

1

FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

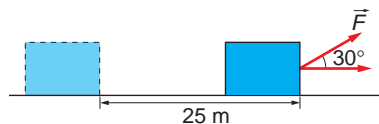
1.1. ¿A QUÉ LLAMAMOS TRABAJO?

1. Un hombre arrastra un objeto durante un recorrido de 25 m, tirando de él con una fuerza de 450 N mediante una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Realiza un gráfico del problema y calcula el trabajo realizado por el hombre.

La representación gráfica de la situación física que describe el enunciado es la que se muestra en la figura de la derecha. El trabajo realizado por el hombre lo calculamos como se indica:

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

$$W_F = 450 \cdot 25 \cdot \cos 30^\circ = 9742,8 \text{ J}$$



2. Al tirar horizontalmente, con una fuerza de 10 N, de un cuerpo apoyado en un plano horizontal, este se desplaza 10 m. Calcula el trabajo realizado, sabiendo que su masa es 2 kg y el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el suelo es 0,1.

En la figura hemos representado las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Los datos que tenemos son:

$$F = 10 \text{ N}$$

$$\text{Desplazamiento: } s = 10 \text{ m}$$

$$\text{Masa del cuerpo: } m = 2 \text{ kg}$$

$$\text{Coef. de rozamiento: } \mu = 0,1$$

El trabajo que realiza cada fuerza es:

$$W_p = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{s} = m \cdot g \cdot s \cdot \cos 90^\circ = 0$$

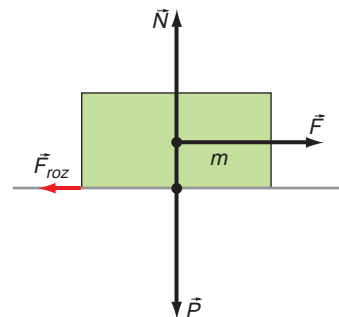
$$W_N = \vec{N} \cdot \vec{s} = N \cdot s \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos 0^\circ = F \cdot s = 10 \cdot 10 = 100 \text{ J}$$

$$W_{roz} = \vec{F}_r \cdot \vec{s} = F_r \cdot s \cdot \cos 180^\circ = -\mu \cdot N \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot s = -0,1 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot 10 = -19,6 \text{ J}$$

El trabajo total es la suma de todos ellos:

$$W = 100 - 19,6 = 80,4 \text{ J}$$



3. Cuando sujetamos una maleta de 20 kg, sin movernos, ¿qué trabajo realizamos? ¿Y si nos movemos con la maleta en la mano, desplazándonos 20 m sobre un plano horizontal?

De acuerdo con la definición, para realizar trabajo, es necesario que se produzca desplazamiento:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

Por tanto, al sostener una maleta, estando parados, no realizamos trabajo; es una situación estática en la que el trabajo que se realiza es nulo.

La segunda pregunta, que en principio puede parecer trivial, no lo es tanto. Dependiendo de la complejidad que queramos introducir al estudiar el sistema, la respuesta puede variar. Veamos:

1. Al no especificarse nada acerca del rozamiento, podemos considerar que su efecto es nulo o, al menos, despreciable. En ese caso, el razonamiento que exponemos es el siguiente:

La persona que lleva la maleta ejerce una fuerza vertical, en sentido ascendente, de sentido opuesto al peso de la maleta.

Sin embargo, como su movimiento es en sentido horizontal, las direcciones de la fuerza y del desplazamiento son perpendiculares, lo que da como resultado un trabajo nulo:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

2. Si tenemos ahora en cuenta el efecto del rozamiento, el resultado es diferente. El trabajo lo realiza la fuerza horizontal que aplicamos para vencer la fuerza de rozamiento:

$$\vec{F} = -\vec{F}_{roz} \rightarrow W = -\vec{F}_{roz} \cdot \vec{r} = -F_{roz} \cdot r \cdot \cos 180^\circ = F_{roz} \cdot r$$

Para obtener el valor de la fuerza de rozamiento, debemos tener en cuenta el peso de la maleta que soporta la persona. De este modo, resulta:

$$F_{roz} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g = \mu \cdot (m_{bombre} + m_{maleta}) \cdot g$$

Por tanto, al desplazarnos con la maleta, debemos realizar un trabajo superior al que realizaríamos de hacerlo sin ella. La diferencia entre ambos trabajos es:

$$W = \mu \cdot (m_{bombre} + m_{maleta}) \cdot g \cdot r - \mu \cdot m_{bombre} \cdot g \cdot r = \mu \cdot m_{maleta} \cdot g \cdot r$$

4. **Calcula el trabajo que realizamos al levantar un saco de 50 kg desde el suelo hasta una altura de 2 m. Si lo hacemos utilizando un plano de 30° de inclinación sin rozamiento, calcula la fuerza que hay que realizar, la distancia recorrida y el trabajo realizado, y compara los resultados con los anteriores.**

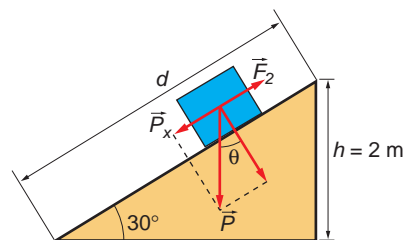
Para elevar un saco 2 m, es necesario realizar un trabajo en contra de las fuerzas del campo gravitatorio; debemos aplicar una fuerza, \vec{F}_1 , de la misma magnitud que el peso y de sentido opuesto a este. Por tanto:

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{h} = F \cdot \Delta h \cdot \cos 0^\circ = m \cdot g \cdot \Delta h$$

$$W_1 = 50 \cdot 9,8 \cdot 2 = 980 \text{ N}$$

Si utilizamos un plano inclinado para elevar el saco, debemos ejercer una fuerza, \vec{F}_2 , en sentido ascendente, que compense la componente en el eje X de su peso, como se muestra en la ilustración de la derecha.

En primer lugar, debemos calcular la distancia recorrida por el saco a lo largo del plano inclinado hasta alcanzar 2 m de altura.



De acuerdo con la ilustración anterior:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{h}{d} \rightarrow d = \frac{h}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ m}$$

El trabajo que hay que realizar es, por tanto:

$$W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{d} = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta \cdot d \cdot \cos 0^\circ = 50 \cdot 9,8 \cdot \text{sen } 30^\circ \cdot 4 \cdot 1 = 980 \text{ N}$$

siendo el valor de la fuerza:

$$F_2 = m \cdot g \cdot \text{sen } \theta = 50 \cdot 9,8 \cdot \text{sen } 30^\circ = 245 \text{ N}$$

En el caso anterior, el valor de la fuerza, F_1 , era:

$$F_1 = m \cdot g = 50 \cdot 9,8 = 490 \text{ N}$$

Observa que el trabajo realizado en ambos casos es el mismo, y que la fuerza que hay que aplicar en el segundo caso es menor, siendo el camino que se ha de recorrer mayor. Por eso se dice que las máquinas simples (como un plano inclinado) “multiplican” fuerzas, y no energías (trabajo).

1.2. TIPOS DE ENERGÍA: ENERGÍA CINÉTICA

1. Escribe la ecuación de dimensiones de la energía cinética. Demuestra que coincide con la del trabajo.

La ecuación de dimensiones del trabajo es:

$$[W] = [F] \cdot [\Delta r] \cdot [\cos \theta] = [m \cdot a] \cdot [\Delta r] \cdot \cos \theta$$

$$[W] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

Y la que corresponde a la energía cinética:

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2} \right] \cdot [m] \cdot [v^2] = M \cdot (L \cdot T^{-1})^2 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

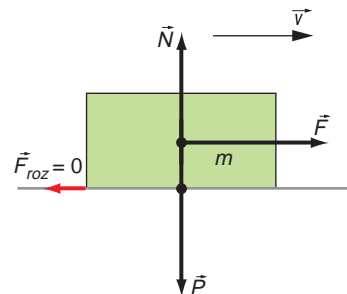
Como se observa, sus dimensiones son equivalentes a las del trabajo. Por tanto, su unidad es la que corresponde al trabajo: el joule.

2. Un bloque de 2 kg de masa se desliza sobre una superficie horizontal. El rozamiento es nulo. Calcula el trabajo que realiza al desplazarse 10 m sobre la superficie.

En el supuesto más general, la única fuerza que realizaría trabajo al moverse el bloque sería la de rozamiento, ya que esta es la única fuerza que tiene componente en la dirección del desplazamiento (el peso y la reacción normal que ejerce el plano sobre el que se apoya el bloque son perpendiculares a dicho desplazamiento).

Por tanto, la expresión del trabajo sería:

$$W = F_{\text{roz}} \cdot r \cdot \cos 180^\circ = -\mu \cdot m_{\text{bloque}} \cdot g \cdot r$$



En este caso, al considerarse el rozamiento nulo ($\mu = 0$), el trabajo que ha de vencer el bloque para desplazarse también es nulo.

3. Un objeto, de masa m , describe un movimiento circular uniforme, de radio R . Calcula el trabajo que realiza la fuerza centrípeta mientras el cuerpo describe una vuelta.

El período es el intervalo de tiempo que transcurre hasta que un cuerpo, que realiza un movimiento regular, ocupa de nuevo una posición determinada, moviéndose con la misma velocidad y aceleración.

El trabajo que realiza la fuerza centrípeta sobre un cuerpo que se mueve con m.r.u., transcurrido un período, responde a la expresión:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Al resolver la integral, obtenemos el siguiente resultado:

$$W_{1 \rightarrow 2} = m \cdot \left[\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot [v^2]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

Como el movimiento es de velocidad constante, $v_1 = v_2$, el trabajo realizado al cabo de un período es nulo.

A esta conclusión podríamos haber llegado también teniendo en cuenta que el cuerpo describe un m.r.u., y que, por tanto, la fuerza que hace que se mueva es centrípeta, estando dirigida en todo momento hacia el centro de la trayectoria y perpendicularmente al desplazamiento. Por tanto, el trabajo es nulo, ya que la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares.

4. ¿Puede ser negativa la energía cinética de un cuerpo? Razona la respuesta.

La energía cinética de un cuerpo no puede ser negativa.

Puede ocurrir que, debido a la situación del sistema de referencia, la velocidad del cuerpo sea negativa, pero al intervenir su cuadrado en la expresión de la energía cinética, el signo negativo desaparece.

5. ¿Pueden dos observadores medir distintos valores para la energía cinética de un cuerpo y tener razón los dos? Explica cómo puede hacerse, si es posible, o cuál es el motivo de que no sea posible.

La energía cinética de un cuerpo depende de su velocidad:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

El valor de la velocidad y, por ende, el de la energía cinética pueden variar. Basta con cambiar el sistema de referencia. Para un observador que viaja en un tren a velocidad constante, el tren está quieto y, con respecto a él, su energía cinética es nula. Sin embargo, para un observador en reposo que vea pasar el tren, este se moverá con cierta velocidad, y el observador situado en su interior posee cierta energía cinética.

Del mismo modo, para un observador que viaje en automóvil a cierta velocidad, distinta a la del tren, circulando por una carretera paralela a la vía, la velocidad no será la misma que la que percibe el observador en reposo, y la energía que asociará con el observador situado en el interior del tren será distinta.

A modo de conclusión, podemos decir que hay tantas medidas de la energía cinética como sistemas de referencia inerciales consideremos.

6. Dibuja todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que se desliza por un plano horizontal, con el que existe rozamiento. Calcula el trabajo por unidad de longitud que realiza cada una de estas fuerzas.

Las fuerzas que intervienen son las que se indican en la figura de la derecha.

El trabajo que realizan el peso y la normal es nulo, ya que ambas fuerzas son perpendiculares a la dirección del desplazamiento:

$$W_{\text{peso}} = \vec{F} \cdot \vec{r} = P \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

$$W_{\text{normal}} = \vec{F} \cdot \vec{r} = N \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

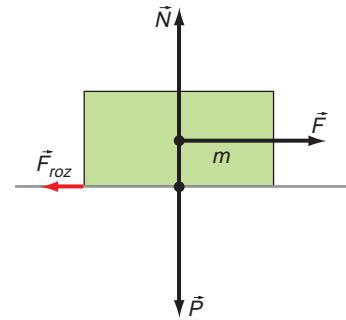
Para vencer la fuerza de rozamiento, sí debemos realizar trabajo, ya que esta fuerza tiene la dirección del desplazamiento:

$$W_{\text{roz}} = \vec{F}_{\text{roz}} \cdot \vec{r} = \mu \cdot m \cdot g \cdot r \cdot \cos 180^\circ = -\mu \cdot m \cdot g \cdot r$$

Por tanto, para una longitud $r = 1$, resulta:

$$W_{\text{roz}} = -\mu \cdot m \cdot g$$

Este resultado se expresará en joule si la masa y la aceleración de la gravedad se expresan en unidades del S.I.



7. Un objeto desciende por un plano inclinado con el que existe rozamiento. Dibuja las fuerzas que actúan sobre él y calcula el trabajo que realiza cada una de ellas durante el descenso. Estima los valores que necesites para resolver la actividad.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son las que se indican en la figura.

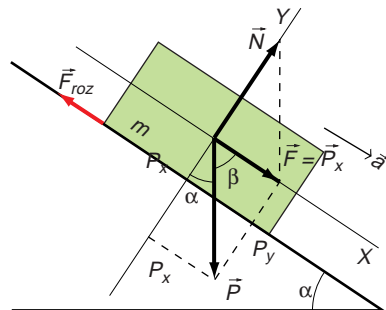
El trabajo que realiza cada una de ellas durante todo el descenso es:

- Fuerza reacción normal:
Su dirección es perpendicular al desplazamiento. Por tanto, el trabajo que realiza es nulo, ya que:

$$W_{\text{normal}} = \vec{N} \cdot \vec{d} = N \cdot d \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

- Fuerza peso:

$$W_p = \vec{P} \cdot \vec{d} = P \cdot d \cdot \cos \beta = m \cdot g \cdot d \cdot \sin \alpha$$



- Fuerza de rozamiento:

La fuerza de rozamiento actúa en la dirección del desplazamiento y en sentido opuesto a este. Por tanto, al desplazarse el cuerpo cierta distancia d sobre el plano, el trabajo que realiza vale:

$$W_{roz} = \vec{F}_{roz} \cdot \vec{d} = \mu \cdot N \cdot d \cdot \cos 180^\circ = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot d$$

1.3. FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL

1. Enumera cinco situaciones cotidianas en las que intervengan fuerzas conservativas, y cinco situaciones en las que intervengan fuerzas no conservativas.

Intervienen fuerzas conservativas en las siguientes situaciones:

- El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra.
- La aceleración de un electrón entre las placas de un condensador entre las que se ha hecho el vacío.
- La “caída libre” de un cuerpo que se deja caer desde lo alto de un edificio.
- El movimiento de oscilación de un objeto colgado de un resorte vertical.
- El movimiento de un electrón alrededor del núcleo, de acuerdo con el modelo atómico de Bohr.

Intervienen fuerzas no conservativas, con independencia de la acción de las fuerzas conservativas que puedan actuar, en los siguientes ejemplos:

- El movimiento de un automóvil.
- El descenso de un cuerpo que se desliza por una superficie inclinada.
- El movimiento de un objeto que es lanzado por un resorte sobre una superficie horizontal rugosa.
- Cuando empujamos un mueble por el suelo y lo desplazamos de posición.
- Las fuerzas que intervienen en un choque inelástico.

2. De las situaciones que has señalado, indica aquellas en las que las fuerzas realizan trabajo y explica por qué se conserva la energía en unos casos y no en los otros.

- Movimiento de la Luna alrededor de la Tierra: como la Luna describe una trayectoria cerrada y la fuerza gravitatoria es conservativa, no se realiza trabajo.
- Aceleración de un electrón entre las placas de un condensador entre las que se ha hecho el vacío: en este caso, se realiza un trabajo sobre el electrón que se invierte en aumentar su energía cinética.
- La “caída libre” de un cuerpo que se deja caer desde lo alto de un edificio: si prescindimos del rozamiento, la fuerza gravitatoria realiza un trabajo sobre el cuerpo que incrementa la energía cinética de este. Si suponemos el ciclo completo de subida y bajada del cuerpo, el trabajo es nulo: la fuerza gravitatoria devuelve íntegramente, en la caída del cuerpo, el trabajo realizado para vencerla (el necesario para subir el cuerpo). En caso de tener en cuenta el rozamiento, debemos contar también con el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento, que disipa parte de la energía del cuerpo en su descenso.

- El movimiento de oscilación de un objeto colgado de un resorte vertical: la fuerza elástica es conservativa; por tanto, puede devolver el trabajo que se ha de realizar para vencerla. En consecuencia, el trabajo realizado en una oscilación es nulo.
- El movimiento del electrón alrededor del núcleo, según el modelo atómico de Bohr, es debido a la atracción electrostática entre este y los protones del núcleo. El electrón gira en órbitas circulares, por lo que no se realiza trabajo.
- El movimiento de un automóvil: la fuerza del motor y la fuerza del rozamiento realizan trabajo.
- El descenso de un cuerpo que se desliza por una superficie inclinada: en este caso, la fuerza gravitatoria realiza trabajo para que descienda el cuerpo, y la fuerza de rozamiento, que se opone al movimiento, también lo realiza.
- El movimiento de un objeto que es lanzado por un resorte sobre una superficie horizontal rugosa: la fuerza elástica del muelle realiza trabajo sobre el objeto, que terminará deteniéndose debido a la energía disipada por la fuerza de rozamiento.
- Cuando empujamos un mueble y lo desplazamos de posición, la fuerza con que empujamos y la fuerza de rozamiento realizan trabajo.
- Las fuerzas que intervienen en un choque inelástico: en un choque inelástico se conserva la cantidad de movimiento, pero no la energía cinética, que se transforma en energía elástica (deformación) o se disipa en forma de calor. Las fuerzas, en este caso, sí realizan trabajo.

La energía se conserva en todos los casos; no se deben confundir las posibles transformaciones energéticas (disipación de calor, deformaciones, etc.) que ocurren en las situaciones físicas descritas con la conservación de la energía.

1.4. ENERGÍAS POTENCIALES GRAVITATORIA Y ELÁSTICA

1. **Una lámpara de 5 kg de masa está colgada a 2,2 m del suelo de una habitación, situado a 20 m sobre el suelo de la calle. Calcula su energía potencial respecto a ambos suelos.**

Si situamos el origen de la energía potencial en el suelo de la habitación, la energía potencial de la lámpara es:

$$E_{p_1} = m \cdot g \cdot h_1 \rightarrow E_{p_1} = 5 \cdot 9,8 \cdot 2,2 = 107,8 \text{ J}$$

Y respecto al suelo de la calle:

$$E_{p_2} = m \cdot g \cdot h_2 = m \cdot g \cdot (h_1 + b)$$

donde b es la distancia del suelo de la habitación al suelo de la calle, y h_1 , la que separa la lámpara del suelo de la habitación; por tanto:

$$E_{p_2} = m \cdot g \cdot (h_1 + b) = 5 \cdot 9,8 \cdot (2,2 + 20) = 1087,8 \text{ J}$$

2. **Si la lámpara se suelta y cae hasta el suelo de la habitación, calcula su energía potencial final respecto de ambos sistemas de referencia, así como la variación de su energía potencial en ambos casos.**

Respecto al suelo de la habitación, la energía potencial final es nula, siendo su variación:

$$\Delta E_{p_1} = E_{p_{f1}} - E_{p_{i1}} = 0 - 107,8 \text{ J} = -107,8 \text{ J}$$

Respecto al suelo de la calle, la energía potencial final es:

$$E_{p_f2} = m \cdot g \cdot h = 5 \cdot 9,8 \cdot 20 = 980 \text{ J}$$

Por tanto, la variación de energía es, en este caso:

$$\begin{aligned} \Delta E_{p_2} &= E_{p_f2} - E_{p_i2} = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot h_2 = m \cdot g \cdot (h - h_2) = \\ &= m \cdot g \cdot (h - h_1 - h) = -m \cdot g \cdot h_1 = \\ &= -5 \cdot 9,8 \cdot 2,2 = -107,8 \text{ J} \end{aligned}$$

La variación de energía potencial es, lógicamente, la misma en ambos casos.

3. Calcula la energía potencial elástica que posee un muelle que alargamos 5 cm si para alargarlo 10 cm debemos tirar de él con una fuerza de 20 N.

Sabemos que para alargar el muelle 10 cm hemos de realizar una fuerza de 20 N. A partir de este dato es posible calcular la constante elástica, k , que nos servirá para resolver el problema:

$$F = k \cdot x \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{20}{0,1} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Ahora ya estamos en condiciones de calcular la energía almacenada cuando el muelle está estirado 5 cm. Para ello, basta con sustituir en la expresión:

$$E_p(x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0,05^2 = 0,25 \text{ J}$$

4. En la actividad anterior, calcula el valor de la constante elástica, k .

La constante elástica la hemos calculado ya para resolver la primera actividad de esta página: $k = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

5. Si cortamos el muelle por la mitad, ¿cuánto vale ahora la constante elástica de cada trozo?

Al cortar el muelle por la mitad, la constante elástica sigue siendo la misma para cada trozo, ya que dicha constante depende únicamente de las características del material.

1.5. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

1. Dejamos caer un objeto de 2 kg desde una altura de 10 m. En ausencia de rozamiento:

- Calcula la energía mecánica del objeto a 10, 8, 6, 4, 2 y 0 m del suelo.**
- Representa en una gráfica las energías cinética, potencial gravitatoria y mecánica del objeto. A la vista del resultado, ¿qué puedes decir de las fuerzas que actúan?**
 - El movimiento de caída libre es un m.r.u.a. Calcularemos, por tanto, cada uno de los instantes en los que la altura es la indicada por el enunciado y, a partir de ellos, la velocidad, dada por las ecuaciones del movimiento de caída libre. Por último, calcularemos las energías cinética, potencial y mecánica.

Cuando $h = 8$ m, resulta:

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (10 - 8)}{10}} = 0,632 \text{ s}$$

Como partimos de velocidad nula, la velocidad en este instante es:

$$v = v_0 + g \cdot t = 0 + 10 \cdot 0,632 = 6,32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la energía cinética tiene un valor:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (6,32)^2 = 40 \text{ J}$$

La energía potencial del objeto a esta altura es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 2 \cdot 10 \cdot 8 = 160 \text{ J}$$

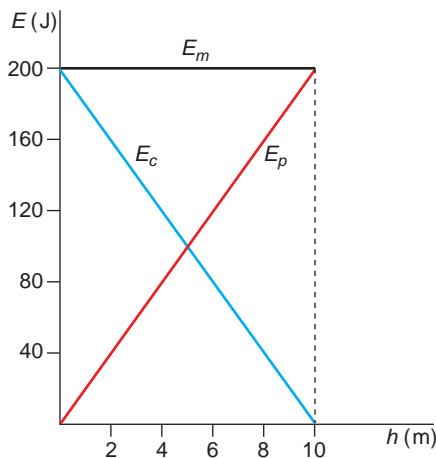
Y, por tanto, su energía mecánica vale:

$$E_m = E_c + E_p = 40 + 160 = 200 \text{ J}$$

Realizando estas operaciones para cada una de las alturas pedidas, obtenemos:

Altura (m)	Instante (s)	Energía cinética (J)	Energía potencial (J)	Energía mecánica (J)
10	0	0	200	200
8	0,632	40	160	200
6	0,894	80	120	200
4	1,095	120	80	200
2	1,265	160	40	200
0	1,41	200	0	200

b) Al representar gráficamente los datos anteriores, resulta:



Sobre el objeto actúa una fuerza conservativa, que es la fuerza gravitatoria.

- 2. Un cuerpo de 50 kg de masa se deja libre sobre un plano inclinado 30°. Calcula el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano, sabiendo que el cuerpo no se desliza.**

Si el cuerpo no se desliza, la resultante de las fuerzas que actúan en la dirección del plano inclinado en que se encuentra apoyado debe ser nula. Estas fuerzas son la componente horizontal del peso y la fuerza de rozamiento. Por tanto:

$$\vec{P}_x + \vec{F}_r = 0 \rightarrow P_x - F_r = 0 \rightarrow P_x = F_r \rightarrow m \cdot g \cdot \text{sen } \theta = \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos } \theta$$

$$\mu = \frac{m \cdot g \cdot \text{sen } \theta}{m \cdot g \cdot \text{cos } \theta} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \text{tg } \theta \rightarrow \mu = \text{tg } 30^\circ = 0,58$$

- 3. Lanzamos verticalmente hacia arriba un objeto de 3 kg de masa, con $v = 15$ m/s. Calcula la energía disipada por rozamiento con el aire si, cuando el objeto vuelve al suelo, su velocidad es 12,5 m/s.**

La energía cinética que comunicamos al objeto en el momento del lanzamiento y la que posee un instante antes de tocar el suelo son, respectivamente:

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \rightarrow E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15^2 = 337,5 \text{ J}$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \rightarrow E_{c_2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12,5^2 = 234,4 \text{ J}$$

La diferencia entre ambas energías es la que se disipa por rozamiento. Por tanto:

$$\Delta E_c = W_{roz} = E_{c_2} - E_{c_1} \rightarrow W_{roz} = 234,4 - 337,5 = -103,1 \text{ J}$$

El signo negativo obtenido indica la pérdida de energía.

1.6. MOVIMIENTOS DE ROTACIÓN. MOMENTO ANGULAR

- 1. ¿Qué relación existe entre las magnitudes lineales s , v , a y las magnitudes angulares θ , ω y α ? Repasa los contenidos estudiados el curso pasado si es necesario.**

A partir de la definición de radián podemos establecer la relación entre un arco de circunferencia y el ángulo que abarca, en la que r es el radio de la circunferencia:

$$\Delta s = r \cdot \Delta \theta$$

Si comparamos esta expresión con la que relaciona el desplazamiento con la velocidad y con el tiempo en el m.r.u., resulta:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta s = r \cdot \Delta \theta \\ \Delta s = v \cdot \Delta t \end{array} \right\} \rightarrow v \cdot \Delta t = r \cdot \Delta \theta \rightarrow v = r \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

En esta última expresión, el cociente es la velocidad angular. Por tanto:

$$v = r \cdot \omega$$

De un modo similar, podemos llegar a la expresión que establece la relación entre la aceleración lineal y la angular, que para cada componente de la aceleración es:

$$a_T = \alpha \cdot r ; a_N = \omega^2 \cdot r$$

2. Deduce la ecuación de dimensiones del momento angular. ¿Cuál es la unidad del S.I. en que se mide esta magnitud?

La ecuación de dimensiones del momento angular es:

$$[L] = [m] \cdot [r] \cdot [v] \cdot [\text{sen } \theta] = M \cdot L \cdot L \cdot T^{-1} = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$$

La unidad del S.I. en que se mide es, por tanto:

$$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = \text{J} \cdot \text{s}$$

1.7. DINÁMICA DE ROTACIÓN. ECUACIÓN FUNDAMENTAL

1. Calcula el momento angular de una partícula que se mueve en línea recta a lo largo del eje de abscisas respecto a un observador situado en el origen del sistema de referencia.

El momento angular de una partícula, respecto a un punto, es el momento, respecto a dicho punto, de su cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

En esta expresión, \vec{r} es el vector posición de la partícula respecto al origen de coordenadas.

Al moverse la partícula a lo largo del eje de abscisas, \vec{r} tiene la misma dirección que el eje y, como el movimiento es rectilíneo, la velocidad también tiene la dirección del eje de abscisas.

Al aplicar a este caso la definición de producto vectorial de dos vectores, obtenemos el siguiente valor para el módulo del momento angular:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m \cdot \vec{v}| = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen } 0^\circ = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen } 180^\circ = 0$$

El ángulo que forman entre sí el vector posición y el vector velocidad es nulo si la partícula se mueve en sentido positivo por el eje de abscisas; es decir, de izquierda a derecha, y vale 180° cuando lo hace en sentido contrario. Tanto en uno como en otro caso, el momento angular de la partícula respecto al origen de coordenadas es nulo.

2. Dos partículas que tienen la misma cantidad de movimiento, ¿tienen el mismo momento angular? Justifica tu respuesta.

El momento angular es el momento de la cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Si la cantidad de movimiento de las dos partículas es la misma, sus momentos angulares serán iguales solo si ambas partículas tienen el mismo vector posición, \vec{r} .

Respecto a un mismo sistema de referencia, esto no es posible, ya que las dos partículas ocuparán dos posiciones distintas.

Únicamente pueden ser iguales sus vectores posición, tomando, para cada partícula, sistemas de referencia distintos, que hagan posible dicha igualdad.

3. Las partículas de la actividad anterior, ¿podrían tener el mismo momento angular y no estar situadas en el mismo punto?

Según se vió en la actividad anterior, dos partículas con la misma cantidad de movimiento no pueden tener el mismo momento angular, a no ser que se encuentren en el mismo punto con respecto a un mismo sistema de referencia, lo cual es imposible.

Por tanto, únicamente pueden tener el mismo momento angular si sus vectores posición son iguales, tomando, para cada partícula, un sistema de referencia distinto.

4. Demuestra que si una partícula se mueve con velocidad constante y su momento angular con respecto a un punto es nulo, o bien ha pasado ya por ese punto o pasará por él.

El momento angular es el momento de la cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

En esta expresión, \vec{r} es el vector posición de la partícula respecto al punto.

El módulo del momento angular será, por tanto:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m \cdot \vec{v}| = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen } \alpha$$

donde α designa el ángulo que forman \vec{r} y \vec{v} .

Dado que la partícula se mueve a velocidad constante, tanto \vec{r} como \vec{v} son distintos de cero. Por tanto, para que el momento angular sea nulo, debe ocurrir que α sea 180° , lo que implica que la partícula se dirige hacia el punto, o 0° , de tal forma que la partícula ha pasado ya por el punto y se aleja de él.

1.8. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

1. Sobre una cuerda arrollada en la periferia de un volante de 89 cm de diámetro se ejerce una fuerza constante de 40 N. Si, partiendo del reposo, al cabo de 5 segundos se han desenrollado 6 m de cuerda, calcula la aceleración angular y la velocidad angular al cabo de los 5 segundos.

Para calcular la aceleración angular, calculamos primero la aceleración lineal (tangencial) del extremo de la cuerda, que habrá recorrido 6 metros al cabo de 5 segundos:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow a = 2 \cdot \frac{s - s_0}{t^2} = 2 \cdot \frac{6 - 0}{5^2} = 0,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

La velocidad lineal en este instante será:

$$v = v_0 + a \cdot t = 0 + 0,48 \cdot 5 = 2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Con estos valores, calculamos la aceleración angular y la velocidad angular:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{0,48}{0,89/2} = 1,08 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2,4}{0,89/2} = 5,39 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 2. Un volante tiene un momento de inercia de $300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y gira a una velocidad de 500 revoluciones por minuto. Se le aplica un par de fuerzas que detiene el volante en 6 minutos. Calcula la aceleración angular con que gira el volante y el momento que se le aplica debido al par de rozamiento.**

Para calcular la aceleración angular del volante, tendremos en cuenta la ecuación que relaciona la velocidad con la aceleración en el movimiento circular uniformemente acelerado.

Antes de comenzar a operar, debemos expresar las magnitudes que nos proporciona el enunciado en las unidades correspondientes del Sistema Internacional. De ese modo:

$$\omega_0 = 500 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 16,67 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = 6 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 360 \text{ s}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \omega - \omega_0 &= \alpha \cdot t \\ \alpha &= \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 16,67 \cdot \pi}{360} = -0,15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

El signo negativo que acompaña al resultado indica que se produce una deceleración.

El momento debido al par de fuerzas lo obtenemos a partir de la aceleración angular calculada en el apartado anterior, y aplicando la ecuación fundamental de la dinámica de rotación. Su valor, en módulo, es el siguiente.

$$M = I \cdot \alpha \rightarrow M = 300 \cdot 0,15 = 43,65 \text{ N} \cdot \text{m}$$

1.9. ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

- 1. Un disco uniforme, cuyo momento de inercia es $0,0261 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, da vueltas a 480 r.p.m. Calcula su energía cinética de rotación.**

La energía cinética de rotación se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$E_{c. \text{ rot}} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

En primer lugar, debemos expresar la velocidad angular en las unidades correspondientes del S.I.:

$$\omega = 480 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 16 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$E_{c. \text{ rot}} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,0261 \cdot (16 \cdot \pi)^2 = 32,97 \text{ J}$$

2. Realiza una tabla comparativa con las magnitudes y las ecuaciones características del movimiento lineal y las del movimiento de rotación vistas en esta unidad.

En la dinámica de traslación, la cantidad de movimiento caracteriza el movimiento de un cuerpo; en torno a ella se establecen las leyes de la dinámica. En la dinámica de rotación es el momento angular el que caracteriza el movimiento de un cuerpo; de ahí derivan las leyes de la dinámica de este movimiento.

Comparando las expresiones que corresponden a la cantidad de movimiento y al momento angular:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad ; \quad \vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

se observa que el momento de inercia, I , desempeña el mismo papel en la rotación que la masa, m , en la traslación, al igual que la velocidad angular desempeña el papel de la velocidad lineal.

En la traslación son las fuerzas las responsables de la variación de la cantidad de movimiento. En la rotación, los momentos son los responsables de la variación del momento angular.

En un sistema cuya masa no varíe, la ecuación fundamental de la dinámica de traslación sería $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Lo mismo ocurre en la rotación si no varía el momento de inercia; en este caso, la ecuación fundamental de la dinámica de rotación es $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$. El momento ocupa el lugar de la fuerza, y la aceleración angular, el de la lineal.

Por último, los principios de conservación, tanto de \vec{p} como de \vec{L} , están universalmente aceptados y verificados, incluso en aquellos casos en que alguna de las leyes de Newton parece no cumplirse. Las siguientes tablas muestran un resumen de las analogías citadas:

TRASLACIÓN		ROTACIÓN	
Magnitud	Unidad	Magnitud	Unidad
Masa, m	kg	Momento de Inercia, I	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Velocidad, v	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Velocidad angular, ω	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Aceleración, a	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	Aceleración angular, α	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$
Fuerza, F	N	Momento de la fuerza, M	$\text{N} \cdot \text{m}$
Cantidad de movimiento, $p = m \cdot v$	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Momento angular, $L = I \cdot \omega$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

	TRASLACIÓN	ROTACIÓN
Ecuación fundamental	$F = m \cdot a$	$M = I \cdot \alpha$
Principio de conservación	$p = m \cdot v = \text{cte}$	$L = I \cdot \omega = \text{cte}$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Desde un punto de vista físico, ¿esfuerzo equivale a trabajo? ¿Con qué magnitud física relacionarías el esfuerzo?

No; físicamente es muy importante diferenciar el esfuerzo (muscular), que podemos relacionar con la fuerza, del trabajo. Para que haya trabajo, debe existir desplazamiento en la dirección de la fuerza aplicada o en una dirección que no forme un ángulo de 90° o de 270° con dicha fuerza, lo cual es fácilmente deducible de la definición de trabajo:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

en la que θ es el ángulo formado por los vectores fuerza y desplazamiento.

2. ¿Qué relación existe entre la altura máxima que alcanza una piedra, lanzada verticalmente desde la superficie de la Tierra, y la velocidad con que fue lanzada?

Para contestar a la pregunta, hemos de suponer que la energía mecánica del sistema se conserva; es decir, no consideramos el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento.

Cuando la piedra alcanza el punto más alto de su trayectoria, toda la energía mecánica del sistema se encuentra en forma de energía potencial. Por otra parte, esa energía mecánica se encontraba en forma de energía cinética en el momento del lanzamiento. Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre los instantes inicial y final, resulta:

$$\Delta E_c - \Delta E_p = 0$$

Sustituyendo valores y teniendo en cuenta que $v = 0$ y $h_0 = 0$, resulta:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot (h - h_0) = 0 \rightarrow h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = k \cdot v_0^2$$

Por tanto, la altura máxima es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial.

3. El trabajo que debemos realizar para detener un cuerpo en movimiento es:
- Proporcional a la masa del cuerpo y al cuadrado de la velocidad que lleva.
 - Proporcional a la masa del cuerpo y a su velocidad.
 - Proporcional a la masa del cuerpo y a la aceleración que lleva.
 - Ninguna de las respuestas anteriores.

Aplicaremos el teorema de las fuerzas vivas entre el instante inicial, cuando el cuerpo se desliza con cierta velocidad, y el instante final, en el que se detiene.

De ese modo, obtenemos el siguiente resultado:

$$W = \Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

El signo negativo indica que este trabajo debe ser realizado por una fuerza externa en sentido opuesto al movimiento del cuerpo. La respuesta correcta es, por tanto, la **a)**.

- 4. Un objeto de 20 g se mueve con una velocidad de $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calcula su energía cinética. Si la velocidad se reduce a la mitad, la energía cinética, ¿también se reducirá a la mitad?**

La energía cinética del cuerpo es:

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,02 \cdot 20^2 = 4 \text{ J}$$

Si la velocidad se reduce a la mitad:

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{v_1^2}{4} = \frac{E_{c_1}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ J}$$

Por tanto, la energía cinética se reduce a la cuarta parte.

- 5. Para que la energía mecánica de un sistema se conserve, es suficiente que:**

- a) Todas las fuerzas deriven de potenciales.**
- b) El sistema esté aislado.**
- c) Se pueda calcular el trabajo de las fuerzas a lo largo de un camino cualquiera.**
- d) Las fuerzas dependan de la posición que ocupan, y no de la velocidad con que se mueven los puntos materiales.**

La respuesta correcta es la **a)** siempre que se trate de un sistema físico aislado. Las fuerzas que derivan de potenciales son fuerzas conservativas, y, según el teorema de conservación de la energía mecánica, si las fuerzas que actúan sobre un sistema físico son conservativas, la energía mecánica del sistema permanece constante.

Si el sistema físico se encuentra aislado y existen fuerzas no conservativas, la energía mecánica del sistema no tiene por qué mantenerse constante.

Pensemos, por ejemplo, en el sistema mecánico formado por un plano inclinado y un objeto que se desliza sobre él con rozamiento. Si el sistema objeto-plano está aislado, la energía total se mantiene constante, aunque parte de ella se transfiere del objeto al plano en forma de calor, disminuyendo la energía mecánica del sistema.

- 6. En todo sistema físico:**

- a) La energía mecánica se conserva.**
- b) La energía mecánica se conserva si el sistema está aislado y no existen rozamientos interiores al sistema.**
- c) La energía se conserva si el sistema está aislado.**
- d) Ninguna respuesta es correcta.**

La respuesta correcta es la **b)**. Un sistema físico puede permanecer aislado (ausencia de fuerzas exteriores), pero puede haber fuerzas no conservativas internas en él (rozamientos internos), no cumpliéndose en este caso el principio de conservación de la energía mecánica. Un ejemplo de ello es el propuesto al resolver la actividad anterior.

7. Comenta la siguiente frase:

“Podemos hablar de diferencias de potencial aunque no conozcamos el origen de potenciales, pero sin este, jamás podremos definir potenciales”.

La frase es cierta.

Si conocemos la magnitud que hace variar el potencial, podemos establecer sin problemas diferencias de potencial en función de los distintos valores de la citada magnitud. Sin embargo, si no establecemos un punto de referencia donde el potencial sea nulo, será imposible hablar de puntos del espacio con potencial determinado.

8. Explica por qué es siempre negativo el trabajo de la fuerza de rozamiento.

Cuando un cuerpo se mueve sobre la superficie de otro cuerpo, existe una fuerza de interacción en la superficie de contacto entre ambos que se opone siempre al movimiento. A esta fuerza la denominamos fuerza de rozamiento. Dado que se opone al movimiento, el ángulo, θ , formado por la fuerza de rozamiento y el desplazamiento, es de 180° . Por tanto, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es negativo:

$$W_{roz} = \vec{F}_{roz} \cdot \Delta\vec{r} = F_{roz} \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ = -F_{roz} \cdot \Delta r$$

9. ¿Cuáles son las ventajas de resolver los problemas de mecánica utilizando las ecuaciones del trabajo y la energía en vez de utilizar las leyes de Newton?

La principal ventaja es que las ecuaciones del trabajo y de la energía permiten calcular posiciones y velocidades de forma mucho más sencilla que las leyes de Newton, puesto que, al ser conservativo el campo gravitatorio, las variaciones energéticas que se producen cuando un cuerpo se mueve en su seno dependen únicamente de las posiciones inicial y final, y no de la trayectoria seguida.

10. ¿Es central la fuerza elástica? ¿Es necesario que una fuerza conservativa sea central? Razona tus respuestas.

La fuerza elástica es una fuerza central. En este caso, el punto fijo por el que siempre pasa la línea de acción de la fuerza es el punto donde el muelle se engancha. De no existir ese punto, el muelle sería incapaz de estirarse o de acortarse, ya que no podríamos ejercer fuerza sobre él.

Una prueba de que la fuerza elástica siempre está dirigida hacia este punto es que podemos estirar el muelle en vertical (por ejemplo, colgado de un techo) o en horizontal (si lo enganchamos a una pared), y, en cada caso, la fuerza será vertical u horizontal, respectivamente, pero estará dirigida hacia el punto por el que se sujeta el muelle.

Respecto a la segunda pregunta, no es necesario. La implicación está demostrada en sentido contrario; esto es, podemos afirmar que toda fuerza central es conservativa, pero no al revés.

11. Dos partículas situadas sobre un disco giran con velocidad angular constante. Una está en el borde del disco, y la otra, a mitad de camino entre el borde y el eje.

a) ¿Cuál de las partículas recorre una mayor distancia durante un tiempo determinado?

- b) ¿Cuál gira mayor ángulo?**
- c) ¿Cuál tiene mayor velocidad?**
- d) ¿Cuál gira a mayor velocidad angular?**
- e) ¿Cuál posee mayor aceleración tangencial?**
- f) ¿Y mayor aceleración normal?**
- g) ¿Y mayor aceleración angular?**

a) La relación entre el arco recorrido, Δs , por cada partícula y el ángulo abarcado es:

$$\Delta s = R \cdot \Delta\theta$$

Por tanto, la partícula que se encuentra a mayor distancia del eje de giro recorrerá una distancia mayor. En concreto, la distancia que recorre la partícula que se encuentra en el borde del disco es:

$$\Delta s_1 = R \cdot \Delta\theta$$

Y la que se encuentra a mitad de camino entre el borde y el eje:

$$\Delta s_2 = \frac{R}{2} \cdot \Delta\theta = \frac{\Delta s_1}{2}$$

Esta última recorre, por tanto, la mitad de distancia que la anterior.

- b) Ambas giran el mismo ángulo.
- c) La relación entre la velocidad lineal y la angular es:

$$v = R \cdot \omega$$

Por tanto, aquella partícula que se encuentre mas alejada del eje de giro girará con mayor velocidad lineal.

- d) La velocidad angular es constante (m.c.u.); las dos giran a la misma velocidad.
- e) La relación entre la aceleración tangencial y la aceleración angular es:

$$a_T = \alpha \cdot R$$

Como la velocidad angular es constante, $\alpha = 0$, $a_T = 0$ en ambos casos.

- f) Una partícula que se mueve describiendo un movimiento curvilíneo siempre está sometida a una aceleración normal (centrípeta). En el caso del m.c.u. es:

$$a_N = \omega^2 \cdot R$$

Por tanto, los puntos más alejados del eje de giro tendrán un valor más alto de la aceleración normal.

- g) Como se ha indicado anteriormente, $\alpha = 0$ en ambos casos.

12. ¿Qué condición es necesaria para que un cuerpo gire?

Al aplicar una fuerza sobre un cuerpo, este puede desplazarse de dos formas: puede moverse sobre una trayectoria, trasladándose de un punto a otro, o puede describir un giro sobre sí mismo, permaneciendo en la posición relativa que ocupa.

El momento de una fuerza es la magnitud física que produce el giro de un cuerpo alrededor de un punto cuando sobre él aplicamos una fuerza. Por tanto, para que un cuerpo gire, es necesario que la resultante de los momentos aplicados sobre él sea no nula.

13. Demuestra que el momento de una fuerza respecto a un punto se puede calcular como el producto del módulo de dicha fuerza por la distancia que hay desde el punto a la línea de acción de la fuerza.

El momento de una fuerza, \vec{M}_O , respecto a un punto, O , se define como el producto vectorial de los vectores \vec{F} y \vec{r} , siendo \vec{r} el vector posición que une el eje de giro con el punto en que se aplica la fuerza:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow M_O = r \cdot F \cdot \text{sen } \theta$$

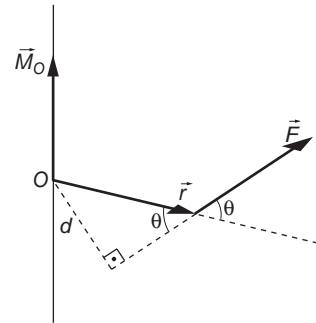
En la expresión anterior, θ es el ángulo formado por los vectores \vec{r} y \vec{F} .

De acuerdo con la gráfica de la derecha, podemos expresar la distancia que hay desde el punto a la línea de acción de la fuerza en función de θ y r :

$$d = r \cdot \text{sen } \theta \rightarrow \text{sen } \theta = \frac{d}{r}$$

Por tanto, el momento de la fuerza es:

$$M_O = r \cdot F \cdot \frac{d}{r} = F \cdot d$$



tal y como solicitaba el enunciado de la cuestión.

14. Imagina una persona patinando sobre hielo que está girando sobre sí misma a gran velocidad con los brazos levantados. Explica qué sucederá si baja los brazos, dejándolos extendidos perpendicularmente al cuerpo.

Cuando una persona está patinando sobre hielo, podemos considerar nulo el valor de la fuerza de rozamiento. Por tanto, al girar sobre sí misma, su momento angular permanece constante; es decir:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \text{cte}$$

Cuando el patinador coloca los brazos perpendicularmente, su momento de inercia, $I = m \cdot r^2$, aumenta; en consecuencia, para que el momento angular permanezca constante, su velocidad angular, $\vec{\omega}$, disminuirá.

15. Una partícula recorre una trayectoria circular. Si se duplica su cantidad de movimiento, ¿cómo se ve afectado su momento angular? ¿Y si se duplica el radio de la trayectoria pero sin modificar la velocidad de la partícula?

El momento angular de una partícula es:

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

siendo su módulo:

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen } \theta$$

En la expresión anterior, θ es el ángulo formado por los vectores \vec{r} y \vec{v} , r es el radio de la trayectoria, y m , la masa de la partícula.

Recuerda que la cantidad de movimiento que corresponde a una partícula de masa m que se mueve con velocidad \vec{v} es:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \rightarrow p = m \cdot v$$

Por tanto, podemos expresar el momento angular como:

$$L_1 = r \cdot p \cdot \text{sen } \theta$$

Si se duplica la cantidad de movimiento:

$$L_2 = r \cdot p_2 \cdot \text{sen } \theta = r \cdot 2 \cdot p \cdot \text{sen } \theta = 2 \cdot L_1$$

el momento angular también se duplica.

Si lo que se duplica es el radio de la trayectoria sin modificar la velocidad, ocurre lo mismo:

$$L_3 = r_3 \cdot p \cdot \text{sen } \theta = 2 \cdot r \cdot p \cdot \text{sen } \theta = 2 \cdot L_1$$

16. Un cuerpo, de masa m , es elevado desde el suelo hasta una altura h de dos modos, directamente y utilizando una rampa que forma un ángulo de 37° con la horizontal:

a) ¿En cuál de los dos casos se realiza más trabajo? Considera dos situaciones, con rozamiento y sin él.

b) ¿Para qué sirve en realidad la rampa?

a.1) Suponiendo que no existe rozamiento.

En este caso, el trabajo es el mismo por los dos caminos, ya que la única fuerza que interviene es el peso, que, al ser una fuerza conservativa, hace que el trabajo realizado solo dependa de las posiciones inicial y final:

$$W = \Delta E_p = m \cdot g \cdot h$$

a.2) Suponiendo que existe rozamiento.

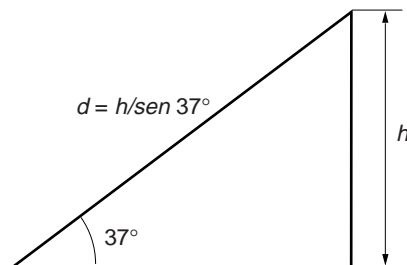
- Sin rampa:

Al no haber rampa, el cuerpo no se desliza y, por tanto, no existe fuerza de rozamiento (si despreciamos la del aire). Este caso es idéntico al anterior, y el trabajo será:

$$W = \Delta E_p = m \cdot g \cdot h$$

- Con rampa:

Si utilizamos la rampa, el trabajo que debemos realizar sobre el cuerpo aumenta, ya que, además de la necesidad que tenemos de comunicar energía potencial al cuerpo para que se eleve, necesitamos vencer la fuerza de rozamiento para que el cuerpo se deslice sobre la superficie del plano.



El balance energético queda, en este caso, de la forma:

$$W = \Delta E_p + W_{roz} = m \cdot g \cdot b + F_{roz} \cdot \frac{b}{\operatorname{sen} 37^\circ}$$

$$W = m \cdot g \cdot b + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 37^\circ \cdot \frac{b}{\operatorname{sen} 37^\circ} = m \cdot g \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg} 37^\circ} \right)$$

Como vemos, al utilizar la rampa, el trabajo necesario aumenta, debido al rozamiento.

- b) No olvidemos el objetivo que persigue el problema que nos plantean: subir el cuerpo hasta cierta altura, lo que supone realizar un trabajo para comunicarle cierta energía potencial. Lo que permite la rampa es que esa “entrega” de energía se realice de modo gradual. Dicho de otra forma: la rampa reduce la tasa de entrega de energía al sistema, lo que permite realizar el mismo trabajo en mayor tiempo, o lo que es lo mismo, empleando menor potencia.

EJERCICIOS

- 17. Un resorte, de constante elástica $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, se comprime 5 cm en el interior de un tubo horizontal. Liberado bruscamente, expulsa una bola de 10 g de masa. ¿Con qué velocidad, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, sale la bola del tubo?**

a) 2 b) 5 c) 10 d) 20

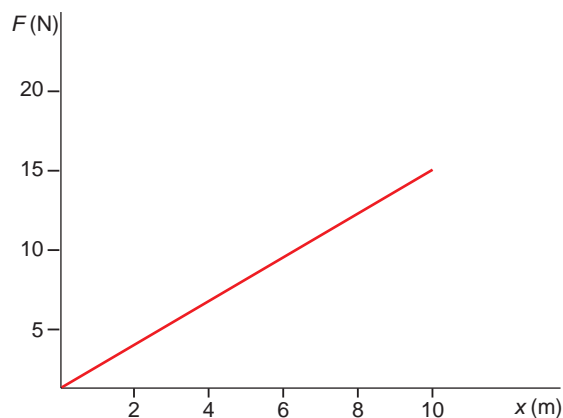
Si suponemos el sistema libre de rozamientos y aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica, resulta:

$$|\Delta E_{p_{elástica}}| = |\Delta E_c|$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot x^2}{m}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 0,05^2}{0,01}} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La respuesta correcta es, por tanto, la **b**).

- 18. Una fuerza $F(x)$, varía con la posición, x , según se indica en la gráfica adjunta. Calcula el trabajo que realiza dicha fuerza sobre una partícula que se mueve desde el punto $x = 0$ hasta el punto $x = 6 \text{ m}$.**



A la vista de la gráfica, podemos escribir la relación entre la fuerza y la posición como se indica:

$$F = 1,5 \cdot x$$

que corresponde a la ecuación de una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es 1,5.

Como la fuerza es variable, para calcular el trabajo debemos utilizar la expresión:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr \cdot \cos \theta$$

Dado que la fuerza solo depende de la coordenada x , podemos escribir la expresión anterior como:

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = \int_0^6 1,5 \cdot x \cdot dx = 1,5 \cdot \int_0^6 x \cdot dx = \\ &= 1,5 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^6 = 1,5 \cdot \left(\frac{6^2}{2} - 0 \right) = 27 \text{ J} \end{aligned}$$

- 19. La fuerza indicada en el ejercicio anterior es la única fuerza que está actuando sobre una partícula de 5 kg de masa que inicialmente se encuentra en reposo en el punto $x = 0$. Calcula cuál será su velocidad al llegar al punto $x = 6$ m.**

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas, podemos calcular la energía cinética final que adquiere la partícula:

$$W = \Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = E_{c_f} - 0 \rightarrow W = E_{c_f} \rightarrow E_{c_f} = 27 \text{ J}$$

Por tanto, la velocidad que adquiere la partícula es:

$$E_{c_f} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{c_f}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 27}{5}} = 3,29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 20. Del techo de una habitación cuelgan dos pesas, una de 7 kg y otra de 10 kg. Si la primera cuelga a 10 m de altura, suspendida por una cuerda de 2 m, y la segunda cuelga de una cuerda de 8 m, ¿qué pesa posee más energía potencial, medida respecto al techo?**

El problema muestra la importancia que reviste la elección del sistema de referencia cuando estudiamos la energía potencial gravitatoria.

Debe quedar claro que, si escogemos el origen de potenciales en el techo, todas las alturas que queden por debajo del nivel del techo serán negativas y, por tanto, corresponderán a energías potenciales negativas.

En el primer caso, la energía potencial es:

$$E_{p_1} = m \cdot g \cdot h = 7 \cdot 10 \cdot (-2) = -140 \text{ J}$$

mientras que para la segunda esfera, dicha energía es:

$$E_{p_2} = m \cdot g \cdot h = 10 \cdot 10 \cdot (-8) = -800 \text{ J}$$

La primera esfera tiene, por tanto, más energía potencial.

21. **Calcula el trabajo consumido y la potencia suministrada para mantener un cuerpo de 10 kg a una altura de 2 m durante 10 segundos. ¿Qué trabajo se realiza para elevarlo desde el suelo al punto anterior con velocidad constante, en 5 segundos? En ese caso, ¿cuál es la potencia?**

Mantener un cuerpo a una cierta altura no supone realizar ningún trabajo, ya que no existe desplazamiento alguno. Para mantener un cuerpo a cierta altura, hemos de tirar de él con una fuerza igual a su peso.

Para hacerlo subir, debemos realizar un trabajo igual a la variación de energía potencial que experimenta el cuerpo desde el suelo hasta el punto en que se encuentra:

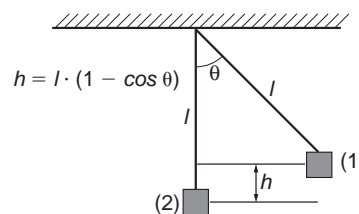
$$W = \Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i} = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot 0 = 2 \cdot 10 \cdot 10 = 200 \text{ J}$$

La potencia es:

$$P = \frac{W}{t} \rightarrow P = \frac{200}{5} = 40 \text{ W}$$

22. **Un péndulo de 1 m de longitud se separa de su posición de equilibrio hasta que forma un ángulo de 20° con la vertical y se deja libre. Calcula la velocidad del péndulo cuando pase de nuevo por la posición de equilibrio. Desprecia el rozamiento con el aire.**

Si despreciamos el rozamiento con el aire, podemos afirmar que el sistema conserva su energía mecánica, pues todas las demás fuerzas que intervienen son conservativas. Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto más alto (que llamaremos 1) y el punto más bajo (que llamaremos 2) de la trayectoria, al que elegimos como origen de potenciales, resulta:

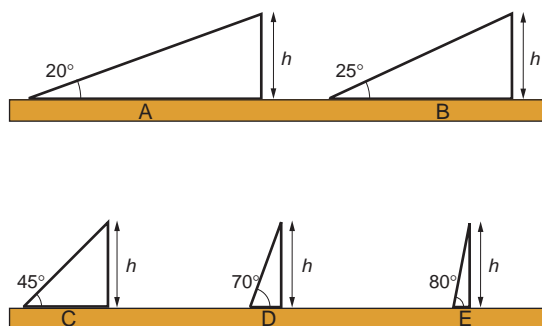


$$E_{mec_1} = E_{mec_2} \rightarrow E_{p_1} + E_{c_1} = E_{p_2} + E_{c_2} \rightarrow m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \theta) + 0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Despejando la velocidad de la ecuación anterior:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \theta)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot (1 - \cos 20^\circ)} = 1,10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

23. **En la figura se muestran varios planos inclinados, por los que ha de subirse, arrastrando, un cuerpo de masa m.**



NOTA: la gráfica correcta es la que aparece en este enunciado.

Suponiendo que el rozamiento entre el cuerpo y el plano es nulo, ¿qué plano escogerías para minimizar el trabajo a realizar? ¿Y para minimizar la potencia?

Contesta de nuevo a las dos preguntas anteriores, suponiendo ahora que existe rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado.

- **Sin rozamiento:**

Trabajo. Si suponemos que no existe rozamiento, el trabajo necesario para elevar un cuerpo de masa m coincide con la energía potencial que hemos de suministrarle para ello. Es decir:

$$\Delta E_p = W$$

Como la altura a la que hay que subir el cuerpo es la misma en todos los casos, el trabajo que hay que realizar es idéntico.

Potencia. La potencia indica la cantidad de trabajo que se realiza por unidad de tiempo.

Suponiendo que la velocidad de subida es la misma en todos los casos, en un plano inclinado de mayor pendiente se necesita mayor potencia para subir el cuerpo. La cantidad de trabajo que se ha de aportar por unidad de tiempo es superior, ya que el trabajo se realiza en menos tiempo.

Para minimizar la potencia, elegiremos, por tanto, el plano de menor pendiente (letra A).

- **Con rozamiento:**

Trabajo. En este caso, el balance energético resulta:

$$\Delta E_p + W_{roz} = W$$

Al sustituir cada término por su valor, resulta:

$$W = m \cdot g \cdot h + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = m \cdot g \cdot h \cdot \left(1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$$

Como indica el resultado, cuanto menor sea el ángulo α , menor será su tangente y, por tanto, mayor el trabajo.

Potencia. El razonamiento es igual al del caso sin rozamiento.

Conviene no olvidar que, en la mayoría de las aplicaciones prácticas, lo que interesa es minimizar la potencia, no el trabajo.

24. Un balón de 0,7 kg de masa comienza a rodar por el césped de un campo de fútbol a $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calcula la variación de energía que experimentan el balón y el césped del campo de fútbol desde que se inicia el movimiento del balón hasta que este se detiene.

La energía potencial del balón se mantiene constante, puesto que no varía su altura. Tan solo varía su energía cinética. El cálculo de la variación de energía cinética que experimenta el balón es:

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_f^2 - v_i^2)$$

Sustituyendo, obtenemos la variación de energía cinética en función de la velocidad en el instante final:

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_f^2 - v_i^2) = 0,35 \cdot (v_f^2 - 25)$$

Una vez se ha parado el balón (velocidad final nula), la variación de energía cinética resulta:

$$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = 0,35 \cdot (0 - 25) = -8,75 \text{ J}$$

La variación de energía que experimenta el césped es nula, ya que no se ha movido.

- 25. Si el balón del ejercicio anterior recorre 75 m antes de detenerse, calcula la fuerza de rozamiento, supuesta constante, que ha estado frenando el balón durante el recorrido.**

De acuerdo con el teorema de las fuerzas vivas, la variación de energía cinética que se produce entre el instante inicial y el instante en que la pelota se detiene coincide con el trabajo realizado. Por otra parte, dado que el plano es horizontal, la única fuerza que realiza trabajo es la de rozamiento, ya que el peso y la reacción normal del plano son perpendiculares a la dirección del movimiento.

La fuerza de rozamiento será, por tanto:

$$W = \vec{F}_{roz} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ = -F_{roz} \cdot d \rightarrow F_{roz} = -\frac{W}{d} = -\frac{\Delta E_c}{d} = -\frac{-8,75}{75} = 0,117 \text{ N}$$

- 26. Se lanza un objeto de 8 kg hacia arriba, con una velocidad inicial de 7 m/s. Calcula la altura que alcanzará el objeto si durante el movimiento se disipa una energía de 80 J por efecto del rozamiento con el aire.**

La energía cinética que comunicamos al objeto en el momento del lanzamiento es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7^2 = 196 \text{ J}$$

Como se disipan 80 J debido al rozamiento, la energía potencial en el punto de altura máxima será:

$$E_p = E_c - W_{roz} \rightarrow E_p = 196 - 80 = 116 \text{ J}$$

A partir de este valor deducimos la altura máxima que alcanza el objeto:

$$E_p = m \cdot g \cdot h \rightarrow h = \frac{E_p}{m \cdot g} = \frac{116}{8 \cdot 9,8} = 1,48 \text{ m}$$

- 27. Calcula el trabajo que realiza la fuerza con que la Tierra atrae un satélite artificial cada vez que el satélite da una vuelta completa a nuestro planeta.**

La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre un satélite artificial es una fuerza central y, como tal, es conservativa. En este caso, al ser la trayectoria que realiza el satélite cerrada (la posición inicial y la final coinciden), el trabajo realizado por la fuerza es nulo.

- 28. Indica la relación que existe entre el trabajo necesario para alargar un muelle 2 cm y el que se necesita para alargar el mismo muelle 1 cm.**

Para resolver este ejercicio, supondremos que el muelle se encuentra inicialmente en reposo. Al tirar de él, incrementamos su energía potencial elástica:

$$\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_0} \rightarrow E_{p_f} - 0 = E_{p_f} = \int_0^x k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Cuando alargamos el muelle 2 cm:

$$E_{pf}(2 \text{ cm}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (0,02)^2$$

Y cuando lo alargamos 1 cm:

$$E_{pf}(1 \text{ cm}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (0,01)^2$$

La relación entre ambos casos es:

$$\frac{E_{pf}(1 \text{ cm})}{E_{pf}(2 \text{ cm})} = \frac{0,01^2}{0,02^2} = 0,25$$

Obviamente, se necesita más trabajo en el primer caso (el incremento de energía potencial es mayor).

29. Calcula las vueltas que dará en 10 s un disco que gira con aceleración angular constante de $2 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ si parte del reposo.

La ecuación que permite calcular la posición angular, θ , en cualquier instante, t , en el m.c.u.a. es:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (t - t_0)^2$$

Si parte del reposo, $\omega_0 = 0$, y si consideramos como inicio de tiempo $t_0 = 0$, la ecuación anterior queda como sigue:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

Por tanto, el ángulo que habrá girado en 10 s será:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^2 = 100 \cdot \pi \text{ rad}$$

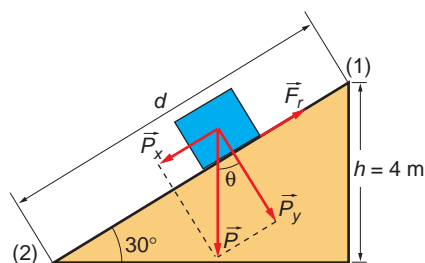
Como en una vuelta hay $2 \cdot \pi \text{ rad}$, el número de vueltas que dará es:

$$n.^\circ \text{ vueltas} = \frac{100 \cdot \pi \text{ rad}}{2 \cdot \pi \text{ rad/vuelta}} = 50 \text{ vueltas}$$

PROBLEMAS

30. Un niño de 30 kg se desliza con rozamiento por un tobogán que tiene 4 m de altura y una inclinación de 30° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre el niño y la superficie del tobogán es $\mu = 0,2$. ¿Cuál será la velocidad del niño al llegar al suelo si se dejó caer desde el punto más alto del tobogán?

A nuestros efectos, podemos considerar el problema de forma análoga al descenso de un bloque por un plano inclinado con rozamiento, como se muestra en la figura de la página siguiente.



Para obtener la velocidad del niño, calcularemos la energía cinética con que llega a la base del plano, que será la diferencia entre la energía potencial que tiene cuando se encuentra a la altura máxima y la energía disipada durante el descenso debido al trabajo de la fuerza de rozamiento.

$$W_{roz} = \Delta E_{lim} \rightarrow E_{c_2} = E_{p_1} - W_{roz}$$

La energía potencial cuando se encuentra a 4 m de altura es:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 30 \cdot 9,8 \cdot 4 = 1176 \text{ J}$$

Por su parte, el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento es:

$$W_{F_{roz}} = \vec{F}_{roz} \cdot \Delta \vec{r} = F_{roz} \cdot \Delta r \cdot \cos 180^\circ = -F_{roz} \cdot \Delta r = -\mu \cdot N \cdot \Delta r$$

En este caso, el valor del desplazamiento, Δr , es la distancia, d , que recorre el niño sobre el tobogán. De acuerdo con la figura, su valor es:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{h}{d} \rightarrow d = \frac{h}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{4}{0,5} = 8 \text{ m}$$

Por tanto:

$$W_{F_{roz}} = -F_{roz} \cdot \Delta r = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot d = -0,2 \cdot 30 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ \cdot 8 = -407,38 \text{ J}$$

Y la energía cinética en la base del plano:

$$E_c = E_p - W_{roz} \rightarrow E_c = 1176 - 407,38 = 768,62 \text{ J}$$

Finalmente, la velocidad del niño al llegar al suelo será:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 768,62}{30}} = 7,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

31 Un bloque de 15 kg cae desde una altura de 15 m y llega al suelo en 2 s. ¿Qué fuerza de rozamiento hace el aire, suponiendo que sea constante? ¿Cuánta energía se ha perdido?

Calcula la velocidad que llevaba el bloque inmediatamente antes de tocar el suelo.

La aceleración de caída podemos calcularla teniendo en cuenta que:

$$s - s_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

Suponiendo que el cuerpo parte del reposo, sustituyendo valores, resulta:

$$15 = 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^2 \rightarrow a = 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Esta aceleración se debe a la acción de una fuerza que será la resultante de dos: la fuerza peso, que lo hace caer, y la fuerza de frenado, que se opone a la caída y se supone también constante. Por tanto:

$$P - F_{roz} = m \cdot a$$

es decir:

$$m \cdot g - F_{roz} = m \cdot a$$

de donde resulta:

$$F_{roz} = m \cdot g - m \cdot a = m \cdot (g - a)$$

y, sustituyendo valores, queda:

$$F_{roz} = 15 \cdot (10 - 7,5) = 37,5 \text{ N}$$

La energía perdida equivale al trabajo de rozamiento que ha realizado el sistema:

$$W_{roz} = \vec{F}_{roz} \cdot \vec{d} = 37,5 \cdot 15 = 562,5 \text{ J}$$

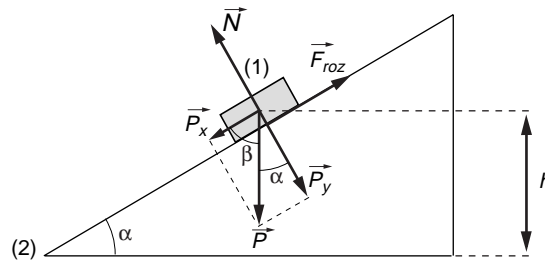
Para calcular ahora la velocidad del bloque inmediatamente antes de chocar con el suelo, basta con tener en cuenta que:

$$v_j = v_0 + a \cdot (t - t_0) = 0 + 7,5 \cdot 2 = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

32. Calcula la velocidad con que llega al suelo un cuerpo de 0,5 kg que se desliza por un plano inclinado 37° cuando se deja caer desde una altura de 50 cm.

El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,15.

Para resolver el problema, tomamos como origen del potencial gravitatorio la posición (2), correspondiente a la base del plano inclinado, tal como se aprecia en la figura:



De ese modo, en la posición (1), a 50 cm de altura, el cuerpo tan solo posee energía potencial, y en la posición (2), tan solo posee energía cinética.

Al desplazarse, el cuerpo pierde energía debido al rozamiento. Debido a ello, el balance energético es:

$$W_{roz} = \Delta E_m \rightarrow W_{roz} = E_{m_2} - E_{m_1}$$

Siendo:

$$E_m(1) = m \cdot g \cdot h$$

$$E_m(2) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

La fuerza de rozamiento actúa en la dirección del desplazamiento, y su sentido es opuesto a este. Por tanto, al desplazarse el cuerpo la distancia d que separa las posiciones (1) y (2), el trabajo que realiza esta fuerza vale:

$$W_{roz} (1 \rightarrow 2) = \vec{F}_{roz} \cdot \Delta \vec{r}$$

$$W_{roz} = \mu \cdot N \cdot d \cdot \cos 180^\circ = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot d$$

siendo:

$$d = \frac{b}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Por tanto:

$$W_{roz} (1 \rightarrow 2) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{b}{\operatorname{sen} \alpha} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Sustituyendo las correspondientes expresiones en la que proporciona el balance energético, resulta:

$$-\mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot b$$

Al despejar, obtenemos el valor que nos piden:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot b \cdot \left(\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \right)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{0,15}{\operatorname{tg} 37^\circ} \right)} = 2,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

33. Una bala de 10 g choca a $40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ con un bloque de 390 g sujeto a un hilo de 1 metro de longitud y se incrusta en él:

a) ¿A qué altura sube el conjunto por efecto del impacto?

b) ¿Cuánto vale el ángulo desplazado?

Nota: En estos choques se conserva la cantidad de movimiento y no se conserva la energía.

En este tipo de choques se conserva la cantidad de movimiento, pero no se conserva la energía mecánica. Solo podemos aplicar el principio de conservación de la energía mecánica al bloque una vez la bala ha quedado alojada dentro de él. En esas condiciones, sí podemos afirmar que en el sistema solo intervienen fuerzas conservativas.

En primer lugar, hallaremos la velocidad inicial con que se mueve el conjunto bloque-bala tras el impacto, aplicando para ello el teorema de conservación de la cantidad de movimiento:

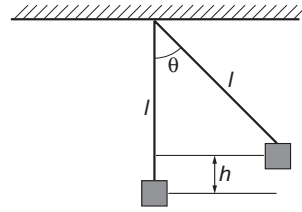
$$P_{\text{antes_choque}} = P_{\text{después_choque}}$$

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

Despejando:

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{0,01 \cdot 40}{0,01 + 0,39} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Situando el origen de potenciales donde se encuentra el sistema bloque-bala en el instante inicial, dicho conjunto solo poseerá energía cinética. Si aplicamos el teorema de conservación de la energía mecánica entre el instante inicial y el instante en que el sistema alcanza el punto más alto de la trayectoria, resulta:



$$\left. \begin{aligned} E_{mecánica_1} &= E_{mecánica_2} \\ E_{c_1} + E_{p_1} &= E_{c_2} + E_{p_2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v'^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot b$$

De donde podemos despejar el valor de b :

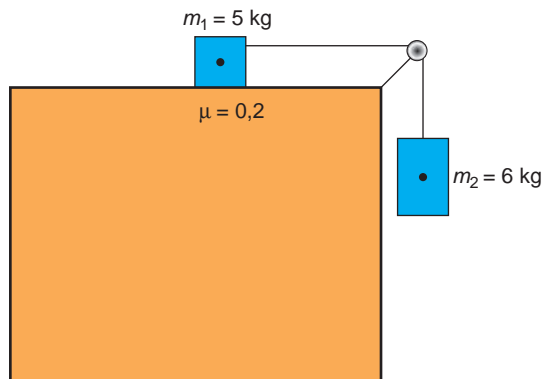
$$b = \frac{v'^2}{2 \cdot g} = \frac{1}{2 \cdot 9,8} = 0,051 \text{ m} = 5,1 \text{ cm}$$

Teniendo en cuenta ahora que $b = l \cdot (1 - \cos \theta)$, resulta:

$$\theta = \arccos \left(1 - \frac{b}{l} \right) = \arccos \left(\frac{1 - 0,051}{1} \right) = 18,4^\circ$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

- 34** En la figura, el coeficiente de rozamiento entre la masa de 5 kg y el suelo toma el valor 0,2.



Despreciando la influencia de la polea y de la cuerda, calcula la velocidad del conjunto cuando la masa de 6 kg ha descendido 2 metros.

Inicialmente, el sistema se encuentra en reposo.

Observa que, en el instante de iniciarse el movimiento, el sistema solo posee la energía potencial de la masa que cuelga. La variación de energía potencial de dicha masa provoca, por tanto, el incremento de la energía cinética del sistema, ya que ambas masas se encuentran unidas por una cuerda.

El balance energético del sistema es:

$$W_{roz} = \Delta E_m \rightarrow W_{roz} = \Delta E_c - \Delta E_p$$

Si sustituimos cada término por su valor:

$$-\mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \Delta b = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2 - m_2 \cdot g \cdot \Delta b$$

Observa que:

1. Como ambos cuerpos están unidos solidariamente, recorren el mismo tramo, Δh , aunque uno en vertical, y el otro, en horizontal.
2. Al estar unidos, los dos cuerpos tienen la misma velocidad en todo instante.

Despejando y sustituyendo la velocidad de la expresión anterior, resulta:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \Delta h \cdot (m_2 - \mu \cdot m_1)}{(m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 2 \cdot (6 - 0,2 \cdot 5)}{(6 + 5)}} = 4,22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

35 Sobre un muelle vertical se apoya, con velocidad nula, un cuerpo de 10 kg. El muelle experimenta una compresión de 5 cm. Calcula la deformación del muelle si el cuerpo se deja caer sobre él desde una altura de 100 cm.

A partir de la primera parte del enunciado podemos averiguar la constante elástica del muelle, ya que:

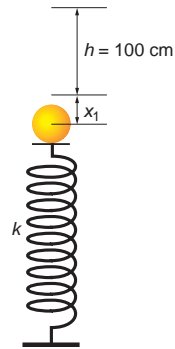
$$F = k \cdot x_1 \rightarrow k = \frac{F}{x_1} = \frac{m \cdot g}{x_1} = \frac{10 \cdot 9,8}{0,05} = 1960 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Inicialmente, al dejar caer el cuerpo desde 0,1 m, este posee energía potencial gravitatoria. Si establecemos el origen de potenciales en el punto de máxima compresión, dicha energía es:

$$E_p = m \cdot g \cdot (h + x)$$

Cuando el cuerpo ha comprimido al muelle, esa energía se ha convertido en energía potencial elástica:

$$E_p = k \cdot \frac{x^2}{2}$$



Como no hay pérdidas, ambas energías deben ser iguales. Por tanto:

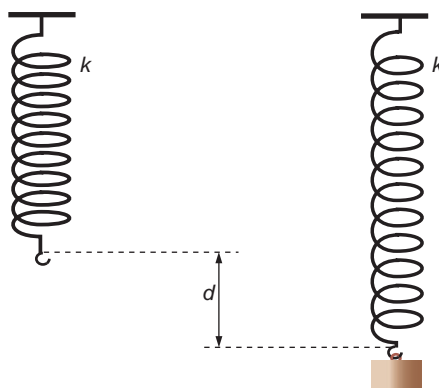
$$k \cdot \frac{x^2}{2} = m \cdot g \cdot (h + x) \rightarrow k \cdot x^2 - 2 \cdot g \cdot m \cdot x - 2 \cdot g \cdot m \cdot h = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{g \cdot m + \sqrt{(g \cdot m)^2 + 2 \cdot k \cdot g \cdot m \cdot h}}{k}$$

Sustituyendo valores, resulta:

$$x = \frac{9,8 \cdot 10 + \sqrt{(9,8 \cdot 10)^2 + 2 \cdot 1960 \cdot 9,8 \cdot 10 \cdot 1}}{1960} = \frac{725,5}{1960} = 0,37 \text{ m} = 37 \text{ cm}$$

36. Un muelle, de constante elástica k , cuelga verticalmente, y a su extremo libre se ata un bloque de masa m . Si se deja caer el sistema formado por el muelle y el bloque desde el reposo, calcula la máxima distancia que cae el bloque hasta que comience a moverse hacia arriba.



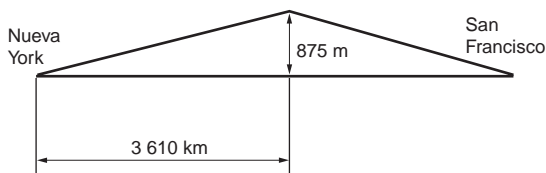
Para resolver este problema, consideraremos que el rozamiento con el aire es nulo. Cuando colgamos del muelle una masa, m , esta oscilará efectuando un movimiento armónico simple, que se estudiará en la unidad 4. La amplitud de este m.a.s. será la máxima distancia que cae el bloque y se da cuando el valor de la fuerza elástica es igual al peso:

$$F_e - P = 0 \rightarrow F_e = P$$

$$k \cdot x = m \cdot g \rightarrow x = \frac{m \cdot g}{k}$$

37. En 1876 la *West Fargo Corporation* unió los dos extremos de los Estados Unidos de América mediante un tendido de ferrocarril.

El tendido tenía una longitud de 5 740 km, y el desnivel máximo que había que salvar medía 875 m, en un punto situado a 3 610 km de Nueva York.



Calcula el trabajo total que realizó el tren, si el coeficiente de rozamiento era 0,17 y la subida y la bajada tenían una pendiente uniforme en los dos ramales. El tren tenía una masa de 23 500 kg.

En el conjunto del trayecto podemos distinguir dos tramos: por un lado, el tramo de subida, que modelizamos como un plano inclinado de pendiente ascendente y constante; por otro, el tramo de bajada, que modelizamos como un plano inclinado de pendiente constante y descendente.

En el tramo de subida, el trabajo que realiza la locomotora se emplea en vencer la fuerza de rozamiento, así como en aumentar la energía potencial del sistema:

$$W_{subida} = \Delta E_p + W_{roz_1}$$

En el tramo de bajada, la energía potencial acumulada y el trabajo que realiza la locomotora se emplean en vencer el rozamiento:

$$W_{bajada} + \Delta E_p = W_{roz_2}$$

Si sumamos el trabajo de subida y el de bajada, tenemos el trabajo total del sistema, que es:

$$W_{total} = W_{subida} + W_{bajada} = W_{roz_1} + W_{roz_2}$$

Al sustituir por su valor los trabajos en contra de la fuerza de rozamiento, tenemos:

$$W_{total} = W_{roz_1} + W_{roz_2} = \mu \cdot m \cdot g \cdot (l_1 \cdot \cos \alpha_1 + l_2 \cdot \cos \alpha_2)$$

$$W_{total} = 0,17 \cdot 23\,500 \cdot 9,8 \cdot (3\,610 \cdot 10^3 \cdot \cos \alpha_1 + 2\,130 \cdot 10^3 \cdot \cos \alpha_2)$$

siendo los ángulos α_1 y α_2 :

$$\alpha_1 = \arcsen \frac{875}{3\,610 \cdot 10^3} = 0,01^\circ$$

$$\alpha_2 = \arcsen \frac{875}{2\,130 \cdot 10^3} = 0,02^\circ$$

Sustituyendo, el trabajo resulta:

$$W_{total} = 2,25 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

38. La masa de la cabina de un ascensor es 350 kg y puede elevar una masa adicional de 350 kg:

- a) **Calcula el trabajo máximo que debe realizar el motor del ascensor para subir al piso más alto, situado a 30 metros de altura.**
- b) **Calcula la potencia del motor, sabiendo que el ascensor tarda 45 segundos en subir hasta ese piso.**

a) El trabajo máximo coincidirá con la energía potencial máxima que puede comunicarse al ascensor cuando se encuentra cargado de pasajeros. Es decir:

$$W = \Delta E_p$$

Por tanto:

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot h = (m_{ascensor} + m_{personas}) \cdot g \cdot h =$$

$$= (350 + 350) \cdot 9,8 \cdot 30 = 205\,800 \text{ J}$$

b) A partir de la definición de potencia, resulta:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{205\,800}{45} = 4\,573,3 \text{ W}$$

39. Se lanza verticalmente hacia arriba un sistema formado por dos masas de 4 y 3 kg, unidas por un resorte de constante elástica $1\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. En determinado instante, las velocidades de ambas masas respecto a la Tierra son 5 y $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, respectivamente, y el muelle está comprimido 10 cm , siendo las alturas de ambas masas respecto a la Tierra 10 y $10,1 \text{ m}$. Calcula la energía total del sistema.

La energía total del sistema será la suma de las energías cinética y potencial de cada masa más la energía potencial elástica del muelle, ya que se supone sin masa (su energía cinética y su energía potencial gravitatoria son nulas):

$$E_{total} = E_{c_1} + E_{c_2} + E_{p_1} + E_{p_2} + E_{elástica}$$

Sustituyendo cada término por su valor, resulta:

$$E_{total} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2) + g \cdot (m_1 \cdot b_1 + m_2 \cdot b_2) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2$$

Por tanto:

$$E_{total} = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2) + 10 \cdot (4 \cdot 10 + 3 \cdot 10,1) + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 0,1^2 = 812 \text{ J}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

40 Un objeto de 1 kg de masa desciende, partiendo del reposo, por un plano inclinado de un metro de longitud que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,1. Al llegar a la base sube por otro plano inclinado de las mismas características.

¿Hasta qué altura del plano subirá la masa, si las únicas pérdidas de energía que existen son por rozamiento?

Si no hubiese rozamiento, en virtud del principio de conservación de la energía mecánica, el cuerpo subiría hasta la misma altura desde la cual se dejó caer desde el primer plano inclinado.

Al existir rozamiento, el trabajo de este provoca una disminución en la energía mecánica del sistema. Debido a ello, la altura que alcanza el cuerpo en el segundo plano es menor.

Entre el punto del que dejamos caer el cuerpo y el punto en que se detiene en el segundo plano se cumple la siguiente relación:

$$E_{mec_1} + W_{roz} = E_{mec_2}$$

$$E_{p_1} + E_{c_1} + W_{roz} = E_{p_2} + E_{c_2}$$

Teniendo en cuenta que en estos dos puntos la velocidad es nula y considerando el trabajo de las fuerzas de rozamiento de ambos planos, la expresión anterior resulta:

$$E_{p_1} + W_{roz\ plano1} + W_{roz\ plano2} = E_{p_2}$$

Con los datos que proporciona el enunciado y la expresión de la fuerza de rozamiento, podemos escribir:

$$m \cdot g \cdot d \cdot \text{sen } 30^\circ - \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos } 30^\circ \cdot d - \mu \cdot m \cdot g \cdot \text{cos } 30^\circ \cdot d' =$$

$$= m \cdot g \cdot d' \cdot \text{sen } 30^\circ$$

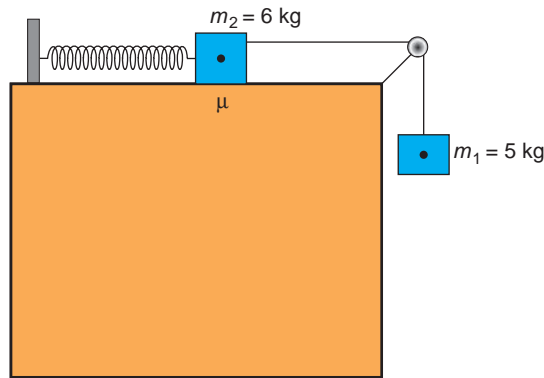
En la expresión anterior podemos sustituir y despejar d' , que es la longitud máxima que recorre el objeto, medida sobre el segundo plano inclinado:

$$d' = \frac{d \cdot \text{sen } 30^\circ - \mu \cdot \text{cos } 30^\circ \cdot d}{\text{sen } 30^\circ + \mu \cdot \text{cos } 30^\circ} = \frac{1 \cdot \text{sen } 30^\circ - 0,1 \cdot \text{cos } 30^\circ \cdot 1}{\text{sen } 30^\circ + 0,1 \cdot \text{cos } 30^\circ} = 0,705 \text{ m}$$

Por tanto, la altura será:

$$h = d' \cdot \text{sen } 30^\circ = 0,705 \cdot \text{sen } 30^\circ = 0,352 \text{ m}$$

41. En el dispositivo de la figura, el muelle tiene una constante elástica $k = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, y el coeficiente de rozamiento de la masa m_2 con la superficie de la mesa vale 0,1.



Si, inicialmente, el muelle se encuentra en reposo, calcula la expresión que proporciona el alargamiento máximo. Considera $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

El sistema, inicialmente en reposo, comienza a acelerar gracias a la energía potencial de la masa m_1 . Mientras esto ocurre, el muelle se alarga.

Ahora bien, ¿hasta cuándo se prolonga esta situación? Lógicamente, hasta que el muelle no pueda estirarse más. En ese instante, el sistema se para, y el movimiento de la masa comienza a ser ascendente.

Para el instante mencionado anteriormente, que es el de máximo estiramiento del muelle, el balance energético es:

$$\Delta E_{p_1} + W_{roz} = \Delta E_{p_{muelle}} \rightarrow m_1 \cdot g \cdot \Delta b - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \Delta b = k \cdot \frac{(\Delta b)^2}{2}$$

Observa que el alargamiento del muelle es, precisamente, la distancia recorrida por las masas, tanto en el plano vertical como en el plano horizontal.

Al despejar Δb y sustituir en la ecuación anterior, resulta:

$$\begin{aligned} \Delta b &= \frac{2 \cdot (m_1 - \mu \cdot m_2) \cdot g}{k} = \\ &= \frac{2 \cdot (5 - 0,1 \cdot 6) \cdot 9,8}{1000} = 0,0862 \text{ m} = 8,62 \text{ cm} \end{aligned}$$

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.

42. Sobre una superficie plana y sin rozamiento, inclinada 30° , se empuja hacia arriba una masa puntual de 2 kg, aplicando una fuerza paralela a dicha superficie. Debido a ello, la masa asciende desde la cota 0 m a la cota 5 m. Si la velocidad inicial es $0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ y en la parte superior la velocidad es $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, calcula:

a) El trabajo que realiza la fuerza.

b) El módulo de la fuerza.

c) El tiempo empleado en el primer metro recorrido.

a) Al ascender, el cuerpo adquiere energía cinética (debido a la fuerza que lo impulsa) y energía potencial (debido al incremento de altura).

En el problema no se consideran pérdidas de energía por rozamiento. Por tanto, el trabajo que la fuerza realiza sobre el cuerpo coincide con la variación de su energía mecánica. Así pues:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_f - E_i = W \\ E_f &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 5 = 123 \text{ J} \\ E_i &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,2^2 = 0,04 \text{ J} \\ \rightarrow W &= 123 - 0,04 = 122,96 \text{ J} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Delta E &= E_f - E_i = W \\ E_f &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 5 = 123 \text{ J} \\ E_i &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,2^2 = 0,04 \text{ J} \end{aligned}} \right\} \rightarrow$$

b) Si tenemos en cuenta que:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos 0^\circ = F \cdot d$$

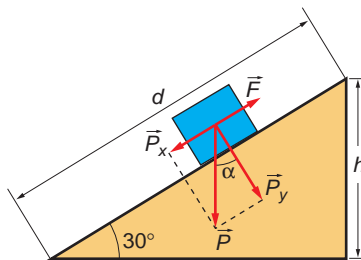
donde d es la distancia medida sobre el plano inclinado, que calculamos aplicando la relación trigonométrica:

$$d = \frac{h}{\text{sen } \alpha} = \frac{5}{\text{sen } 30^\circ} = 10 \text{ m}$$

el módulo de la fuerza resulta:

$$W = F \cdot d \rightarrow F = \frac{W}{d} = \frac{122,96}{10} = 12,296 \text{ N}$$

c) Mientras asciende, el cuerpo está sometido a las fuerzas que se indican en la figura:



Al aplicar la segunda ley de Newton al cuerpo, resulta:

$$F - m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha = m \cdot a$$

de donde podemos obtener la aceleración:

$$a = \frac{F - m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha}{m} \rightarrow a = \frac{12,296 - 2 \cdot 9,8 \cdot 0,5}{2} = 1,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El movimiento es un m.r.u.a. A partir de la ecuación de la posición en este movimiento y sustituyendo los datos del problema, obtenemos una ecuación de segundo grado, de la que podemos despejar el tiempo:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow 10 = 0,2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot t^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 0,624 \cdot t^2 + 0,2 \cdot t - 10 = 0 \rightarrow t = 3,846 \text{ s} \end{aligned}$$

43 Se aplica un momento de frenado de $-45 \text{ N} \cdot \text{m}$ a una partícula cuyo momento de inercia es de $30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ que está girando con una velocidad angular de $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Calcula:

a) La aceleración de frenado que adquirirá la partícula.

b) El tiempo que tardará en pararse.

c) El momento angular inicial.

a) A partir de la expresión que relaciona el momento del par de fuerzas, el momento de inercia y la aceleración angular, obtenemos esta última:

$$M = I \cdot \alpha \rightarrow \alpha = \frac{M}{I} = \frac{-45}{30} = -1,5 \text{ rad/s}^2$$

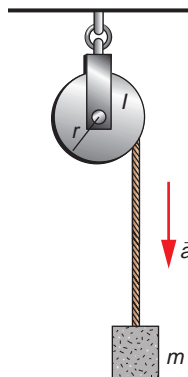
b) Despejando de la ecuación de la velocidad angular en el m.c.u.a., obtenemos el tiempo que tardará en pararse:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot (t - t_0) \rightarrow 0 = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-10}{-1,5} = 6,67 \text{ s}$$

c) El momento angular inicial lo calculamos como sigue:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \rightarrow L = I \cdot \omega = 30 \cdot 10 = 300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

44. Se sujeta un objeto de masa m a una cuerda enrollada alrededor de una rueda cuyo momento de inercia es I y cuyo radio es r . La rueda gira sin rozamiento, y la cuerda no se desliza por su borde. Calcula la tensión de la cuerda y la aceleración del cuerpo.



Al aplicar la segunda ley de Newton obtenemos lo siguiente:

$$F = m \cdot a \rightarrow m \cdot g - T = m \cdot a \quad [1]$$

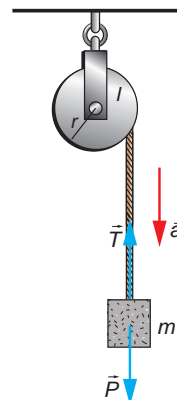
Por otra parte, la rueda gira debido al momento de la fuerza que actúa sobre ella. Esta fuerza es la tensión de la cuerda.

$$M = r \cdot F = I \cdot \alpha \rightarrow r \cdot T = I \cdot \alpha \quad [2]$$

Las expresiones [1] y [2] forman un sistema que nos permite obtener la tensión de la cuerda y la aceleración con que cae el cuerpo.

Si tenemos en cuenta la relación que existe entre las aceleraciones angular y lineal:

$$\alpha = \frac{a}{r}$$



la expresión [2] se convierte en:

$$r \cdot T = I \cdot \frac{a}{r}$$

Despejando la aceleración y sustituyendo en la expresión [1], obtenemos:

$$a = \frac{r^2 \cdot T}{I} \rightarrow m \cdot g - T = m \cdot \frac{r^2 \cdot T}{I}$$

Desarrollando esta expresión obtenemos la tensión de la cuerda:

$$m \cdot g = T + \frac{m \cdot r^2}{I} \cdot T \rightarrow T \cdot \left(1 + \frac{m \cdot r^2}{I}\right) = m \cdot g \rightarrow T = \frac{m \cdot g}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}}$$

Por tanto, la aceleración con que cae el cuerpo es:

$$a = \frac{r^2 \cdot T}{I} \rightarrow a = \frac{r^2}{I} \cdot m \cdot g \cdot \frac{1}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}} \rightarrow a = g \cdot \frac{\frac{m \cdot r^2}{I}}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}}$$

Por tanto, la aceleración de la caída es menor que la aceleración de la gravedad.

NOTA: la resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM para el alumnado.