2 CAMPO GRAVITATORIO: INTRODUCCIÓN

2.1. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

1. Compara la fuerza gravitatoria que ejercen, uno sobre otro, dos cuerpos de masa *M*, separados una distancia *R*, con la que ejercen entre sí dos cuerpos de masa 3 · *M*, situados a una distancia *R*/3.

Cuando las dos masas de valor M están separadas una distancia R, el módulo de la fuerza F es:

$$|F| = G \cdot \frac{M \cdot M}{R^2} = G \cdot \frac{M^2}{R^2}$$

Cuando la masa M triplica su valor y la distancia es 3 veces inferior, la fuerza pasa a valer:

$$|F'| = G \cdot \frac{(3 \cdot M) \cdot (3 \cdot M)}{\left(\frac{R}{3}\right)^2} = G \cdot 3^4 \cdot \frac{M^2}{R^2}$$

Dividiendo una entre otra, resulta:

$$\frac{|F'|}{|F|} = \frac{G \cdot \frac{3^4 \cdot M^2}{R^2}}{G \cdot \frac{M^2}{R^2}} = 3^4 = 81$$

Como vemos, el módulo de la fuerza aumenta 81 veces.

2. Compara ahora la fuerza gravitatoria que ejercen, uno sobre otro, dos cuerpos de masa *M*, separados una distancia *R*, con la que ejercen entre sí esos dos mismos cuerpos separados una distancia 2 · *R*.

La fuerza gravitatoria que ejercen entre sí dos cuerpos de masa M, separados una distancia R, es:

$$|F| = G \cdot \frac{M \cdot M}{R^2} = G \cdot \frac{M^2}{R^2}$$

Si la distancia que separa ambos cuerpos es $2 \cdot R$:

$$|F'| = \frac{G \cdot M \cdot M}{(2 \cdot R)^2} = G \cdot \frac{M^2}{4 \cdot R^2}$$

En este caso, el módulo de la fuerza disminuye cuatro veces su valor:

$$\frac{|F'|}{|F|} = \frac{G \cdot \frac{M^2}{4 \cdot R^2}}{G \cdot \frac{M^2}{R^2}} = \frac{1}{4}$$

2.2. LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL: EXPRESIÓN VECTORIAL

1. Calcula la fuerza con que se atraen dos láminas planas, de 5 000 kg cada una, al situarlas paralelamente, una al lado de la otra, separadas por una distancia de 50 cm.

Aplicando directamente la ecuación de la gravitación universal, el valor de la fuerza resulta:

$$|F| = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5\,000^2}{0,5^2} = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

El resultado podría ser objetable, ya que las masas se encuentran a tan corta distancia una de la otra, 50 cm, que resulta difícil imaginarlas puntuales.

2. ¿Por qué no percibimos en el mundo macroscópico los efectos gravitacionales de un sistema como el que describe la actividad anterior?

No lo apreciamos porque las variaciones son tan pequeñas que resultan difíciles de medir. Hemos de tener en cuenta, además, que en su experiencia Cavendish eliminó prácticamente el rozamiento. En el mundo macroscópico, el rozamiento siempre está presente y, muchas veces, las fuerzas de atracción gravitatoria no son lo suficientemente elevadas como para vencerlo.

3. ¿En qué punto, a lo largo de la línea que une dos masas, una triple que la otra, se anula el campo gravitatorio resultante?

El campo resultante en un punto del espacio es la suma del campo que crean cada una de las masas. Tomaremos como origen el punto donde se encuentra la masa de valor *M*. El campo que crea esta en un punto situado a una distancia *R* de ella es:

$$\vec{g}_1 = -G \cdot \frac{M}{R^2} \cdot \vec{u}_r$$

Supondremos que la distancia que separa las masas es *L*. Siendo así, el campo que crea la masa de valor $3 \cdot M$ en ese mismo punto es:

$$\vec{g}_2 = G \cdot \frac{3 \cdot M}{(L - R)^2} \cdot \vec{u}_r$$

Observa el signo. El sentido en que actúa ahora el campo es contrario al anterior, ya que el punto desconocido se encuentra entre ambas masas.

El campo resultante será la suma de ambos, y ha de ser nulo para el punto pedido:

$$g_1 + g_2 = -G \cdot \frac{M}{R^2} + G \cdot \frac{3 \cdot M}{(L - R)^2} = 0 \rightarrow \frac{3}{(L - R^2)} = \frac{1}{R^2}$$

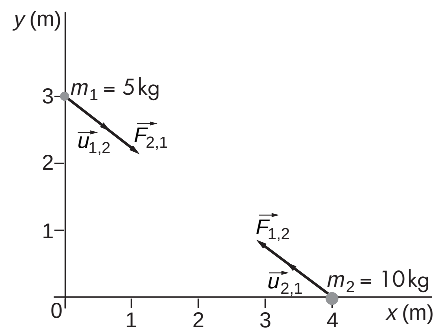
Al despejar en esta expresión, resulta:

$$3 \cdot R^2 = (L - R)^2 \rightarrow 2 \cdot R^2 + 2 \cdot L \cdot R - L^2 = 0 \rightarrow R = 0,366 \cdot L$$

El punto donde se hace nulo el campo está a una distancia del origen $R = 0,366 \cdot L$, siendo *L* la distancia entre las masas.

4. Dos masas, de 5 y 10 kg, respectivamente, están situadas en los puntos (0, 3) y (4, 0) m. Calcula el vector fuerza que actúa sobre cada una de ellas debido a la acción gravitatoria de la otra masa. Dibuja un esquema y representa sobre él las masas y los vectores fuerza.

El esquema al que se refiere el enunciado es el siguiente:



Al resolver este problema, denotaremos la masa de 5 kg con el subíndice 1, y la de 10 kg, con el subíndice 2.

El vector fuerza tiene como línea de acción la que une ambas masas, estando su sentido dirigido, en cada caso, hacia la masa que origina la fuerza.

Calculemos, en primer lugar, el vector unitario $\vec{u}_{1,2}$, que será:

$$\vec{u}_{1,2} = \frac{4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}}{5} = 0,8 \cdot \vec{i} - 0,6 \cdot \vec{j}$$

Por tanto, el vector fuerza, $\vec{F}_{1,2}$, es:

$$\vec{F}_{1,2} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \vec{u}_{1,2} = -G \cdot \frac{5 \cdot 10}{25} \cdot (0,8 \cdot \vec{i} - 0,6 \cdot \vec{j}) =$$
$$= -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (1,6 \cdot \vec{i} - 1,2 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Dado que las masas se atraen una a otra, el vector unitario será el mismo en ambos casos, aunque con sentidos opuestos. Por tanto:

$$\vec{u}_{2,1} = \frac{-4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}}{5} = -0,8 \cdot \vec{i} + 0,6 \cdot \vec{j}$$

de donde resulta:

$$\vec{F}_{2,1} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \vec{u}_{2,1} = -G \cdot \frac{5 \cdot 10}{25} \cdot (-0,8 \cdot \vec{i} + 0,6 \cdot \vec{j}) =$$
$$= -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (-1,6 \cdot \vec{i} + 1,2 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

5. Calcula la masa de un cuerpo que es atraído por otro de 50 t con una fuerza de 10^{-7} N al situarlos a una distancia de 100 m entre sí.

La fuerza de atracción entre dos masas la proporciona la ley de la gravitación universal:

$$|F| = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

De la expresión anterior podemos despejar directamente la masa del cuerpo:

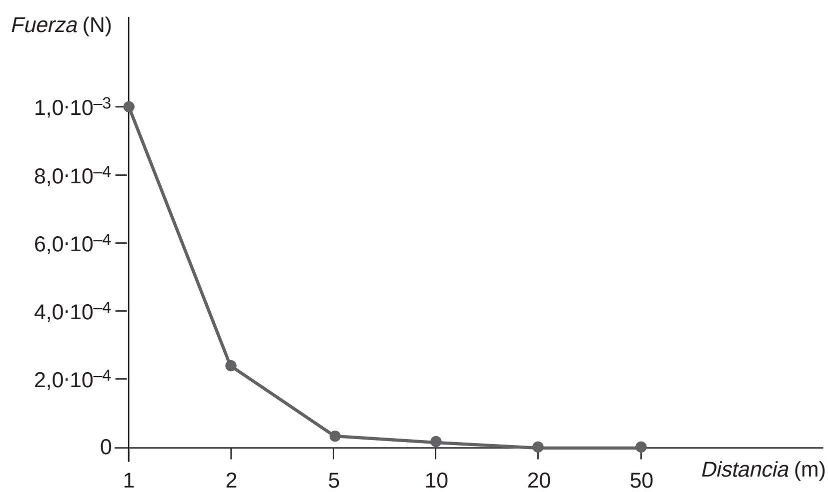
$$m = \frac{\left|F\right| \cdot R^2}{G \cdot M} = \frac{10^{-7} \cdot 100^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (50 \cdot 10^3)} = 300 \text{ kg}$$

6. ¿Con qué fuerza se atraerían los dos objetos de la actividad anterior al acercarlos a 50 m, 20 m, 10 m, 5 m, 2 m y 1 m? Representa la gráfica *F-r*.

En este ejercicio nos proporcionan las masas y la distancia. Aplicando la ley de la gravitación universal en cada uno de los casos se obtiene la siguiente tabla:

Masa 1 (kg)	Masa 2 (kg)	Distancia (m)	Fuerza (N)
50 000	300	50	$4,0 \cdot 10^{-7}$
50 000	300	20	$2,5 \cdot 10^{-6}$
50 000	300	10	$1,0 \cdot 10^{-5}$
50 000	300	5	$4,0 \cdot 10^{-5}$
50 000	300	2	$2,5 \cdot 10^{-4}$
50 000	300	1	$1,0 \cdot 10^{-3}$

La representación gráfica de los datos anteriores es la siguiente:



En la gráfica vemos cómo disminuye la fuerza con el cuadrado de la distancia (esta gráfica se puede ajustar a una función del tipo $F(r) = k/r^2$.

7. Aunque no lo hemos indicado antes, tal como la hemos obtenido, la ley de Newton de la gravitación universal sirve para masas puntuales, es decir, para masas cuya acción gravitatoria pueda suponerse que parte de un solo punto. Analiza esta afirmación e imagina qué problemas aparecen si las masas son extensas.

El problema se puede presentar cuando el tamaño de las masas sea del mismo orden de magnitud que las distancias que las separan.

Por ejemplo, la Tierra y la Luna son masas muy extensas. Sin embargo, podemos considerar que son puntuales, al comparar el tamaño de cada una de ellas con la distancia que las separa. De ese modo, podemos calcular la fuerza gravitatoria que ejercen ambos astros sin excesivos problemas.

Cuando, como ocurre con un cuerpo situado sobre la superficie de la Tierra, queremos analizar la interacción que ejerce la Tierra sobre él, el cálculo parece complicarse, ya que la propia extensión de la Tierra hace que la masa situada en cada punto produzca un campo gravitatorio en esa dirección, y no en otra. Sin embargo, Newton demostró que la acción del campo gravitatorio creado por un cuerpo esférico extenso es igual a la que produce una masa puntual igual a la del cuerpo esférico que contemplamos situada en el centro de masas de esta. Por tanto, basta suponer que toda la masa de la Tierra está concentrada en el centro de ella, y resolver el problema con objetos puntuales.

2.3. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

1. La masa del planeta Júpiter es, aproximadamente, 318 veces la de la Tierra, y su diámetro es 11 veces mayor. Con estos datos, calcula el peso que tendrá en ese planeta un astronauta cuyo peso en la Tierra es de 750 N.

La fuerza con que cada planeta atrae al astronauta situado en su superficie es el peso del astronauta en ese planeta, y se calcula por medio de la ley de la gravitación universal:

$$F = Peso = G \cdot \frac{M_{planeta} \cdot m}{R^2_{planeta}}$$

Teniendo presente lo anterior, si relacionamos los pesos del astronauta en cada planeta, resulta:

$$\frac{F_{Tierra}}{F_{Júpiter}} = \frac{G \cdot \dfrac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}}{G \cdot \dfrac{M_{Júpiter}}{R^2_{Júpiter}}}$$

En esta expresión podemos sustituir los valores que conocemos, obteniendo, de ese modo, el peso del astronauta en Júpiter.

$$M_{Júpiter} = 318 \cdot M_{Tierra};\ R_{Júpiter} = 11 \cdot R_{Tierra}$$

Por tanto:

$$F_{Júpiter} = \frac{\dfrac{M_{Júpiter}}{R^2_{Júpiter}}}{\dfrac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}} \cdot F_{Tierra}$$

$$P_{Júpiter} = F_{Júpiter} = \frac{\dfrac{318 \cdot M_{Tierra}}{(11 \cdot R_{Tierra})^2}}{\dfrac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}} \cdot F_{Tierra} = 318 \cdot \frac{1}{11^2} \cdot 750 = 1\,971 \text{ N}$$

2. Calcula el punto, de la línea recta que une la Tierra con la Luna, en el que la fuerza gravitatoria resultante sobre un objeto de 10 kg de masa es nula. ¿Qué valor toma la energía potencial gravitatoria en ese punto? Datos: $M_T = 81 \cdot M_L$; $d_{TL} = 3,84 \cdot 10^8$ m.

Observa que el dato de la masa del cuerpo es inútil, ya que buscar un punto donde la fuerza se anule es lo mismo que buscar un punto en el que el campo gravitatorio se anule. Se trata, pues, de encontrar un punto en la dirección Tierra-Luna en el que el campo gravitatorio sea nulo.

En primer lugar, calcularemos el campo gravitatorio creado por cada cuerpo. Tomaremos como eje *OX* positivo la línea Tierra-Luna, en el sentido Tierra a Luna. El origen del eje será el centro de la Tierra. De este modo:

$$\vec{g}_T = -G \cdot \frac{81 \cdot M_L}{X^2} \cdot \vec{u}_{TL} \; ; \; \vec{g}_L = -G \cdot \frac{M_L}{(L - X)^2} \cdot \vec{u}_{TL}$$

Si aplicamos el principio de superposición y sustituimos:

$$\vec{g}_T + \vec{g}_L = -G \cdot M_L \cdot \left(\frac{81}{X^2} - \frac{1}{(3,84 \cdot 10^8 - X)^2} \right) \cdot \vec{u}_{TL}$$

Al igualar a cero la expresión anterior, obtenemos una ecuación de segundo grado cuya incógnita es la distancia X con respecto al centro de la Tierra, distancia a la cual el campo gravitatorio se anula:

$$80 \cdot X^2 - 6,22 \cdot 10^{10} \cdot X + 1,194 \cdot 10^{19} = 0$$

La distancia resulta ser $X = 3,46 \cdot 10^8$ m.

La energía potencial en ese punto, para el cuerpo de 10 kg, se calcula por medio de la expresión:

$$E_p = m \cdot V$$

El potencial V_g, en cualquier punto de la recta, será la suma algebraica de los potenciales creados por cada una de las masas:

$$V_g = V_T + V_L = -G \cdot \left(\frac{M_T}{X} + \frac{M_T}{81 \cdot (L - X)} \right)$$

Sustituyendo para el punto $X = 3,46 \cdot 10^8$ m, y sabiendo que $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, se obtiene:

$$V_g = V_T + V_L = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{5,98 \cdot 10^{24}}{3,46 \cdot 10^8} + \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{81 \cdot (3,84 - 3,46) \cdot 10^8} \right) =$$

$$= 1,28 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

siendo la energía potencial:

$$E_p = m \cdot V = -10 \cdot 1,28 \cdot 10^6 = -1,28 \cdot 10^7 \text{ J}$$

NOTA: Dado que el enunciado no proporciona el dato de la masa de la Tierra, es correcto también dejar el resultado en función de esta.

2.4. EL MOVIMIENTO DE LOS SATÉLITES

1. Calcula el trabajo que debemos realizar para poner en órbita un satélite de 10 kg de masa si la órbita que describe el satélite es circular alrededor de la Tierra y la altura a que se encuentra de la superficie terrestre es de 100 km.

Antes de su lanzamiento, el satélite posee energía potencial, y una vez situado en su órbita, a una altura h (para lo cual es necesario comunicarle energía en forma de trabajo), posee energía potencial gravitatoria y energía cinética. Por tanto, teniendo en cuenta la ley de conservación de la energía, resulta:

$$E_{superficie} + W = E_{órbita} \rightarrow W = (E_c + E_p)_{órbita} - (E_p)_{superficie}$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes a $E_{p\_superficie}$, $E_{c\_órbita}$ y $E_{p\_órbita}$ en la ecuación anterior, resulta:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} + G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la velocidad orbital (página 50 del libro del alumno) y que $r = R_T + h$, al operar resulta:

$$W = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot (R_T + h)}\right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{6\,370 \cdot 10^3} - \frac{1}{2 \cdot (6\,370 + 100) \cdot 10^3}\right) =$$

$$= 3{,}18 \cdot 10^8 \text{ J}$$

2. Calcula el trabajo que sería necesario realizar, en el caso anterior, si quisiésemos poner un satélite de las mismas características en órbita alrededor de la Luna, también a 100 km de distancia de la superficie lunar.

El razonamiento y los datos son los mismos que en el ejercicio anterior, salvo que, en este caso, el giro es alrededor de la Luna. Por tanto, el trabajo resulta:

$$W = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{2 \cdot (R_L + h)}\right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22} \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{1\,740 \cdot 10^3} - \frac{1}{2 \cdot (1\,740 + 100) \cdot 10^3}\right) =$$

$$= 1{,}48 \cdot 10^7 \text{ J}$$

3. ¿Qué conclusión obtienes del resultado de las dos actividades anteriores?

Al ser la Luna un cuerpo de menor masa que la Tierra, crea un campo gravitatorio menos intenso. Debido a ello, requiere menos energía poner un mismo cuerpo en órbita desde la superficie de la Luna que hacerlo desde la superficie de la Tierra.

4. Calcula la velocidad con que orbita un satélite situado a 200 km de la superficie de la Tierra y la velocidad con que lo hace otro situado a 400 km de dicha superficie.

El satélite realiza un movimiento circular alrededor de la Tierra. La fuerza centrípeta que hace posible dicho movimiento es, precisamente, la fuerza de gravitación universal:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

De la expresión podemos despejar la velocidad, que resulta:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Si sustituimos, teniendo en cuenta que $r = R_T + h$, la velocidad es:

$$v = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(200 + 6\,370) \cdot 10^3}} = 7,792 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por otra parte, el satélite situado en órbita a 400 km se moverá con una velocidad:

$$v = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(400 + 6\,370) \cdot 10^3}} = 7,676 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. En la actividad anterior, ¿cómo podemos trasladar el satélite de la primera a la segunda órbita? Calcula el trabajo que deberíamos realizar para conseguirlo.

El trabajo necesario para desplazar el satélite de la primera a la segunda órbita será la diferencia entre las energías totales del satélite en cada una de dichas órbitas. La expresión de la energía viene dada por:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h}$$

Por tanto, el trabajo será:

$$W_{ext} = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T + h_1} - \frac{1}{R_T + h_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{6,57 \cdot 10^6} - \frac{1}{6,77 \cdot 10^6} \right) =$$

$$= 8,97 \cdot 10^6 \text{ J}$$

El trabajo es positivo, ya que la energía que necesita el sistema hay que aportarla del exterior.

2.5. SATÉLITES GEOESTACIONARIOS

1. Un pasajero, de 60 kg de masa, sube en un ascensor, que arranca y se eleva. Calcula el peso aparente del pasajero si:

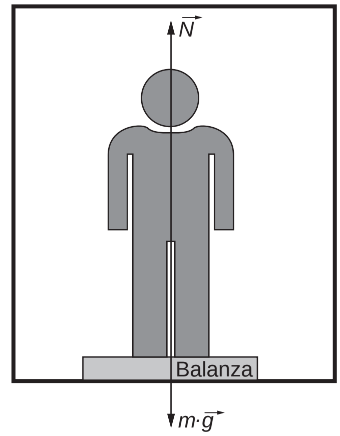
a) El ascensor asciende acelerando a 2 m · s^{-2}.

b) El ascensor detiene el movimiento de subida frenando a 2 m · s^{-2}.

c) El ascensor desciende acelerando a 2 m · s^{-2}.

d) El ascensor detiene el movimiento de bajada frenando con esa misma aceleración.

e) El ascensor se mueve, en subida o bajada, con velocidad uniforme.



El pasajero está sometido a la fuerza peso y a la reacción normal del suelo (peso aparente); la reacción coincide con el peso que registra la balanza:

$$|N| = |P'|$$

El peso aparente del pasajero, en cada uno de los supuestos que propone el enunciado de la actividad, de acuerdo con la segunda ley de la dinámica, es el siguiente:

a) En este caso:

$$N - m \cdot g = m \cdot a$$

$$N = m \cdot (g + a) = 60 \cdot (9{,}8 + 2) = 708 \text{ N}$$

b) Ahora el ascensor frena al subir. Por tanto:

$$N = m \cdot (g - a) = 60 \cdot (9{,}8 - 2) = 468 \text{ N}$$

c) En este caso:

$$N = m \cdot (g - a) = 60 \cdot (9{,}8 - 2) = 468 \text{ N}$$

d) Cuando el ascensor frena en el movimiento de bajada:

$$N = m \cdot (g + a) = 60 \cdot (9{,}8 + 2) = 708 \text{ N}$$

e) Si sube:

$$N = m \cdot g = 60 \cdot 9{,}8 = 588 \text{ N}$$

Si baja:

$$N = m \cdot g = 60 \cdot 9{,}8 = 588 \text{ N}$$

2. Imagina que vienes de hacer la compra y subes al ascensor con dos bolsas de plástico, bastante pesadas, llenas hasta los topes con lo que has comprado. Un vecino sube al ascensor contigo y, para que no sueltes las bolsas y se te desparrame lo que llevas en ellas, pulsa el botón del piso al que vas. Amablemente, le das las gracias mientras el ascensor se pone en marcha… Poco después estáis los dos limpiando el ascensor y preguntándoos qué ha podido ocurrir… ¿Serías capaz de explicarlo? Antes de responder, piensa en las respuestas que hayas dado al resolver la actividad anterior.

La situación que plantea el enunciado es similar a la del apartado a) de la actividad anterior. Cuando el ascensor acelera en su subida, el peso aparente de las bolsas aumenta; si las bolsas de plástico llenas se encontraban sometidas a una tensión elevada para su resistencia, ese peso adicional ha terminado por romperlas, cayéndose su contenido.

2.6. VELOCIDAD DE ESCAPE

1. La masa del Sol es 324 440 veces mayor que la de la Tierra, y su radio, 108 veces mayor que el terrestre:

a) ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en la superficie del Sol que en la de la Tierra?

b) ¿Cuál sería la altura máxima alcanzada por un proyectil que se lanzase verticalmente hacia arriba, desde la superficie solar, con una velocidad de 720 km · h^{-1}? Considera g = 10 m · s^{-2}.

a) La intensidad del campo gravitatorio, g, es proporcional a la fuerza con la que el Sol o la Tierra atraen determinado cuerpo:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = g \cdot m$$

Así, el cociente entre el peso de un cuerpo (fuerza con que es atraído) en el Sol o la Tierra y la intensidad del campo gravitatorio en cada planeta es el mismo.

Teniendo presente lo anterior, y según la definición de campo gravitatorio, podemos escribir:

$$\frac{F_{Sol}}{F_{Tierra}} = \frac{g_{Sol}}{g_{Tierra}} = \frac{G \cdot \dfrac{M_{Sol}}{R^2_{Sol}}}{G \cdot \dfrac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}}$$

Sustituyendo los datos que proporciona el enunciado:

$$\frac{F_{Sol}}{F_{Tierra}} = \frac{M_{Sol}}{M_{Tierra}} \cdot \frac{R^2_{Tierra}}{R^2_{Sol}} = \frac{324\,440}{1} \cdot \frac{1}{(108)^2} = 27{,}82 \;\rightarrow\; F_{Sol} = 27{,}8 \cdot F_{Tierra}$$

b) Para resolver este apartado, debemos tener en cuenta que el campo gravitatorio es conservativo, y si solo actúan las fuerzas del campo, se conserva la energía del sistema (formado en este caso por el cuerpo que estamos considerando).

Por tanto:

$$E_{superficie} = E_{altura\_h}$$

$$-G \cdot \frac{M_{Sol} \cdot m}{R_{Sol}} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -G \cdot \frac{M_{Sol} \cdot m}{R_{Sol} + h}$$

de donde resulta:

$$-G \cdot \frac{M_{Sol}}{R_{Sol}} + \frac{v^2}{2} = -G \cdot \frac{M_{Sol}}{R_{Sol} + h}$$

Recuerda que en el apartado anterior hemos obtenido la relación:

$$g_{Sol} = G \cdot \frac{M_{Sol}}{R^2_{Sol}} \rightarrow g_{Sol} = G \cdot \frac{324\,440 \cdot M_{Tierra}}{(108 \cdot R_{Tierra})^2} = \frac{324\,440}{108^2} \cdot g_{Tierra}$$

de donde resulta:

$$G \cdot M_{Sol} = g_{Sol} \cdot R_{Sol}^2 = \frac{324\,440}{108^2} \cdot g_{Tierra} \cdot 108^2 \cdot R_{Tierra}^2 =$$

$$= 324\,440 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra}^2$$

Por tanto:

$$-G \cdot \frac{M_{Sol}}{R_{Sol}} + \frac{v^2}{2} = -G \cdot \frac{M_{Sol}}{R_{Sol} + h}$$

$$-\frac{324\,440 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra}^2}{108 \cdot R_{Tierra}} + \frac{v^2}{2} = -\frac{324\,440 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra}^2}{108 \cdot R_{Tierra} + h}$$

Desarrollando la expresión anterior, y despejando, resulta:

$$108 \cdot R_{Tierra} + h = \frac{2 \cdot 108 \cdot 324\,440 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra}^3}{2 \cdot 324\,440 \cdot R_{Tierra}^2 + 108 \cdot R_{Tierra} \cdot v^2}$$

$$h = 108 \cdot R_{Tierra} \cdot \frac{v^2}{6\,008 \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Tierra} - v^2}$$

Observa que h queda en función del radio de la Tierra, que no es un dato que proporcione el enunciado del problema. Por ello, y dado que la velocidad con que se realiza el lanzamiento es relativamente baja, vamos a suponer que la intensidad del campo gravitatorio solar es prácticamente constante en cualquier punto de la trayectoria que recorre el proyectil.

Por tanto, situando el origen de potenciales en la superficie solar, la conservación de la energía nos permite escribir ahora la siguiente relación:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g_{Sol} \cdot h_{máx} \rightarrow h_{máx} = \frac{v^2}{2 \cdot g_{Sol}}$$

en la que, sustituyendo los datos que proporciona el enunciado, resulta:

$$h_{máx} = \frac{v^2}{2 \cdot 27{,}82 \cdot g_{Tierra}} = \frac{\left(\frac{720\,000}{3\,600}\right)^2}{2 \cdot 27{,}82 \cdot 10} = 71{,}89 \text{ m}$$

Observa que, ascendiendo tan solo 72 metros, la intensidad del campo gravitatorio no se modifica, y resulta aceptable la aproximación que hemos establecido.

2. En la actividad anterior, calcula la velocidad de escape que debería adquirir un cuerpo para salir del campo gravitatorio del Sol.

Dato: $R_{Sol} = 6{,}82 \cdot 10^8$ m.

Para calcular la velocidad de escape, hemos de aplicar la expresión:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_{Sol} \cdot R_{Sol}}$$

Teniendo en cuenta la relación del campo gravitatorio entre la Tierra y el Sol (obtenida anteriormente) y el radio del Sol, podemos calcular directamente la velocidad de escape:

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{g_{Sol}}{g_{Tierra}} \cdot g_{Tierra} \cdot R_{Sol}} = \sqrt{2 \cdot 27{,}82 \cdot 10 \cdot 6{,}82 \cdot 10^8} = 616 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. En un planeta cuyo radio es $R_T/2$, la aceleración de la gravedad en su superficie es de 5 m · s^{-2}. Calcula: la relación M_P/M_T y la velocidad de escape desde la superficie del planeta, si g_T = 10 m · s^{-2} y M_T = 5,98 · 10^{24} kg.

De la relación entre las expresiones que corresponden al campo gravitatorio de la Tierra y el planeta desconocido podemos despejar la relación que existe entre las masas de los planetas:

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G \cdot \frac{M_P}{R_P^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} \rightarrow \frac{M_P}{M_T} = \frac{R_P^2 \cdot g_P}{R_T^2 \cdot g_T} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{8}$$

La velocidad de escape puede calcularse mediante la expresión:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_P \cdot R_P}$$

El campo gravitatorio del planeta es un dato del enunciado. El radio del planeta lo podemos obtener a partir del radio de la Tierra. Para calcular el valor del radio de la Tierra, consideraremos g = 10 m · s^{-2}.

De ese modo:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow R_T = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{g}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{10}} = 6\,315{,}6 \text{ km}$$

Por tanto, la velocidad de escape del planeta resulta:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_P \cdot \frac{R_T}{2}} \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot \frac{6\,315{,}6 \cdot 10^3}{2}} = 5{,}62 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.7. LEYES DE KEPLER

1. Aplica la tercera ley de Kepler para calcular la distancia que separa cada planeta del Sol. Busca los datos que precises para ello en una enciclopedia.

Consulta la respuesta a esta actividad en la siguiente.

2. Entre todos los planetas que orbitan en torno al Sol, ¿cuál es el que se mueve más lento? ¿Por qué? Justifícalo, aplicando las leyes de Kepler.

Para que cada profesor o profesora resuelva estas cuestiones con sus alumnos del modo que estime más procedente, incluimos una tabla con los datos astronómicos que corresponden a los planetas del sistema solar:

Características de los planetas del Sistema Solar								
Nombre	Diámetro (1)	Distancia al sol (2)	Período de revolución (3)	Período de rotación (4)	Excentricidad	Inclinación respecto a la eclíptica (°)	Masa (5)	Densidad media ($kg \cdot m^{-3}$)
Mercurio	0,38	0,387	0,241	59	0,206	7	0,053	5 440
Venus	0,95	0,723	0,615	243	0,007	3,4	0,815	5 160
Tierra	1,00	1,000	1,000	1	0,017	0	1,000	5 620
Marte	0,53	1,524	1,881	1,03	0,093	1,9	0,107	3 950
Júpiter	11,2	5,203	11,862	0,41	0,048	1,3	318,00	1 330
Saturno	9,41	9,539	29,458	0,44	0,056	2,5	95,22	690
Urano	3,98	19,182	84,015	0,67	0,047	0,8	14,55	1 560
Neptuno	3,84	30,057	164,788	0,65	0,009	1,8	17,23	2 270
Plutón	0,27	39,75	247,7	6,39	0,25	17,1	0,003	7 800

(1) En diámetros terrestres (2) En distancias Tierra-Sol (3) En años terrestres (4) En días terrestres
(5) En masas terrestres

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Del análisis dimensional de la constante de gravitación universal se desprende que podemos expresar esta constante en función de sus magnitudes fundamentales como:

a) $\mathbf{M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}}$. **c)** $\mathbf{M^{-1} \cdot L^2 \cdot T^{-1}}$.

b) $\mathbf{M^2 \cdot L^2 \cdot T^{-1}}$. **d)** $\mathbf{M^2 \cdot L^3 \cdot T^{-2}}$.

Obtendremos las dimensiones de la constante G a partir de la expresión que permite calcular la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

$$G = \frac{[R]^2 \cdot [g]}{[M]} = \frac{L^2 \cdot L \cdot T^{-2}}{M} = L^3 \cdot T^{-2} \cdot M^{-1}$$

La respuesta correcta es, por tanto, la **a)**.

2. Un satélite artificial, de masa *M*, gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio *R*, con una velocidad *v*. Si cambia de órbita, pasando a otra más próxima a la Tierra, debe:

a) Disminuir la velocidad.

b) Aumentar la velocidad.

c) No necesita modificar su velocidad.

d) La velocidad no influye; son otros factores los que intervienen.

La velocidad con que se mueve un satélite en órbita es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Si se aproxima a la Tierra, disminuye el radio de la órbita, *r*, y aumenta, por tanto, la velocidad, *v*. La respuesta correcta es la **b).**

3. Al ser *G* una constante universal:

a) El campo gravitatorio que crea una masa es igual en todos los puntos del espacio.

b) El campo gravitatorio que crea una masa no depende del medio que rodea al cuerpo.

c) El campo gravitatorio que crea una masa depende del medio que rodea al cuerpo.

d) Al menos dos de las afirmaciones anteriores son ciertas.

Que *G* sea una constante universal implica que, a pesar del medio, una masa de determinado valor creará a su alrededor siempre el mismo campo gravitatorio. La respuesta correcta es la **b).**

4. El momento angular de la Luna respecto a la Tierra y el de la Tierra respecto al Sol son constantes. Podemos afirmar, por tanto, que el momento de la Luna respecto al Sol:

a) Es constante.

b) No es constante; es mayor en el novilunio (luna nueva).

c) No es constante; es mayor en el plenilunio (luna llena).

d) Necesitamos más datos para poder indicar algo en uno u otro sentido.

El momento angular de la Luna respecto al Sol depende en cada instante de la distancia a que se encuentran y de la velocidad con que la Luna se mueve respecto al Sol. Es necesario, por tanto, analizar con mayor detalle la órbita de la Luna para poder afirmar algo al respecto. La respuesta correcta es la **d).**

5. Dos masas, *m* y *m'*, están separadas una distancia *R*. Si las aproximamos hasta una distancia 0,1 · *R*, el módulo de la fuerza gravitatoria que actúa entre ellas:

a) Disminuye 100 veces.

b) Disminuye 10 veces.

c) Aumenta 10 veces.

d) Aumenta 100 veces.

Las respectivas fuerzas gravitatorias, antes y después de acercar las masas, son:

$$\left|F\right| = G \cdot \frac{m \cdot m'}{R^2} \quad ; \quad \left|F'\right| = G \cdot \frac{m \cdot m'}{(0,1 \cdot R)^2} = G \cdot \frac{m \cdot m'}{0,01 \cdot R^2}$$

Dividiendo una entre otra:

$$\frac{\left|F'\right|}{\left|F\right|} = \frac{G \cdot \dfrac{m \cdot m'}{0,01 \cdot R^2}}{G \cdot \dfrac{m \cdot m'}{R^2}} = \frac{1}{0,01} \rightarrow \frac{\left|F'\right|}{\left|F\right|} = 100$$

Por tanto, la respuesta correcta es la **d).**

6. Las teorías de la evolución estelar muestran que, en ciertas etapas de su evolución, las estrellas ordinarias, como el Sol, pueden hincharse considerablemente (gigantes rojas) o contraerse de forma catastrófica (enanas blancas). En el caso del Sol:

a) Si se convierte en gigante roja, nos atraerá con más fuerza.

b) Si se convierte en enana blanca, nos atraerá con menos fuerza.

c) En ambos casos, se modificará la órbita de la Tierra.

d) De lo anterior no se deduce ningún cambio gravitacional apreciable para la Tierra.

El campo gravitatorio que el Sol produce sobre la Tierra viene dado por:

$$g_{Sol} = G \cdot \frac{M_{Sol}}{R^2_{Tierra\_Sol}}$$

Aunque la estrella se contraiga o se agrande, su masa no variará. Del mismo modo, el hecho de que varíe el volumen de la estrella tampoco hará cambiar la distancia Tierra-Sol. Es decir, un cambio como el citado no tendrá influencias gravitacionales sobre la Tierra. La respuesta correcta es, por tanto, la **d).**

No obstante, dicho cambio sí influiría sobre el campo gravitatorio en la superficie del Sol. Si se convirtiese en enana blanca, el radio disminuiría y el campo en la superficie del Sol aumentaría. Si pasara a gigante roja, el efecto sería el contrario.

7. Si un satélite que está girando alrededor de la Tierra pierde parte de su energía por fricción, el radio de su nueva órbita es:

a) Mayor.

b) Menor.

c) Se mantiene constante.

La energía mecánica total que posee un satélite en órbita, suma de sus energías cinética y potencial, es:

$$E_{mec} = E_c + E_p \rightarrow E_{mec} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h} + \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h}$$

El signo que corresponde a la energía es negativo, ya que el satélite es un objeto ligado al campo gravitatorio terrestre. Si se analiza la expresión anterior, es fácil comprender que, si la energía de un satélite disminuye, el radio de la nueva órbita debe hacerlo también. La respuesta correcta es, por tanto, la **b).**

8. Indica cómo será la órbita de un planeta si se mueve siempre con la misma velocidad.

De acuerdo con la segunda ley de Kepler, la trayectoria debe ser circular, ya que, de ese modo, el área barrida por unidad de tiempo será siempre la misma.

EJERCICIOS

9. La velocidad de escape, ¿depende de la masa del objeto que queremos que escape de la atracción del campo gravitatorio? Razona la respuesta.

Se denomina velocidad de escape la velocidad mínima con que debe lanzarse un cuerpo que se encuentra sometido a la acción de un campo gravitatorio para que escape de forma efectiva a dicho campo.

Para ello debemos comunicar energía cinética a la nave en una cantidad tal que compense su energía potencial gravitatoria (negativa). Por tanto, $E_c + E_p = 0$, de donde resulta:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_e^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = 0$$

Vemos en esta expresión que tanto el término correspondiente a la energía cinética como el correspondiente a la energía potencial, son proporcionales a la masa del objeto.

Por tanto, la igualdad se cumplirá independientemente de cuál sea la masa del objeto.

Simplificando, resulta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}$$

10. Un astronauta se aproxima a un planeta desconocido, que posee un satélite. El astronauta realiza las siguientes mediciones: radio del planeta, radio de la órbita circular del satélite y período de revolución del satélite. Indica si puede, con ayuda de estas mediciones (indica con cuáles), calcular:

a) La masa del planeta.

b) La masa del satélite.

c) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.

d) La presión atmosférica en la superficie del planeta.

a) La medida de la masa del planeta puede obtenerse a partir de la tercera ley de Kepler, dado que conocemos el radio de la órbita del satélite, R_s, y el período, T:

$$\frac{R_s^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_p}{4 \cdot \pi^2} \rightarrow M_p = \frac{4 \cdot \pi^2}{G} \cdot \frac{R_s^3}{T^2}$$

b) No podemos obtener la masa del satélite, pues no disponemos de ningún dato acerca de la fuerza gravitatoria entre ambos cuerpos o de la energía potencial del satélite.

c) La aceleración de la gravedad (intensidad del campo gravitatorio) en la superficie se puede hallar a partir de la expresión:

$$g = G \cdot \frac{M_p}{R_p^2}$$

donde R_p es el radio del planeta y M_p se ha averiguado en el apartado a).

d) No podemos calcular la presión atmosférica. De hecho, ni siquiera se sabe si el planeta tiene atmósfera, ni de qué sustancia o sustancias estaría compuesta.

11. ¿Es posible que un satélite artificial describa una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 1 km/s? Razona la respuesta.

La fuerza centrípeta que mantiene un satélite en órbita alrededor de la Tierra es la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae. Por tanto:

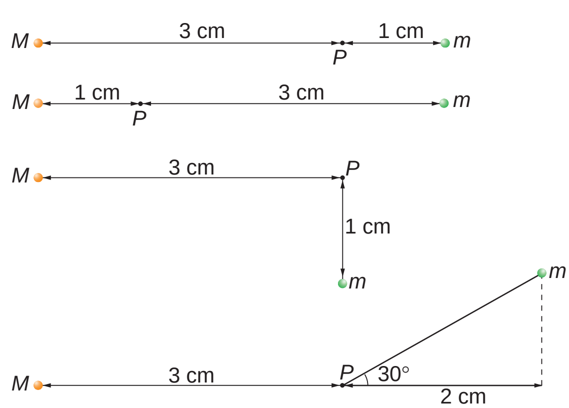
$$F_c = F_g \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Al simplificar y despejar, se obtiene la distancia respecto al centro de la Tierra a que girará un satélite con una velocidad de 1 km/s:

$$r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(1\,000)^2} = 3{,}99 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Esta distancia es, aproximadamente, la distancia entre la Tierra y la Luna.

12. Calcula la intensidad de campo gravitatorio que crean dos masas, *M* y *m*, en un punto *P*, en los cuatro casos representados en la figura. En todos los casos, las intensidades de los campos creados por *M* y *m* tienen en *P* como módulo 5 y 20 N/kg, respectivamente.



Se trata de construir los vectores campo gravitatorio en el punto *P* para cada una de las situaciones propuestas. En cada caso, supondremos un sistema de referencia *OXY* situado en el punto *P*. Debemos tener en cuenta que el campo gravitatorio tiene la dirección de la línea que une la masa que lo crea y el punto *P*, estando dirigido su sentido hacia la masa.

Observa que las distancias que se proporcionan en la figura no son datos útiles, puesto que ya tenemos los módulos del campo creado por cada masa en el punto P como dato del enunciado. En cada uno de los casos obtendremos el vector campo gravitatorio que crea cada masa. Luego aplicaremos el principio de superposición:

$$\vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = g_M \cdot \vec{u}_{r_M} + g_m \cdot \vec{u}_{r_m}$$

Caso a)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{g}_M = -5 \cdot \vec{i} \\ \vec{g}_m = +20 \cdot \vec{i} \end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = 15 \cdot \vec{i} \ \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Caso b)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{g}_M = -5 \cdot \vec{i} \\ \vec{g}_m = +20 \cdot \vec{i} \end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = 15 \cdot \vec{i} \ \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Caso c)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{g}_M = -5 \cdot \vec{i} \\ \vec{g}_m = -20 \cdot \vec{j} \end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = (-5 \cdot \vec{i} - 20 \cdot \vec{j}) \ \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Caso d)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{g}_M = -5 \cdot \vec{i} \\ \vec{g}_m = 20 \cdot (cos\ 30° \cdot \vec{i} + sen\ 30° \cdot \vec{j}) \end{array}\right] \rightarrow \vec{g} = \vec{g}_M + \vec{g}_m = (12{,}32 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}\,) \ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

13. En la tabla figuran los radios orbitales promedio y los períodos de revolución de algunos planetas del sistema solar:

	Tierra	Marte	Júpiter
Radio orbital	149	228	778
Período de revolución	31,6	59,4	374,3

El radio se mide en megakilómetros, y el período, en megasegundos.

a) ¿Justifican los datos la tercera ley de Kepler?

b) Escribe la expresión que corresponde a dicha ley y deduce, a partir de ella, la ley de la gravitación universal.

Considera circulares las órbitas que describen los planetas en su movimiento alrededor del Sol.

a) Según la tercera ley de Kepler, la relación entre el período de rotación de un planeta y el radio de su órbita es:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_{Sol}}{4 \cdot \pi^2} = \text{cte}$$

Si realizamos para cada uno de los planetas de la tabla del enunciado la operación r^3/T^2, resulta:

Planeta	r^3/T^2
Tierra	$3\,312{,}7 \cdot 10^{15}$
Marte	$3\,359{,}2 \cdot 10^{15}$
Júpiter	$3\,361{,}2 \cdot 10^{15}$

Aunque el valor en los tres casos no es exactamente el mismo, podemos afirmar que los resultados corroboran la tercera ley de Kepler.

b) La Tierra se mueve alrededor del Sol describiendo un m.c.u.

La fuerza centrípeta a que está sometida la Tierra viene dada por la expresión:

$$F_c = m_T \cdot a_c = m_T \cdot \frac{v^2}{r}$$

de donde podemos dejar la velocidad en función del período:

$$F_c = \frac{m_T \cdot v^2}{r} = m_T \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = m_T \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$$

Despejamos ahora el término T^2 de la ecuación de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \text{cte} \cdot r^3$$

Por último, si introducimos este último témino en la ecuación de la fuerza centrípeta, resulta:

$$F_c = m_T \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{\text{cte} \cdot r^3} = \text{cte} \cdot \frac{m_T}{r^2}$$

Si hacemos lo mismo suponiendo que es el Sol el que orbita en torno a la Tierra, obtenemos una expresión similar con la masa del Sol; y de la integración de ambas, obtenemos la expresión que proporciona la ley de la gravitación universal.

14. Calcula el período de un satélite artificial que describe una órbita alrededor de la Tierra a una distancia de 10 km sobre su superficie.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ **kg;** $R_T = 6\,370$ **km**

La velocidad con que orbita un satélite a 10 km sobre la superficie de la Tierra es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(6\,370 + 10) \cdot 10^3}} = 7\,907\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El período es el tiempo que tarda el satélite en completar una vuelta alrededor de la Tierra. Por tanto:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 + 10) \cdot 10^3}{7\,907} = 5\,070\ \text{s}$$

$$T = 1\ \text{h}\ 24'\ 30''$$

15. Una masa se desplaza en un campo gravitatorio desde un lugar en que su energía potencial vale –200 J hasta otro donde vale –400 J. ¿Cuál es el trabajo realizado por o contra el campo?

a) –200 J **b) 200 J** **c) –600 J**

La energía potencial que posee una masa, m, que se encuentra en el seno de un campo gravitatorio es:

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

siendo M la masa que crea el campo; como sabes, el signo negativo indica que la masa m está ligada al campo gravitatorio.

El trabajo externo que es necesario realizar para que la masa se desplace es:

$$W = \Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i} = -400 - (-200) = -200 \text{ J}$$

El signo negativo obtenido indica que la masa se desplaza por sí misma; su energía potencial disminuye. La respuesta correcta es, por tanto, la **a).**

16. La Tierra tarda un año en describir su órbita en torno al Sol. Esta órbita es, aproximadamente, circular, con radio $R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ m. Sabiendo que $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻², calcula la masa del Sol.

La fuerza centrípeta que obliga a la Tierra a girar alrededor del Sol es, precisamente, la fuerza gravitatoria que este ejerce sobre ella. Por tanto:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{M_T \cdot v^2}{R} = G \cdot \frac{M_T \cdot M_S}{R^2}$$

En la expresión anterior, M_T y M_S son las masas de la Tierra y del Sol, respectivamente; v es la velocidad orbital de la Tierra, y R, el radio de su órbita, dato que proporciona el enunciado del ejercicio. Si despejamos de ella la velocidad orbital de la Tierra, obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{R}}$$

Teniendo ahora en cuenta que:

$$\left.\begin{aligned} v &= \omega \cdot R \\ \omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \end{aligned}\right\} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot R$$

Podemos escribir lo siguiente:

$$\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot R = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{R}}$$

La masa del Sol es, por tanto:

$$M_s = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1{,}49 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2} = 1{,}97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

17. Si un cuerpo tiene un peso de 100 N sobre la superficie terrestre, calcula su peso en la superficie de otro planeta cuya masa sea el doble que la de la Tierra y su radio sea el triple que el de la Tierra.

Las expresiones que corresponden al peso del cuerpo en el planeta y en la Tierra son:

$$P_{planeta} = m \cdot g_{planeta}$$
$$P_{Tierra} = m \cdot g_{Tierra}$$

De acuerdo con los datos que proporciona el enunciado, las intensidades de los campos gravitatorios en la superficie del planeta y en la de la Tierra son:

$$g_{Tierra} = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \;;\; g_{planeta} = G \cdot \frac{M_p}{R_p^2} = G \cdot \frac{2 \cdot M_T}{(3 \cdot R_T)^2} = \frac{2}{9} \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{2}{9} \cdot g_{Tierra}$$

Como la masa del cuerpo no varía, la relación entre el peso del cuerpo en ambos planetas es:

$$\frac{P_{Tierra}}{P_{planeta}} = \frac{m \cdot g_{Tierra}}{m \cdot g_{planeta}} = \frac{m \cdot g_{Tierra}}{m \cdot \frac{2}{9} \cdot g_{Tierra}} = \frac{9}{2}$$

Por tanto:

$$P_{planeta} = \frac{2}{9} \cdot P_{Tierra} = \frac{2}{9} \cdot 100 = 22{,}2 \text{ N}$$

18. La distancia entre el Sol y Mercurio es $57{,}9 \cdot 10^6$ km y entre el Sol y la Tierra es $149{,}6 \cdot 10^6$ km. Suponiendo que las órbitas de ambos planetas son circulares, calcula la velocidad con que ambos giran alrededor del Sol, si $M_{Sol} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

Las expresiones que permiten calcular la velocidad orbital de Mercurio y de la Tierra, respectivamente, en su órbita alrededor del Sol, son:

$$v_M = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{d_{SM}}}$$

$$v_T = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{d_{ST}}}$$

Por tanto:

$$v_M = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{57{,}9 \cdot 10^9}} = 4{,}79 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{149{,}6 \cdot 10^9}} = 2{,}98 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La relación entre ambas velocidades es:

$$\frac{v_M}{v_T} = \frac{4{,}79 \cdot 10^4}{2{,}98 \cdot 10^4} = 1{,}6 \rightarrow v_M = 1{,}6 \cdot v_T$$

19. Un planeta posee un radio doble que el de la Tierra, siendo su densidad igual a la de la Tierra. ¿Dónde será mayor el peso de un objeto, en el planeta o en la Tierra? Especifica cuánto.

Si las densidades de ambos planetas son iguales, se cumple:

$$d_p = \frac{M_p}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_p^3} = \frac{M_p}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2 \cdot R_T)^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_T^3} = d_T$$

De la expresión anterior podemos deducir la relación entre las masas del planeta y de la Tierra:

$$\frac{M_p}{(2 \cdot R_T)^3} = \frac{M_T}{R_T^3} \rightarrow M_p = 8 \cdot M_T$$

Teniendo en cuenta que la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es $g_T = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, podemos obtener la que corresponde al planeta:

$$g_p = G \cdot \frac{M_p}{R_p^2} = G \cdot \frac{8 \cdot M_T}{(2 \cdot R_T)^2} = \frac{8}{4} \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 2 \cdot g_T = 2 \cdot 9{,}8 = 19{,}6\ \text{m/s}^2$$

Por tanto, al ser la intensidad del campo gravitatorio del planeta el doble de la que corresponde a la Tierra, el peso de cualquier objeto también será el doble, ya que:

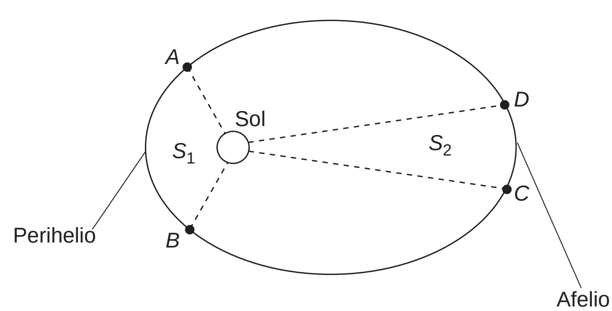
$$\left.\begin{aligned} P_p &= m \cdot g_p = m \cdot 2 \cdot g_T \\ P_T &= m \cdot g_T \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{P_p}{P_T} = \frac{m \cdot 2 \cdot g_T}{m \cdot g_T} = 2 \rightarrow P_p = 2 \cdot P_T$$

20. El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima al Sol), el cometa está a $8{,}75 \cdot 10^7$ km del Sol, mientras que en el afelio (posición más alejada del Sol), se encuentra a $5{,}26 \cdot 10^9$ km de este:

a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad? ¿Y mayor aceleración?

b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial? ¿Y mayor energía mecánica?

a) De acuerdo con la ley de las áreas de Kepler, el tiempo que tarda el planeta en pasar del punto *A* al *B* ha de ser igual al que tarda en pasar de *C* a *D*, ya que el valor de las superficies S_1 y S_2 es el mismo. Por tanto, es fácil deducir, a la vista de la gráfica, que la velocidad en el perihelio debe ser mayor que en el afelio.



En lo que respecta a la aceleración podemos escribir:

$$a_{afelio} = \frac{v^2_{afelio}}{R_{afelio}} \;\; ; \;\; a_{perihelio} = \frac{v^2_{perihelio}}{R_{perihelio}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$v_{afelio} < v_{perihelio} \;\; ; \;\; R_{afelio} > R_{perihelio}$$

se deduce que la aceleración en el perihelio es mayor que en el afelio:

$$\frac{v^2_{afelio}}{R_{afelio}} < \frac{v^2_{perihelio}}{R_{perihelio}} \rightarrow a_{afelio} < a_{perihelio}$$

b) Las expresiones que corresponden a la energía potencial en el afelio y en el perihelio, respectivamente, son:

$$E_{p_{afelio}} = -G \cdot \frac{M_S \cdot m_c}{R_{afelio}} \;\; ; \;\; E_{p_{perihelio}} = -G \cdot \frac{M_S \cdot m_c}{R_{perihelio}}$$

Si tenemos en cuenta que $R_{perihelio} < R_{afelio}$, obtenemos que, en valor absoluto:

$$E_{p_{perihelio}} < E_{p_{afelio}}$$

En lo que respecta a la energía mecánica, esta, en valor absoluto, es mayor en el perihelio que en el afelio, ya que la expresión que le corresponde es:

$$\left.\begin{aligned} E_{m_{afelio}} &= -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_S \cdot m_c}{R_{afelio}} \\ E_{m_{perihelio}} &= -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_S \cdot m_c}{R_{perihelio}} \end{aligned}\right\} \rightarrow R_{perihelio} < R_{afelio} \rightarrow |E_{m_{perihelio}}| > |E_{m_{afelio}}|$$

21. La Luna es, aproximadamente, esférica, con radio $R = 1{,}74 \cdot 10^6$ m y masa $m = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg.

a) Calcula la aceleración de la gravedad en la superficie lunar.

b) Si se deja caer una piedra desde una altura de 2 m sobre la superficie lunar, ¿cuál será su velocidad al chocar con la superficie?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²

a) La intensidad del campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) en la superficie de la Luna es:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} \rightarrow g_L = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(1{,}74 \cdot 10^6)^2} = 1{,}62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Este apartado se puede resolver aplicando las ecuaciones cinemáticas que corresponden al movimiento (m.r.u.a.) o mediante el principio de conservación de la energía. En este último caso se obtiene:

$$E_p\,(h = 2 \text{ m}) = E_c\,(h = 0 \text{ m}) \rightarrow m \cdot g_L \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 1{,}62 \cdot 2} = 2{,}54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este ejercicio se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

PROBLEMAS

22. Se sabe que la distancia promedio Tierra-Luna es 384 000 km y que la Luna tarda 28,5 días en describir una vuelta completa en torno a la Tierra. Con esos datos, calcula la distancia a que debe encontrarse un satélite artificial que gira en torno a la Tierra para que su período de revolución sea un día.

El problema podemos resolverlo haciendo uso de la tercera ley de Kepler. En este caso, hemos de considerar la Tierra como el punto fijo y la Luna como un punto que se mueve con m.c.u. alrededor de la Tierra. Al aplicar dicha ley a la Luna y al satélite obtenemos:

$$\frac{r^3}{T^2} = \text{cte} \rightarrow \frac{r^3_{Luna}}{T^2_{Luna}} = \frac{r^3_{satélite}}{T^2_{satélite}}$$

Despejando y sustituyendo, resulta:

$$r_{satélite} = \sqrt[3]{\frac{r^3_{Luna}}{T^2_{Luna}} \cdot T^2_{satélite}} = \sqrt[3]{\frac{(384 \cdot 10^6)^3}{28,5^2} \cdot 1} = 41,16 \cdot 10^6 \text{ m} = 41\,160 \text{ km}$$

23. Calcula la distancia media al Sol del cometa Kohoutec, sabiendo que su período estimado es 10^6 años.

El problema podemos resolverlo aplicando la tercera ley de Kepler, de donde despejamos directamente la distancia al cometa:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_S}{4 \cdot \pi^2} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_S}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2}$$

Expresando el período en segundos, y conocida la masa del Sol, $M_s = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, resulta:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2} \cdot T^2} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{4 \cdot \pi^2} \cdot (10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2} = 1,495 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

FE DE ERRATAS: la solución de este problema que se ofrece en la página 414 del libro del alumno es incorrecta. La solución correcta es $r = 1,495 \cdot 10^{15}$ m.

24. Un satélite gira en órbita circular alrededor de la Tierra a 150 000 km de distancia de su centro. Si hubiese otro satélite en órbita circular alrededor de la Luna que tuviese la misma velocidad, ¿a qué distancia del centro de la Luna se encontraría? La masa de la Luna es 0,0123 veces la de la Tierra y su volumen es cincuenta veces menor.

Como el satélite se encuentra en órbita circular alrededor de un cuerpo describiendo un m.c.u., la fuerza resultante es la fuerza centrípeta, que coincide con la fuerza gravitatoria. Es decir:

$$F_{gravitatoria} = F_{centrípeta}$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

De la igualdad anterior podemos despejar la velocidad. En el caso de la Tierra, resulta:

$$v_T = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r_T}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{1{,}5 \cdot 10^8}}$$

Y en el caso de la Luna:

$$v_L = \sqrt{G \cdot \frac{M_L}{r_L}} = \sqrt{G \cdot \frac{0{,}0123 \cdot M_T}{r_L}}$$

En el enunciado se indica que, en ambos casos, las velocidades deben coincidir. Por tanto:

$$\frac{0{,}0123 \cdot M_T}{r_L} = \frac{M_T}{1{,}5 \cdot 10^8} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_L = 1{,}5 \cdot 10^8 \cdot 0{,}0123 = 1{,}845 \cdot 10^6 \text{ m}$$

El segundo satélite debe situarse a $1{,}845 \cdot 10^6$ m del centro de la Luna.

25 **¿Con qué velocidad angular de rotación debe girar un satélite artificial, alrededor de la Tierra, para que lo haga en una órbita de radio el doble del radio de la Tierra?**

Datos: $R_T = 6\,370$ km; $g = 9{,}81$ m/s²

El satélite realiza un m.c.u. alrededor de la Tierra. Por tanto, la fuerza centrípeta que lo mueve coincide con la fuerza gravitatoria.

Teniendo en cuenta, además, que la órbita tiene un radio que es dos veces el radio de la Tierra, resulta:

$$F_{gravitatoria} = F_{centrípeta} \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(2 \cdot R_T)^2} = m \cdot \frac{v^2}{2 \cdot R_T}$$

Despejando en la expresión anterior, podemos obtener la velocidad:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{2 \cdot R_T}}$$

En el enunciado nos proporcionan el dato del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra; esto es:

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Introduciendo este dato en la expresión de la velocidad, se obtiene:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{2 \cdot R_T}} = \sqrt{g_T \cdot \frac{R_T}{2}}$$

Por otra parte, de la definición de la velocidad angular y operando, obtenemos:

$$\omega = \frac{v}{2 \cdot R_T} \rightarrow \omega = \frac{\sqrt{\dfrac{g_T \cdot R_T}{2}}}{2 \cdot R_T} = \sqrt{\frac{g_T}{8 \cdot R_T}}$$

Sustituyendo valores:

$$\omega = \sqrt{\frac{g_T}{8 \cdot R_T}} = \sqrt{\frac{9,81}{8 \cdot 6\,370 \cdot 10^3}} = 4,388 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la solución que se ofrece en la página 414 del libro del alumno es la que se obtiene considerando $g = 9{,}8$ m/s^2.

26. Un proyectil sale disparado perpendicularmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 5 000 m/s. Calcula la altura que alcanzará.

La energía mecánica total del proyectil debe ser la misma en la superficie de la Tierra y en el punto en el que alcanza la máxima altura. Por tanto, suponiendo que alcanza ese punto con velocidad nula, resulta:

$$-G \cdot \frac{M \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R_T + h}$$

Al simplificar, resulta:

$$-G \cdot \frac{M}{R_T} + \frac{1}{2} \cdot v^2 = -G \cdot \frac{M}{R_T + h}$$

y despejando h:

$$\frac{1}{R_T} - \frac{v^2}{2 \cdot G \cdot M} = \frac{1}{R_T + h} \rightarrow h = \frac{1}{\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{v^2}{2 \cdot G \cdot M}} - R_T \rightarrow$$

$$\rightarrow h = R_T \cdot \left[\frac{1}{1 - \dfrac{v^2 \cdot R_T}{2 \cdot G \cdot M}} - 1 \right]$$

Al sustituir en esta última expresión el dato que aporta el enunciado, y suponiendo conocidos los valores de la masa y del radio de la Tierra, obtenemos la altura que alcanzará el proyectil:

$$h = 6,38 \cdot 10^6 \cdot \left[\frac{1}{1 - \dfrac{5\,000^2 \cdot 6,38 \cdot 10^6}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} - 1 \right] = 1,594 \cdot 10^6 = 1594 \text{ km}$$

27. Un satélite de 250 kg de masa describe una órbita circular en torno a la Tierra a una altura sobre su superficie de 500 km. Calcula:

a) Su velocidad.

b) Su período de revolución.

c) Las energías cinética y potencial del satélite.

d) La energía necesaria para ponerlo en órbita.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$

$R_T = 6\,370$ **km;** $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ **kg**

a) Como el satélite se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra, describiendo un m.c.u., la fuerza resultante es la fuerza centrípeta, que coincide con la fuerza gravitatoria.

Es decir:

$$F_{gravitatoria} = F_{centrípeta}$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{v^2}{(R_T + h)}$$

de donde podemos obtener la velocidad:

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R_T + h}} =$$

$$= \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3}} = 7\,632{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) Al tratarse de un m.c.u., el período viene dado por:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{v} =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 + 500) \cdot 10^3}{7\,632{,}4} = 5\,655{,}6\ \mathrm{s}$$

c) Las energías cinética y potencial son:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 7\,632{,}4^2 = 7{,}28 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 250}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3} = -14{,}56 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

d) La energía necesaria para poner en órbita el satélite es el incremento de energía entre la situación inicial (sobre la superficie de la Tierra) y la del satélite en órbita.

Sobre la superficie terrestre, el satélite solo tiene energía potencial:

$$E_i = E_{pi} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{R_T} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 250}{6\,370 \cdot 10^3} = -15{,}7 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Cuando está en órbita, su energía es la suma de las energías potencial y cinética, calculadas anteriormente:

$$E_f = E_{cf} + E_{pf} = 7{,}28 \cdot 10^9 - 14{,}56 \cdot 10^9 = -7{,}28 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Por tanto, la energía necesaria resulta:

$$\Delta E = E_f - E_i = -7{,}28 \cdot 10^9 - (-15{,}7 \cdot 10^9) = 8{,}42 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

28 **Un satélite de 300 kg de masa se mueve en una órbita circular a 5 · 10⁷ m por encima de la superficie terrestre. Calcula la fuerza de gravedad que actúa sobre el satélite, la velocidad con que se mueve y el período con que orbita. Considera R_T = 6 500 km.**

Al no dar como datos ni el valor de la constante de gravitación universal, G, ni el de la masa de la Tierra, M, utilizaremos el dato, conocido, de que la intensidad del campo gravitatorio terrestre es, en la superficie de la Tierra:

$$g_0 = \frac{G \cdot M}{R_T^2} = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Con este supuesto, la fuerza de gravedad que actúa sobre el satélite es:

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} = \frac{G \cdot M \cdot m \cdot R_T^2}{R_T^2 \cdot R^2} = m \cdot g_0 \cdot \frac{R_T^2}{R^2}$$

$$F = m \cdot g_0 \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + 5 \cdot 10^7)^2} = 300 \cdot 9,8 \cdot \frac{(6,5 \cdot 10^6)^2}{(6,5 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^7)^2} = 38,91 \text{ N}$$

Al igualar la fuerza de la gravedad con la fuerza centrípeta:

$$38,91 = \frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{300 \cdot v^2}{R_T + 5 \cdot 10^7}$$

con lo que la velocidad del satélite es:

$$v = \sqrt{\frac{38,91 \cdot (6,5 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^7)}{300}} = 2\,707,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El período del satélite es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (56,5 \cdot 10^6)}{2\,707,1} = 131\,136,62 \text{ s}$$

Expresado en horas:

$$T = 131\,136,62 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ hora}}{3\,600 \text{ s}} = 36,43 \text{ horas}$$

29. **En la superficie de un planeta de 1 000 km de radio, la aceleración de la gravedad es 2 m/s². Teniendo esto en cuenta, calcula:**

a) La energía potencial gravitatoria de un objeto de 50 kg de masa que se encuentra situado en la superficie del planeta.

b) La velocidad de escape desde su superficie.

c) La masa del planeta.

Dato: G = 6,67 · 10⁻¹¹ U.I.

a) Teniendo en cuenta la expresión de la intensidad del campo gravitatorio:

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

la energía potencial se puede expresar como:

$$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R} = -\frac{G \cdot M}{R^2} \cdot R \cdot m = -g \cdot R \cdot m = -2 \cdot 10^6 \cdot 50 = -10^8 \text{ J}$$

b) La velocidad de escape, v, verifica:

$$E_m = E_p + E_c = 0$$

$$-\frac{G \cdot M \cdot m}{R} + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 0$$

por lo que:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) De la expresión $g = G \cdot M/R^2$, se obtiene:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{2 \cdot (10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 2,998 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

30. La Luna tiene una masa, aproximada, de 7,36 · 10²² kg, y su radio es 1,74 · 10⁶ m. Con estos datos, calcula la distancia que recorrerá en cinco segundos un cuerpo que cae libremente en las proximidades de su superficie.

Dato: G = 6,67 · 10^{-11} U.I.

En primer lugar, calculamos la intensidad del campo gravitatorio (aceleración de la gravedad) en la superficie de la Luna:

$$g_L = \frac{G \cdot M_L}{R_L^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,36 \cdot 10^{22}}{(1,74 \cdot 10^6)^2} = 1,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Aplicando las leyes del m.r.u.a., obtenemos la distancia que habrá recorrido el cuerpo al cabo de 5 segundos:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot g_L \cdot (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,62 \cdot 5^2 = 20,25 \text{ m}$$

31. Una cápsula espacial, de masa *m*, que viaja entre la Tierra y la Luna, se encuentra a una distancia *X* del centro de la Tierra. Suponiendo que la distancia entre la Tierra y la Luna es *L* y teniendo en cuenta las fuerzas gravitatorias ejercidas por la Tierra y la Luna, exclusivamente, calcula la expresión que permite hallar la fuerza resultante que actúa sobre la nave. Demuestra que esa fuerza es nula a la distancia:

$$\frac{L}{1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}}$$

siendo M_L y M_T las masas de la Luna y de la Tierra, respectivamente.

La fuerza resultante será la suma de las ejercidas por la Luna y por la Tierra. Ambas tienen la misma dirección, aunque distinto sentido.

Si tomamos el origen del sistema de referencia en la Tierra, las fuerzas ejercidas por la Tierra y por la Luna sobre la nave son:

$$\vec{F}_T = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{X^2} \cdot \vec{u}_{TL}$$
$$\vec{F}_L = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(L-X)^2} \cdot \vec{u}_{TL}$$

donde $\vec{u}_{TL}$ es un vector unitario en la dirección que une la Luna y la Tierra y en el sentido Tierra-Luna.

Si sumamos ambas fuerzas:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_T + \vec{F}_L = -G \cdot m \cdot \left(\frac{M_T}{X^2} - \frac{M_L}{(L-X)^2}\right) \cdot \vec{u}_{TL}$$

Comprobemos que la fuerza es nula para la distancia indicada en el enunciado. Igualando el módulo de la fuerza a cero obtenemos:

$$\vec{F}_R = \frac{M_T}{X^2} - \frac{M_L}{(L-X)^2} = 0$$
$$\frac{M_T}{X^2} = \frac{M_L}{(L-X)^2} \to \left(\frac{L-X}{X}\right)^2 = \frac{M_L}{M_T} \to \frac{L-X}{X} = \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \to$$
$$\to L - X = X \cdot \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \to X \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\right) = L$$
$$X = \frac{L}{1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}}$$

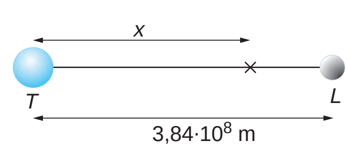
32 Al enviar un satélite a la Luna se le sitúa en una órbita que corta la recta que une los centros de la Tierra y la Luna por el punto en que las fuerzas que sufre el satélite por la atracción de los dos astros son iguales. Cuando el satélite se encuentra en ese punto, calcula:

a) La distancia a la que está del centro de la Tierra.

b) La relación que existe entre las energías potenciales del satélite, debidas a la Tierra y a la Luna.

Datos: La masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna y la distancia que separa la Tierra de la Luna es $3,84 \cdot 10^8$ m.

a) En el esquema adjunto hemos representado la Tierra, la Luna y el punto que nos solicitan.



Si aplicamos la ley de la gravitación y tenemos en cuenta que en ese punto se han de igualar las fuerzas gravitatorias, podemos escribir:

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{x^2} = G \cdot \frac{M_L \cdot m_s}{(3{,}84 \cdot 10^8 - x)^2}$$

Dado que la masa de la Tierra es $M_T = 81 \cdot M_L$, la expresión anterior queda:

$$\frac{81 \cdot M_L}{x^2} = \frac{M_L}{(3{,}84 \cdot 10^8 - x)^2}$$

$$80 \cdot x^2 - 6{,}220 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot x + 1{,}194 \cdot 393 \cdot 6 \cdot 10^{19} = 0$$

cuya resolución nos da dos soluciones:

$$x_1 = 4{,}32 \cdot 10^8 \text{ m} \quad ; \quad x_2 = 3{,}456 \cdot 10^8 \text{ m}$$

De estas dos posibles soluciones, la que tiene sentido físico, de acuerdo con el enunciado del problema, es la que nos da una distancia comprendida “entre” la Tierra y la Luna; es decir:

$$x = 3{,}456 \cdot 10^8 \text{ m}$$

b) La fracción de energía potencial del satélite que corresponde al campo gravitatorio terrestre es:

$$E_{p_T} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{3{,}456 \cdot 10^8}$$

mientras que la que corresponde al campo gravitatorio lunar vale:

$$E_{p_L} = -G \cdot \frac{M_L \cdot m_s}{0{,}384 \cdot 10^8} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{81 \cdot 0{,}384 \cdot 10^8}$$

La relación entre ambas es, por tanto:

$$\frac{E_{p_T}}{E_{p_L}} = \frac{0{,}384 \cdot 81}{3{,}456} = 9$$

33. La mayor velocidad de giro de un satélite de la Tierra, conocida como primera velocidad cósmica, es la que se obtendría para un radio orbital igual al radio terrestre, R_T. Teniendo esto en cuenta, calcula:

a) La primera velocidad cósmica.

b) El período de revolución que le corresponde si orbita con esa velocidad.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ **N · m² · kg⁻²**

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ **kg**

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ **m**

a) Al igualar la fuerza centrípeta a que está sometido el satélite con la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre él, obtenemos el valor de la primera velocidad cósmica:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T^2} = \frac{m_s \cdot v^2}{R_T}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6}} = 7\,913 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) El período de revolución del satélite será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_T}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6,37 \cdot 10^6}{7\,913} = 5\,058 \text{ s}$$

34 **En la superficie de un planeta de 2 km de radio la aceleración de la gravedad es de 3 m · s^{-2}. Calcula la velocidad de escape desde la superficie del planeta y la masa del planeta.**

Dato: *G* = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}

La velocidad de escape la calculamos de acuerdo con la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R^2} \cdot R} = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2\,000} = 109,54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Y la masa del planeta:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \rightarrow M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{3 \cdot 2\,000^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,8 \cdot 10^{17} \text{ kg}$$

FE DE ERRATAS DEL LIBRO DEL ALUMNO: la solución correcta de este problema es la que aparece en esta página, y no la que se da en la página 414 del libro del alumno.

35. La nave espacial lunar *Prospector* permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determina:

a) La velocidad lineal de la nave y el período del movimiento.

b) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.

Datos: *G* = 6,67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}

Masa de la Luna: M_L = 7,36 · 10^{22} kg

Radio medio lunar: R_L = 1 470 km

a) La velocidad lineal de la nave se obtiene al igualar la fuerza centrípeta que actúa sobre ella con la gravitatoria y despejar la velocidad:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_L \cdot m_n}{R^2} = m_n \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_L}{R}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,36 \cdot 10^{22}}{(1\,470 + 100) \cdot 10^3}} = 1\,768,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

siendo el período del movimiento:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (1\,470 + 100) \cdot 10^3}{1\,768,3} = 5\,578,6 \text{ s}$$

b) La velocidad de escape se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_L}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,36 \cdot 10^{22}}{(1\,470 + 100) \cdot 10^3}} = 2\,500,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Esta es la velocidad de escape desde la órbita que indica el enunciado; de ahí el valor utilizado para R.

36. El radio de la Tierra es, aproximadamente, 6 370 km. Si elevamos sin rozamiento un objeto de 20 kg de masa a una altura de 300 km sobre su superficie:

a) ¿Cuánto pesa el objeto a esa altura?

b) ¿Cuál será el incremento de su energía potencial?

c) Si se dejara caer desde esa altura, ¿con qué velocidad llegaría a la superficie de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Masa y radio de la Tierra:

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ **kg;** $R_T = 6\,370$ **km**

a) La intensidad del campo gravitatorio que crea la Tierra a 300 km de altura es:

$$g = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{[(6\,370 + 300) \cdot 10^3]^2} = 8{,}97\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Por tanto, el peso de un objeto de 20 kg a esa altura será:

$$P = m \cdot g = 20 \cdot 8{,}97 = 179{,}3\ \text{N}$$

b) La expresión que permite calcular la energía potencial gravitatoria de una masa m en el campo gravitatorio creado por la Tierra, cuya masa es M_T, a una distancia R de su centro es:

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R}$$

Por tanto, la energía potencial de la masa m en la superficie de la Tierra es:

$$E_{p1} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 20}{6\,370 \cdot 10^3} = -1\,252{,}3 \cdot 10^6\ \text{J}$$

Y la que le corresponde a 300 km sobre la superficie:

$$E_{p2} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T + h} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 20}{(6\,370 + 300) \cdot 10^3} = -1\,196 \cdot 10^6\ \text{J}$$

Por tanto, el incremento de su energía potencial será:

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = -1\,196 \cdot 10^6 - (-1\,252{,}3 \cdot 10^6) = 56{,}3 \cdot 10^6\ \text{J}$$

c) De acuerdo con el teorema de conservación de la energía, la energía mecánica del objeto a 300 km de altura (que es energía potencial) debe ser igual a su energía mecánica justo antes de llegar a la superficie terrestre (energía cinética). Por tanto, despreciando el rozamiento:

$$E_{mec}\ (h = 300\ \text{km}) = E_{mec}\ (\text{sup.}) \to -1\,252{,}3 \cdot 10^6 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -1\,196 \cdot 10^6$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (-1196 \cdot 10^6 + 1252{,}3 \cdot 10^6)}{20}} = 2\,373\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

37. La Luna describe una órbita circular en torno a la Tierra en 28 días. La masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg, y $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²:

a) Calcula la distancia que separa el centro de la Tierra del centro de la Luna.

b) Calcula la masa de la Luna, sabiendo que una partícula de masa *m* podría estar en equilibrio en un punto alineado con los centros de la Tierra y de la Luna, a una distancia del centro de la Tierra de $3{,}4 \cdot 10^8$ m.

c) Si en la Luna, cuyo radio es $1{,}7 \cdot 10^6$ m, se deja caer sin velocidad inicial un objeto desde una altura de 10 m, ¿con qué velocidad llegará al suelo?

a) La fuerza centrípeta que hace que la Luna orbite en torno a la Tierra es, precisamente, la fuerza gravitatoria que esta ejerce sobre la primera. Por tanto:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{M_L \cdot v_L^2}{r_{TL}} = G \cdot \frac{M_L \cdot M_T}{r_{TL}^2} \rightarrow r_{TL} = G \cdot \frac{M_T}{v_L^2}$$

Por otro lado, si suponemos que la órbita de la Luna es circular, podemos escribir:

$$v_L = \omega \cdot r_{TL} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r_{TL}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, la distancia Tierra-Luna, r_{TL}, resulta:

$$r_{TL} = G \cdot \frac{M_T}{\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r_{TL}\right)^2} \rightarrow r_{TL} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}$$

$$r_{TL} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (28 \cdot 24 \cdot 3\,600)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 3{,}9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

b) Si la partícula se encuentra en equilibrio, la resultante de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre ella ha de ser nula. Si llamamos r a la distancia que separa la partícula del centro de la Tierra, podemos escribir lo siguiente:

$$F_L = F_T \rightarrow G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(r_{TL} - r)^2} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow M_L = M_T \cdot \frac{(r_{TL} - r)^2}{r^2}$$

$$M_L = 6 \cdot 10^{24} \cdot \frac{(3{,}9 \cdot 10^8 - 3{,}4 \cdot 10^8)^2}{(3{,}4 \cdot 10^8)^2} = 12{,}98 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

c) La intensidad del campo gravitatorio creado por la Luna a una altura de 10 m es:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{12{,}98 \cdot 10^{22}}{(1{,}7 \cdot 10^6 + 10)^2} = 2{,}99 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

La velocidad con que el objeto llegará al suelo es, por tanto:

$$v = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 2{,}99 \cdot 10} = 7{,}74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

38 Un satélite de 1 000 kg de masa gira en una órbita geoestacionaria.

Calcula:

a) Su velocidad angular.

b) El módulo de su aceleración normal.

c) Su energía total.

Dato: Radio de la Tierra, $R_T = 6\,370$ km

a) Un satélite geoestacionario completa un giro cada 24 horas; ese es el valor de un período. Por tanto, su velocidad angular será:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{24 \cdot 3\,600} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) El módulo de su aceleración normal se calcula de acuerdo con la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Para obtenerlo, necesitamos conocer el radio de la órbita del satélite, R. Teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2} = m_s \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2} = m_s \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T}{\omega^2}}$$

La masa de la Tierra, M_T, la calculamos como sigue:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G} = \frac{9{,}8 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Por tanto, el radio de la órbita y la aceleración normal son:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}}{(7{,}27 \cdot 10^{-5})^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$a_N = \omega^2 \cdot R = (7{,}27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 4{,}22 \cdot 10^7 = 0{,}22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

c) La energía total del satélite en su órbita es:

$$E_T = E_p + E_c = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R} + \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R}$$

$$E_T = -\frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}96 \cdot 10^{24} \cdot 1\,000}{42{,}2 \cdot 10^6} = -4{,}71 \cdot 10^9 \text{ J}$$

39. Un astronauta, con 100 kg de masa (incluyendo el traje), se encuentra sobre la superficie de un asteroide de forma prácticamente esférica y 2,4 km de diámetro, cuya densidad media es 2,2 g · cm^{-3}. Determina:

a) La velocidad con que debe impulsarse al astronauta para abandonar el asteroide.

b) ¿Cómo se denomina dicha velocidad?

c) El astronauta carga ahora con una mochila cuya masa es 40 kg. ¿Le será más fácil salir del asteroide? ¿Por qué?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}

a) La velocidad que permitirá al astronauta abandonar el asteroide es la velocidad de escape, cuyo valor es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{ast}}{R_{ast}}}$$

A partir de la densidad del asteroide y de su diámetro, datos que facilita el enunciado del problema, podemos calcular su masa:

$$d_{ast} = \frac{M_{ast}}{V_{ast}} \rightarrow M_{ast} = d_{ast} \cdot V_{ast} = d_{ast} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3_{ast}$$

$$M_{ast} = 2{,}2 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2{,}4 \cdot 10^3}{2}\right)^3 = 1{,}59 \cdot 10^{13} \text{ kg}$$

Por tanto, la velocidad de escape resulta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_{ast}}{R_{ast}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}59 \cdot 10^{13}}{1{,}2 \cdot 10^3}} = 1{,}33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Como se ha indicado en el apartado anterior, esa velocidad se denomina **velocidad de escape.**

c) La velocidad de escape es independiente de la masa del objeto que quiere escapar de la atracción del campo gravitatorio; sin embargo, si la masa aumenta 40 kg, será necesario comunicarle más energía para que alcance dicha velocidad.

40 **Se desea situar un satélite artificial de 50 kg de masa en una órbita circular sobre el ecuador de modo que se mueva con un radio de giro igual al doble del terrestre. Calcula:**

a) La energía que hay que comunicar al satélite y la velocidad orbital de este.

b) La energía adicional que habría que aportar al satélite en órbita para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ **N · m² · kg⁻²**

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ **kg;** $R_T = 6\,370$ **km**

a) La velocidad orbital del satélite la calculamos como sigue:

$$F_c = F_G \rightarrow m_s \cdot \frac{v_s^2}{2 \cdot R_T} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{(2 \cdot R_T)^2} \rightarrow v_s = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T}}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}} = 5595{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La energía mecánica del satélite en su órbita es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_{p_{órb}} + E_{c_{órb}} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T} + \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v^2 =$$

$$= -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T} + \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot \frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T}$$

Por otro lado, la energía que posee en la superficie de la Tierra es:

$$E_{p_0} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T}$$

A esta energía hay que añadirle cierta energía cinética, E_{c_0}, para que alcance la órbita. Por tanto, aplicando el principio de conservación de la energía:

$$E_{p_0} + E_{c_0} = E_{p_{órb}} + E_{c_{órb}} \rightarrow E_{c_0} = E_{p_{órb}} + E_{c_{órb}} - E_{p_0}$$

$$E_{c_0} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T} - \left(-G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T}\right) = \frac{3}{4} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T}$$

$$E_{c_0} = \frac{3}{4} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 50}{6\,370 \cdot 10^3} = 2{,}35 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) La energía cinética adicional que hay que aportar al satélite es aquella que haga que su energía potencial sea cero, así como la energía cinética (ya que basta con que el satélite llegue “al infinito” con velocidad cero). Por tanto:

$$E_{mec_{órb}} + E_{c_{adicional}} = 0 \rightarrow E_{c_{adicional}} = -E_{mec_{órb}} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{2 \cdot R_T}$$

$$E_{c_{adicional}} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 50}{2 \cdot 6\,370 \cdot 10^3} = 7{,}83 \cdot 10^8 \text{ J}$$

41. Un satélite artificial se dice geoestacionario si está siempre en la vertical de un cierto punto de la Tierra:

a) ¿A qué altura están dichos satélites?

b) ¿Qué momento cinético respecto al centro de la Tierra tiene un satélite geoestacionario si su masa es de 100 kg?

c) ¿Por qué no puede haber un satélite geoestacionario en la vertical de las islas Baleares?

Datos: $g_0 = 9{,}81$ m · s^{-2}; $R_T = 6\,370$ km.

a) Un satélite artificial es geoestacionario si su vector posición respecto al centro de la Tierra corta siempre a la superficie de esta en el mismo punto. La órbita geoestacionaria se encuentra a cierta altura sobre el ecuador; su período de revolución es de un día solar (24 horas).

La fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre él es la fuerza centrípeta que le obliga a orbitar en torno a ella. Por tanto:

$$F_c = F_g \rightarrow \frac{m_s \cdot v^2}{R} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

Por otro lado:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

Igualando las expresiones anteriores, obtenemos:

$$\frac{2\cdot\pi\cdot R}{T}=\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R}}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{G\cdot M_T\cdot T^2}{4\cdot\pi^2}}$$

Si tenemos en cuenta, además, que:

$$g_0=\frac{G\cdot M_T}{R_T^2}\rightarrow G\cdot M_T=g_0\cdot R_T^2$$

Obtenemos, al sustituir $G\cdot M_T$ en la expresión anterior:

$$R=\sqrt[3]{\frac{g_0\cdot R_T^2\cdot T^2}{4\cdot\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{9{,}81\cdot(6\,370\cdot10^3)^2\cdot(24\cdot3\,600)^2}{4\cdot\pi^2}}=4{,}22\cdot10^7\ \text{m}$$

Por tanto, la altura a que se encuentran dichos satélites, será:

$$h=R-R_T=4{,}22\cdot10^7-6{,}37\cdot10^6=3{,}59\cdot10^7\ \text{m}$$

b) El momento cinético o angular del satélite respecto al centro de la Tierra lo calculamos de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\cdot\vec{v})\rightarrow L=r\cdot m\cdot v\cdot sen\ \alpha$$

El satélite está sometido a una fuerza central ejercida por la Tierra; por tanto, su momento angular permanecerá constante. Al ser su trayectoria circular, el ángulo, α, que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$ será de 90°. Por tanto:

$$L=r\cdot m\cdot v$$

El valor de la velocidad orbital del satélite, v, es:

$$T=\frac{2\cdot\pi\cdot R}{v}\rightarrow v=\frac{2\cdot\pi\cdot R}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot4{,}22\cdot10^7}{24\cdot3\,600}=3{,}07\cdot10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$L=r\cdot m\cdot v=R\cdot m\cdot v=4{,}22\cdot10^7\cdot100\cdot3{,}07\cdot10^3=1{,}30\cdot10^{13}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

c) En la vertical de las islas Baleares no puede haber un satélite geoestacionario, ya que estas no se encuentran en el ecuador; una órbita es geoestacionaria si su eje de giro coincide con el de la Tierra y su período es el mismo que el de esta.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

42. Un satélite artificial de 100 kg de masa describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 500 km sobre su superficie. Si su período de revolución es $T_1=5\,665$ s, determina:

a) La velocidad del satélite en la órbita.

b) Las energías cinética, potencial y total del satélite en la citada órbita, y la necesaria para transferir este satélite a otra órbita de período $T_2=7\,200$ s.

Datos: $G=6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$

$R_T=6\,370$ km

a) La velocidad de órbita del satélite la obtenemos como sigue:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6\,370 \cdot 10^3 + 500 \cdot 10^3)}{5\,665} = 7\,619{,}68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La energía cinética del satélite en la órbita es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 7\,619{,}68^2 = 2{,}9 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía potencial del satélite en la órbita la obtenemos a partir de la expresión:

$$E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h}$$

Teniendo en cuenta que:

$$g_0 = -G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

Por tanto:

$$E_p = -\frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{R_T + h} = \frac{-9{,}81 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot 100}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3} = -5{,}79 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía total del satélite en la órbita será la suma de sus energías cinética y potencial:

$$E_1 = E_c + E_p = 2{,}9 \cdot 10^9 - 5{,}79 \cdot 10^9 = -2{,}89 \cdot 10^9 \text{ J}$$

El resultado negativo obtenido indica que el satélite está ligado a la Tierra.

La energía necesaria para transferir el satélite a otra órbita de período $T_2 = 7\,200$ s la calculamos como se indica. En primer lugar, aplicando la tercera ley de Kepler, podemos obtener el radio de la nueva órbita:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3} = \frac{R_2^3}{(R_T + h)^3} \rightarrow R_2 = \sqrt[3]{\frac{T_2^2 \cdot (R_T + h)^3}{T_1^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{7\,200^2 \cdot [(6\,370 + 500) \cdot 10^3]^3}{5\,665^2}} = 8{,}06 \cdot 10^6 \text{ m}$$

A partir de este dato, podemos calcular la velocidad en la nueva órbita, v_2:

$$T_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{v_2} \rightarrow v_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{T_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8{,}06 \cdot 10^6}{7\,200} = 7\,034{,}38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la energía total del satélite en esa nueva órbita será:

$$E_2 = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_2^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_2} = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_2^2 - \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{R_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 7\,034{,}38^2 - \frac{9{,}81 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2 \cdot 100}{8{,}06 \cdot 10^6} = -2{,}46 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Finalmente, la energía necesaria para transferir el satélite de una órbita a otra será la diferencia entre las energías totales del satélite en cada una de ellas. Por tanto:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -2{,}46 \cdot 10^9 - (-2{,}89 \cdot 10^9) = 0{,}43 \cdot 10^9 \text{ J}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.