K:

$$T \cdot \lambda_{máx} = 2{,}896 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \rightarrow \lambda_{máx} = \frac{2{,}896 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{T} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_{máx} = \frac{2{,}896 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{5\,000\ \text{K}} = 5{,}79 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 579\ \text{mm}$$

La longitud de onda obtenida corresponde al color amarillo-verdoso.

3. Calcula hasta cuánto debe subir la temperatura de un cuerpo negro, inicialmente a 20 °C, para que emita el triple de radiación térmica.

De acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, la energía total que un cuerpo negro radia por unidad de tiempo y superficie es directamente proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta:

$$R = \frac{P}{S} = \sigma \cdot T^4$$

Por tanto, la energía emitida a la temperatura T_1 = 20 °C = 293 K será:

$$R_1 = \sigma \cdot T_1^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \cdot (293\ \text{K})^4 = 418\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

La temperatura, T_2, a la que emitirá el triple de radiación térmica, $R_2 = 3 \cdot R_1$, será:

$$R_2 = \sigma \cdot T_2^4 \rightarrow T_2 = \sqrt[4]{\frac{R_2}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot R_1}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 418\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}}{5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}}} = 386\ \text{K}$$

Esta temperatura, expresada en grados centígrados, corresponde a:

$$t = T - 273 = 386 - 273 = 113\ °\text{C}$$

4. ¿Qué frecuencia tiene la luz cuyos cuantos de energía son de 2,5 eV?

La energía de los cuantos de luz, expresada en la unidad correspondiente del S.I., es:

$$E = 2{,}5 \text{ eV} \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 4{,}005 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

De acuerdo con la hipótesis cuántica de Planck, tenemos:

$$E = h \cdot f \rightarrow f = \frac{E}{h} = \frac{4{,}005 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = 6{,}04 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

5. Calcula la frecuencia de la radiación incidente sobre un metal de frecuencia umbral $f_0 = 10^{15}$ Hz, sabiendo que los fotoelectrones arrancados tienen una energía cinética máxima de 2,15 eV.

La energía cinética máxima de los fotoelectrones arrancados, en unidades S.I., es:

$$(E_c)_{máx} = 2{,}15 \text{ eV} \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 3{,}444 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

El valor del trabajo de extracción, W_e, es:

$$W_e = h \cdot f_0 = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 10^{15} \text{ Hz} = 6{,}626 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

De acuerdo con la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico, la expresión que permite calcular la frecuencia de la radiación incidente resulta:

$$f = \frac{(E_c)_{máx} + W_e}{h} = \frac{3{,}444 \cdot 10^{-19} \text{ J} + 6{,}626 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} = 1{,}52 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

6. Sobre un metal de frecuencia umbral $f_0 = 2 \cdot 10^{14}$ Hz se hace incidir una radiación de longitud de onda $\lambda = 10^{-7}$ m. Calcula la función trabajo, la energía cinética máxima de los fotoelectrones y el potencial de frenado.

La función trabajo, o trabajo de extracción, es:

$$W_e = h \cdot f_0 = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 2 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 1{,}325 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La energía cinética máxima de los fotoelectrones arrancados del metal la obtenemos a partir de la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$(E_c)_{máx} = h \cdot f - W_e \qquad [1]$$

donde f es la frecuencia de la radiación incidente, cuyo valor es:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{10^{-7} \text{ m}} = 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Por tanto, de acuerdo con [1]:

$$(E_c)_{máx} = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz} - 1{,}325 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1{,}855 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

que, expresada en eV, resulta:

$$(E_c)_{máx} = 1{,}855 \cdot 10^{-18} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 11{,}58 \text{ eV}$$

El potencial de frenado, V_0, es:

$$(E_c)_{máx} = e \cdot V_0 \rightarrow V_0 = \frac{(E_c)_{máx}}{e} = \frac{1{,}855 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 11{,}58 \text{ V}$$

7. Un haz de rayos X de 0,35 nm es dispersado por efecto Compton. Calcula la longitud de onda de la radiación secundaria medida a un ángulo de 80° en relación con la radiación incidente.

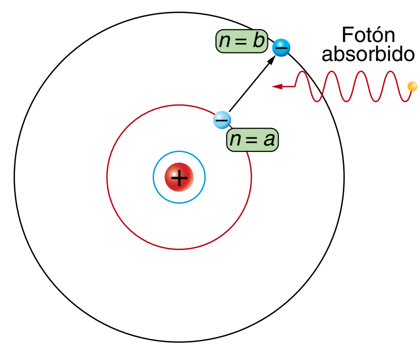
Según la expresión del efecto Compton, la longitud de onda de la radiación secundaria es:

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e \cdot c} \cdot (1 - cos\ \theta)$$

$$\lambda' = 0{,}35 \cdot 10^{-9}\ \text{m} + \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3 \cdot 10^{-8}\ \text{m/s}} \cdot (1 - cos\ 80°) =$$
$$= 3{,}52 \cdot 10^{-10}\ \text{m} = 0{,}352\ \text{nm}$$

8. ¿Cómo quedaría la expresión de la frecuencia si el electrón, tras absorber un fotón, salta a una órbita más alejada?

De acuerdo con el modelo atómico de Bohr, el electrón solo gana o pierde energía cuando salta de una órbita a otra. Para saltar a otra más alejada del núcleo, debe absorber un fotón, y para hacerlo a una más cercana, emite un fotón.



En este caso, si el electrón salta desde una órbita $n = a$ hasta otra $n = b$, con $a < b$, debe absorber un fotón de energía $E = h \cdot f$. Por tanto, el principio de conservación de la energía implica que:

$$E_a + h \cdot f = E_b \rightarrow f = \frac{E_b - E_a}{h} = \frac{|E_a - E_b|}{h}$$

Entonces, de acuerdo con el desarrollo que hemos realizado en la página 357 del libro del alumno, la expresión de la frecuencia será:

$$f = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot K^2 \cdot e^4}{h^3} \cdot \left| \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right| \ ; \ f = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot K^2 \cdot e^4}{h^3} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

9. Calcula el radio de la órbita del electrón en el átomo de hidrógeno para *n* = 2 y *n* = 3.

Los valores posibles para el radio del electrón en el átomo de hidrógeno son:

$$r_n = n^2 \cdot a_0 = n^2 \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \text{m} \ ; \ n = 1, 2, 3, ...$$

Por tanto, para $n = 2$ y $n = 3$, tenemos, respectivamente:

$$r_2 = 2^2 \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = 2{,}116 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \ ; \ r_3 = 3^2 \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = 4{,}761 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

10. Obtén la energía del electrón del átomo de hidrógeno para *n* = 2 y *n* = 3.

Los valores posibles para la energía del electrón en el átomo de hidrógeno son:

$$E_n = \frac{E_0}{n^2} = -\frac{1}{n^2} \cdot 2{,}184 \cdot 10^{-18}\ \text{J} \ ; \ n = 1, 2, 3, ...$$

Por tanto, para $n = 2$ y $n = 3$, resulta, respectivamente:

$$E_2 = -\frac{1}{2^2} \cdot 2{,}184 \cdot 10^{-18}\ \text{J} = -0{,}546 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

$$E_3 = -\frac{1}{3^2} \cdot 2{,}184 \cdot 10^{-18}\ \text{J} = -0{,}243 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

11. ¿Cuál es la energía mínima necesaria para ionizar un átomo de hidrógeno?

Si el átomo se encuentra en su estado fundamental, para ionizar el átomo de hidrógeno será necesario hacer saltar al electrón desde el nivel $n = 1$ hasta el infinito. Por tanto, si llamamos E_i a la energía de ionización, se cumplirá:

$$E_1 + E_i = E_\infty \rightarrow E_i = E_\infty - E_1$$

Como $E_\infty = 0$, teniendo en cuenta el valor de la energía del electrón en el estado fundamental ($n = 1$), resulta:

$$E_i = 0 - \left(-\frac{1}{1^2} \cdot 2{,}184 \cdot 10^{-18}\right) \text{J} = 2{,}184 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

12. Calcula la frecuencia de la tercera línea de la serie de Lymann.

La fórmula de Rydberg, que recoge todas las líneas conocidas para el hidrógeno, incluyendo las del ultravioleta y el infrarrojo, es:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

En el caso de la serie de Lymann: $m = 1$; $n = 2, 3, 4,...$

En particular, la tercera línea de esta serie cumple que $n = 4$; así:

$$\frac{1}{\lambda} = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 1{,}028 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

La frecuencia de la tercera línea será, entonces:

$$f = \frac{c}{\lambda} = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1{,}028 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} = 3{,}084 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

13. Para conseguir una misma longitud de onda asociada, ¿quién debe moverse más velozmente, los neutrones o los electrones?

La longitud de onda asociada al electrón es:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e \cdot v_e}$$

Y la que corresponde al neutrón:

$$\lambda_n = \frac{h}{m_n \cdot v_n}$$

Si se quiere conseguir la misma longitud de onda asociada:

$$\lambda_e = \lambda_n \rightarrow \frac{h}{m_e \cdot v_e} = \frac{h}{m_n \cdot v_n} \rightarrow \frac{v_e}{v_n} = \frac{m_n}{m_e}$$

Como la masa del neutrón es mayor que la del electrón, se cumplirá:

$$\frac{m_n}{m_e} > 1 \rightarrow \frac{v_e}{v_n} > 1$$

Es decir, el electrón debe moverse mucho más rápidamente que el neutrón.

NOTA: Para completar la actividad, se puede proponer al alumnado que calcule la relación entre ambas velocidades, dadas las masas del electrón y del neutrón (pueden consultarse en el apéndice del libro del alumno).

14. **Si se aceleran electrones con una diferencia de potencial de 4 000 V, ¿cuál será su longitud de onda asociada?**

Un electrón, al ser sometido a una diferencia de potencial, experimenta una variación en su energía cinética:

$$\Delta E_c = -q \cdot \Delta V \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 = -q_e \cdot \Delta V$$

A partir de la expresión anterior, podemos obtener la velocidad hasta la que se acelera el electrón:

$$v_e = \sqrt{\frac{-q_e \cdot 2 \cdot \Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{-(-1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}) \cdot 2 \cdot 4\,000\ \text{V}}{9{,}107 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 3{,}75 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda asociada a los electrones será:

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v_e} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}107 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3{,}75 \cdot 10^7\ \text{m/s}} = 0{,}194 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

NOTA: No se han considerado correcciones relativistas.

15. **Dos partículas de distinta masa tienen la misma energía cinética. ¿Tendrán la misma longitud de onda asociada?**

Si las masas m_1 y m_2 tienen la misma energía cinética, se cumplirá:

$$E_{c_1} = E_{c_2} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 \rightarrow m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \cdot \frac{v_2}{v_1}$$

La longitud de onda asociada a cada partícula es:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{h}{m_1 \cdot v_1} = \frac{h}{m_2 \cdot v_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \\ \lambda_2 &= \frac{h}{m_2 \cdot v_2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \cdot \frac{v_1}{v_2}$$

Como, según el enunciado, las partículas tienen distinta masa, $m_1 \neq m_2$, al tener la misma energía cinética, sus velocidades han de ser distintas, $v_1 \neq v_2$ y, por tanto, $v_1/v_2 \neq 1$, lo que implica que su longitud de onda asociada es distinta.

16. **Calcula la longitud de onda asociada a un protón cuya energía cinética es de 4 MeV (masa del protón: $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg).**

La energía cinética del protón, en unidades S.I., es:

$$E_c = 4\ \text{MeV} = 4 \cdot 10^6\ \text{eV} \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} = 6{,}408 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

La velocidad del protón será, entonces:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}408 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = 2{,}77 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

Y la longitud de onda asociada:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 2{,}77 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 1{,}43 \cdot 10^{-14}\ \text{m}$$

NOTA: En la resolución del problema no se han tenido en cuenta correcciones relativistas.

17. Explica por qué el concepto de órbita no es aceptable en la mecánica cuántica para describir el comportamiento de los electrones de un átomo.

La órbita de un electrón es la trayectoria que sigue en su movimiento alrededor del núcleo del átomo. En mecánica cuántica no existe el concepto de trayectoria, sino de regiones del espacio en las que la función de onda permite calcular la probabilidad de encontrar una partícula.

18. Un cuerpo de 100 kg se mueve a 25 m/s. Si la indeterminación de la velocidad es del 0,04%, ¿cuál es la indeterminación en la posición? ¿Tiene alguna importancia o es despreciable?

La indeterminación del momento lineal del cuerpo es:

$$\Delta p = \Delta(m \cdot v) = \Delta m \cdot v + m \cdot \Delta v = m \cdot \Delta v$$

ya que suponemos que $\Delta m = 0$, porque la masa del electrón no está sujeta a las restricciones del principio de incertidumbre. Por tanto:

$$\Delta p = 100 \text{ kg} \cdot \frac{0{,}04}{100} \cdot 25 \text{ m/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Si tenemos en cuenta el principio de incertidumbre, resulta:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4 \cdot \pi} \rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{4 \cdot \pi \cdot \Delta p} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4 \cdot \pi \cdot 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 5{,}28 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

Observa que la indeterminación en la posición es totalmente despreciable; no afecta en absoluto al conocimiento de la posición del objeto.

19. Indica si es cierta o falsa la afirmación siguiente: «Según la mecánica cuántica, existe un límite en la determinación de la velocidad de un electrón».

La afirmación es falsa. La mecánica cuántica no impone restricciones a la precisión de la medida de la velocidad de una partícula, que dependerá de los métodos de medida empleados o de si se tiene o no la tecnología necesaria para hacerlo.

Sin embargo, sí impone restricciones al conocimiento simultáneo de la velocidad y la posición; esto es, cuanto más exacta sea la medición de una de estas magnitudes, más inexacta será la de la otra.

20. Calcula la incertidumbre en el momento lineal de un electrón atómico si su posición se conoce con una precisión de 5 pm. Compara el resultado con el momento lineal del electrón en la primera órbita de Bohr.

De acuerdo con el principio de incertidumbre:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4 \cdot \pi} \rightarrow \Delta p \geq \frac{h}{4 \cdot \pi \cdot \Delta x}$$

La incertidumbre en el momento lineal del electrón atómico es:

$$\Delta p \geq \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-12} \text{ m}} = 1{,}054 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

El momento lineal del electrón se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$p = m \cdot v$$

donde m es la masa del electrón, y v, su velocidad.

A partir de la cuantización del momento angular del electrón en órbita, podemos obtener el valor del producto $m \cdot v$:

$$L = m \cdot r \cdot v = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi} \rightarrow m \cdot v = \frac{n \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

El valor del radio en la primera órbita es:

$$n = 1 \rightarrow r = n^2 \cdot a_0 = 1^2 \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 5{,}29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Por tanto:

$$p = m \cdot v = \frac{1 \cdot 6{,}626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2 \cdot \pi \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-11} \text{ m}} = 0{,}199 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Al comparar la incertidumbre en el momento lineal del electrón atómico con el momento lineal del electrón en la primera órbita de Bohr, se tiene:

$$\frac{\Delta p}{p} \geq \frac{1{,}054 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0{,}199 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 5{,}3$$

Observa que, en este caso, el valor de la incertidumbre en el momento lineal es muy alto; no es despreciable, como en la actividad 18.